Física Geral I - F -128

Aula 12
Momento Angular e sua Conservação

2º semestre, 2012

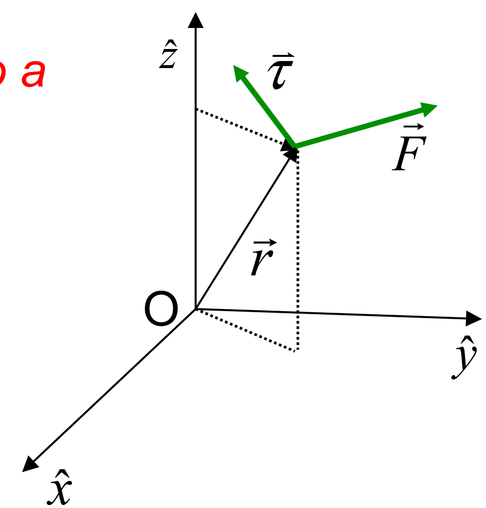
Momento Angular

Como vimos anteriormente, as variáveis angulares de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo $\hat{z}$ têm sempre correspondentes lineares:

$$\vec{\tau} \leftrightarrow \vec{F}; \qquad \vec{\alpha} \leftrightarrow \vec{a} \qquad e \qquad I \leftrightarrow m$$

Vamos definir mais uma grandeza angular que nos será extremamente útil: o momento angular!

Ampliaremos a definição de torque para aplicá-la a uma partícula, que se move em uma trajetória qualquer, *em relação a um ponto fixo* (em vez de um eixo).



O torque da força $\vec{F}$, que age sobre a partícula, em relação ao ponto O é definido como:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Momento Angular

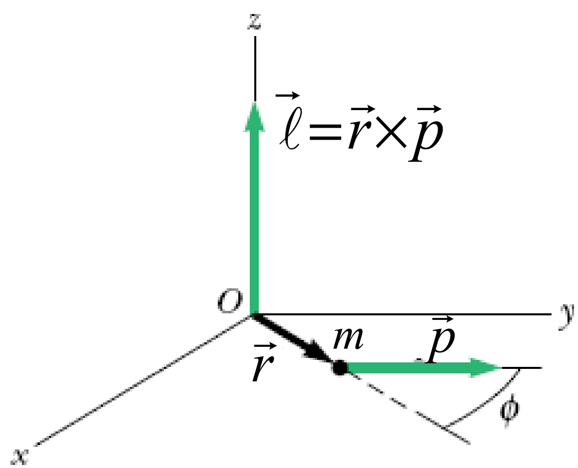
Definição: o momento angular $\vec{\ell}$ de uma partícula de momento $\vec{p}$ em relação ao ponto O é:

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$$

(Note que a partícula *não* precisa estar girando em torno de O para ter momento angular em relação a este ponto).

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$



Por outro lado: $\vec{F}_{res} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

Então: $$\boxed{\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{res} = \vec{\tau}_{res}}$$

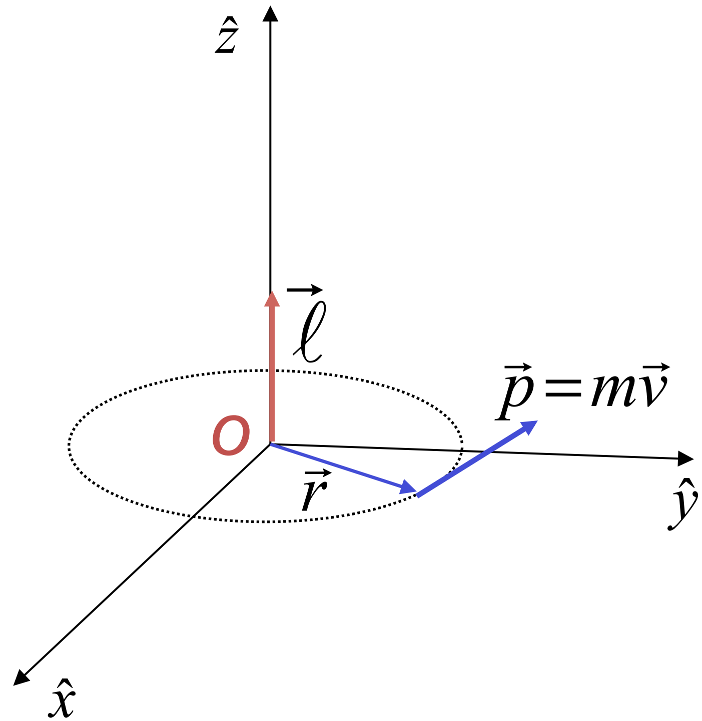
Conservação do momento angular

Como para qualquer massa puntiforme em movimento

$$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \, ,$$

podemos imediatamente dizer que se

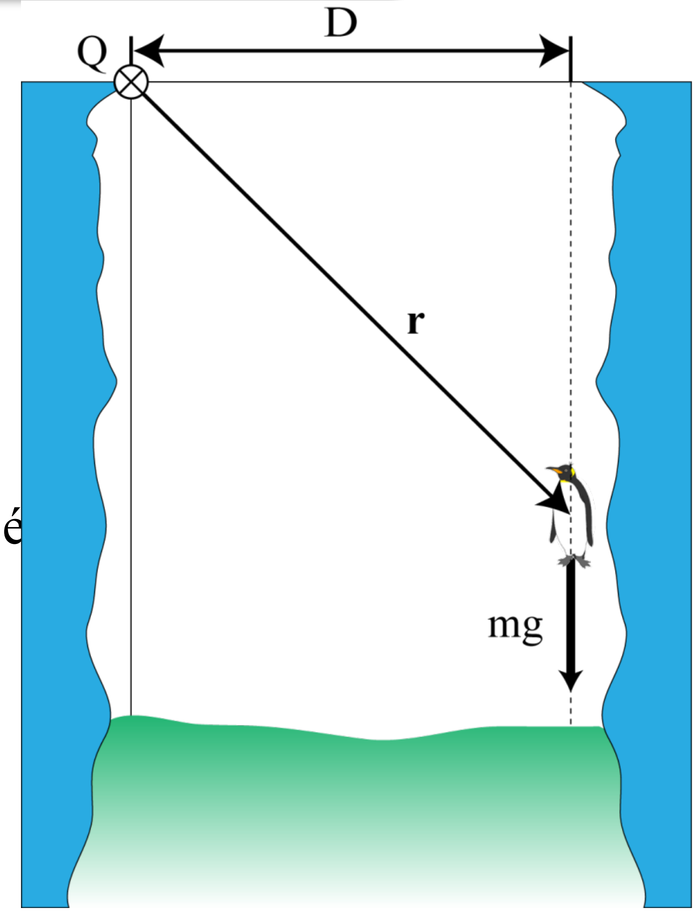
$$\boxed{\vec{\tau}_{res} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{\ell} = \overrightarrow{constante}}$$



$\vec{r}$ e $\vec{p}$ mantêm-se num plano (perpendicular a $\vec{\ell}$) durante o movimento quando o torque é nulo.

Exemplo 1

Calcular o momento e o torque do pinguim em relação ao ponto *Q*



O momento é dado por:

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Mas o momento do pinguim em função do tempo é dado por:

$$p(t) = m\,v(\mathrm{t}) = mgt$$

Assim:

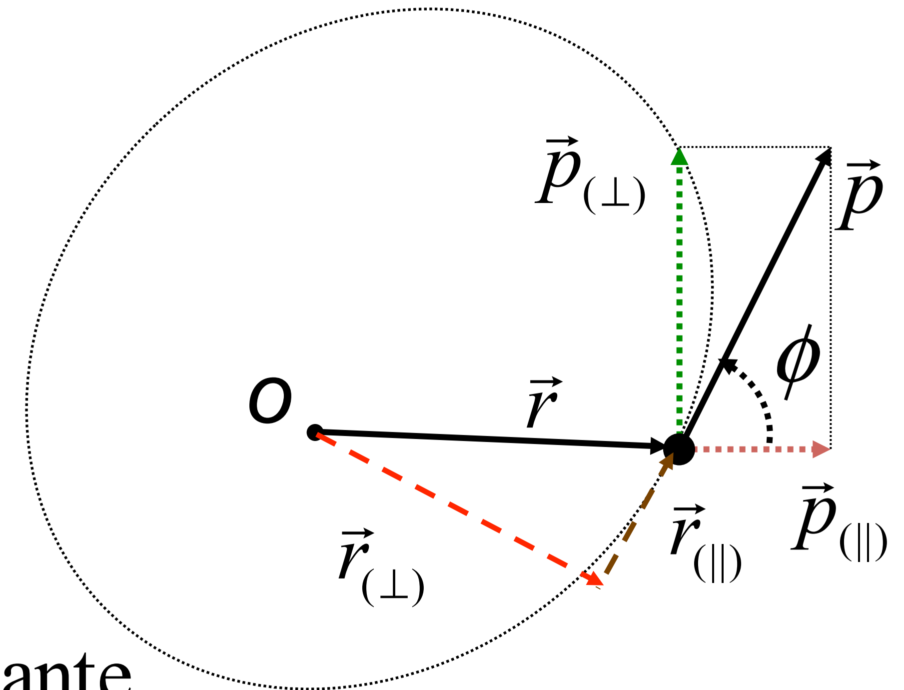
$$l(t) = Dmgt$$

Como: $\dfrac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{\tau}_{res}$, então $\tau = Dmg$.

(Verifique que este é o torque calculado quando leva-se em consideração a força peso no cálculo direto do torque.)

Momento Angular

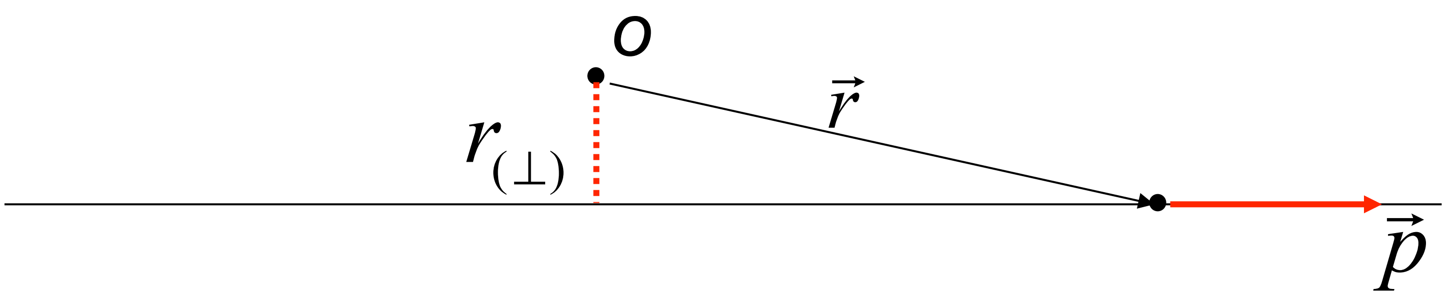
O momento angular da partícula da figura ao lado é um vetor perpendicular ao plano do movimento e o seu módulo vale



$$\ell = r\, p_{(\perp)} = r_{(\perp)}\, p$$

Se a força sobre a partícula é nula ela segue uma trajetória retilínea e

$$\tau = 0 \Rightarrow \ell = r_{(\perp)}\, p = \text{constante}$$



Momento Angular

Forças Centrais

Há, entretanto, outros casos onde o momento angular se conserva mesmo na presença de forças não nulas. Um exemplo é o de forças centrais, que são forças da forma

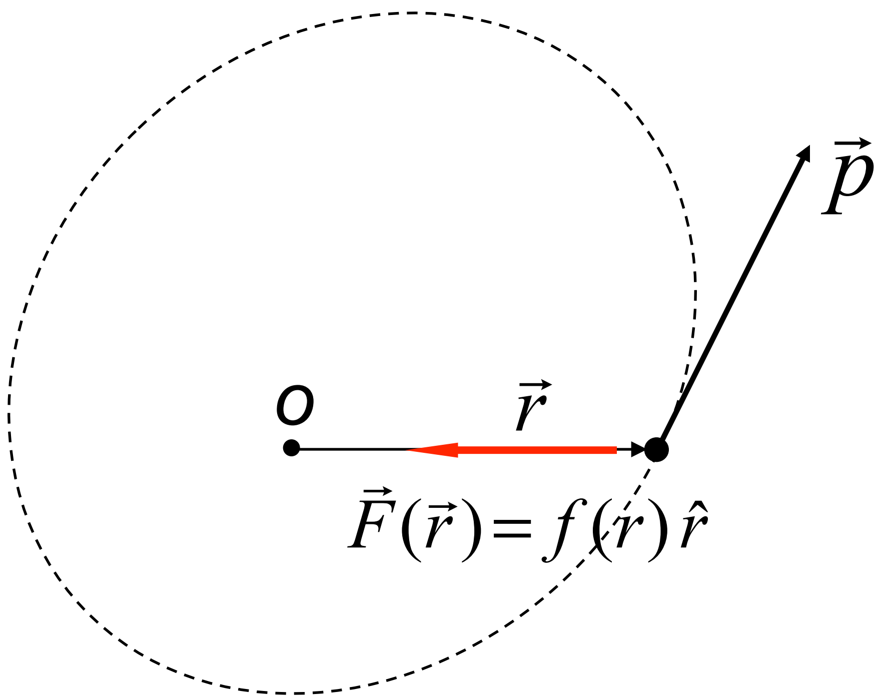
$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\hat{r}$$

Neste caso:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{\tau} = \underbrace{\vec{r} \times f(r)\,\hat{r}}_{=0}$$

e se

$$\boxed{\vec{\tau} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\ell} = \overrightarrow{const}.}$$

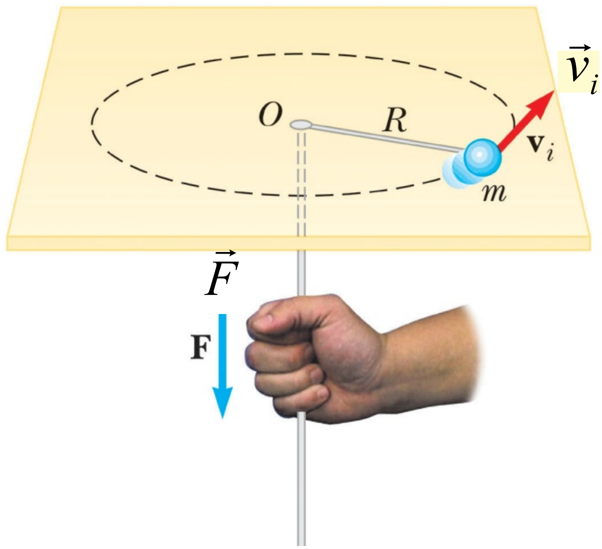


Exemplo 2

Dados R e v_i pede-se:

a) v_f em função do raio r;

b) o trabalho da força F.



Como a força é central, o momento angular em relação a O se conserva:

$$m v_i R = m v_f r \;\Rightarrow\; v_f = \frac{R v_i}{r}$$

O trabalho da força é dado por

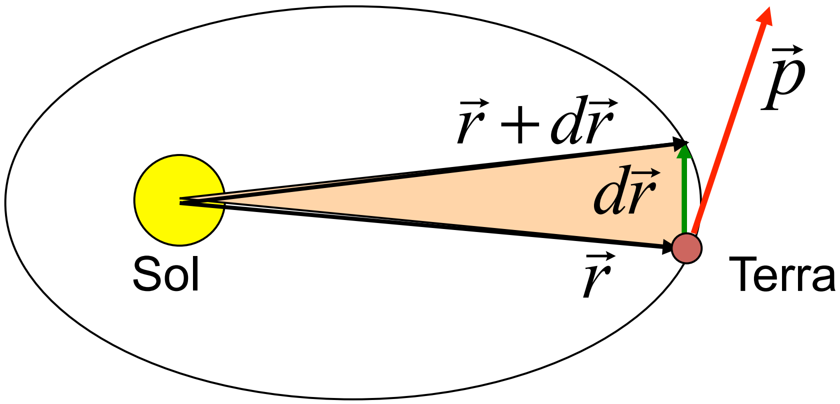
$$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v_f^{\,2} - \frac{1}{2} m v_i^{\,2} = \frac{1}{2} m v_i^{\,2} \left[\left(\frac{R}{r} \right)^2 - 1 \right]$$

Exemplo 3

Lei das áreas

A Força gravitacional entre dois corpos, por exemplo, Sol e Terra é dada por:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$



Como a força gravitacional é central, o momento angular da Terra se conserva (Sol estático, centro de atração gravitacional para a Terra)

$$\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{\ell} = const.$$

* o movimento se dá num plano normal a $\vec{\ell}$

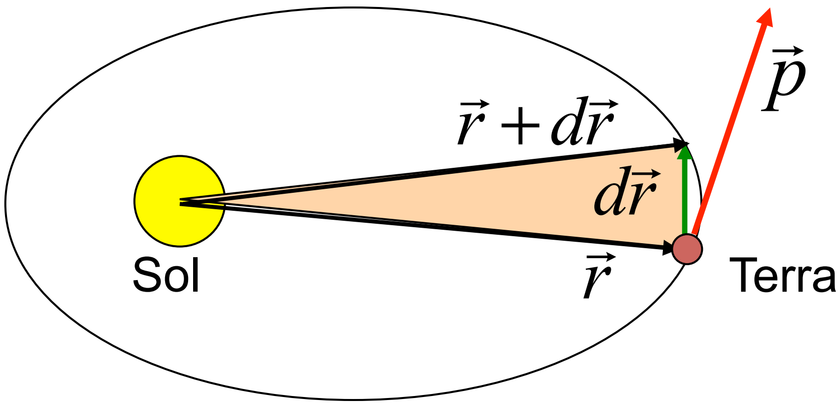
Exemplo 3

Lei das áreas

Área do triângulo colorido:

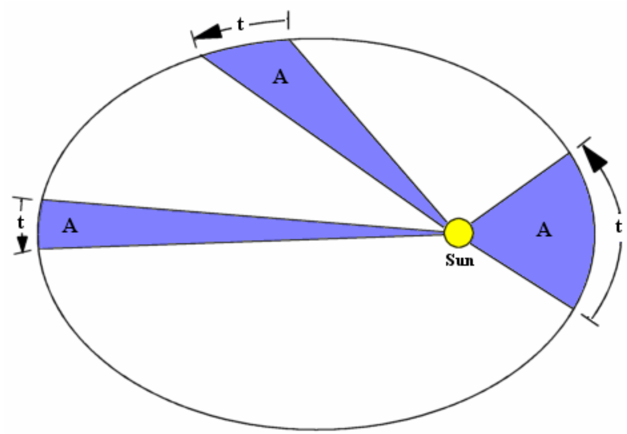
$$d\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r}\times d\vec{r}$$

($|d\vec{A}|$ = metade da área do paralelogramo)



$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2m}\vec{r}\times m\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{\ell}}{2m}$$

$$\left|\frac{d\vec{A}}{dt}\right| = \frac{\ell}{2m} = \text{constante}$$



2ª Lei de Kepler: "O raio vetor que liga um planeta ao Sol descreve áreas iguais em tempos iguais".

Q2: Movimento circular vs Força central

Existe algum movimento com trajetória circular e o momento angular não constante ?

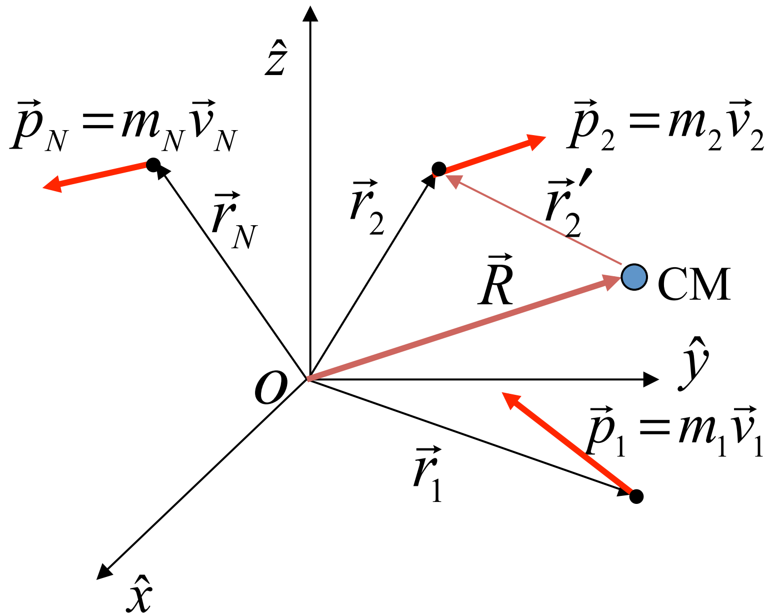
✓ A. Sim

✗ B. Não

Momento angular de um sistema de partículas

O momento angular de um sistema de partículas é dado por:

$$\vec{L}=\sum_i \vec{\ell}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{p}_i=\sum_i m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i$$



Lembrando que a posição do CM é

$$\vec{R}=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$, podemos escrever:

$$\sum_i m_i\vec{r}_i'=0 \;\Rightarrow\; \sum_i m_i\vec{v}_i'=\sum_i \vec{p}_i'=0$$

Como $\vec{r}_i=\vec{r}_{i'}+\vec{R}$ segue que $\vec{v}_i=\vec{v}_{i'}+\vec{V}$, onde $\vec{V}$ é a velocidade do CM:

Momento angular de um sistema de partículas

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i' + \vec{R}) \times (\vec{v}_i' + \vec{V}) = \sum_i m_i (\vec{r}_i' \times \vec{v}_i') +$$

$$\vec{R} \times \underbrace{\sum_i m_i \; \vec{v}_i'}_{=0} + \underbrace{\sum_i m_i \; \vec{r}_i'}_{=0} \times \vec{V} + \underbrace{\sum_i m_i}_{=M} \; \vec{R} \times \vec{V}$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}' + \vec{R} \times \vec{P}}$$

Ou seja, o momento angular de um sistema de partículas é a soma do momento angular em relação ao CM com o momento angular do CM. Note que o momento linear interno de um sistema de partículas se anula.

Momento angular de um sistema de partículas

Lei fundamental da dinâmica das rotações

A variação do momento angular total de um sistema de partículas é:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i\times\vec{p}_i)=\sum_i\left(\cancelto{=0}{\frac{d\vec{r}_i}{dt}\times\vec{p}_i}+\vec{r}_i\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right)=\sum_i\vec{r}_i\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_i$$

Aqui $\vec{F}_i=\dfrac{d\vec{p}_i}{dt}$ (referencial inercial) representa a força total sobre a partícula *i*.

Como $$\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\Big(\vec{F}_{i(ext)}+\sum_{j\neq i}\vec{F}_{i\leftarrow j}\Big)$$

podemos trocar *i* por *j* e reescrever:

Momento angular de um sistema de partículas

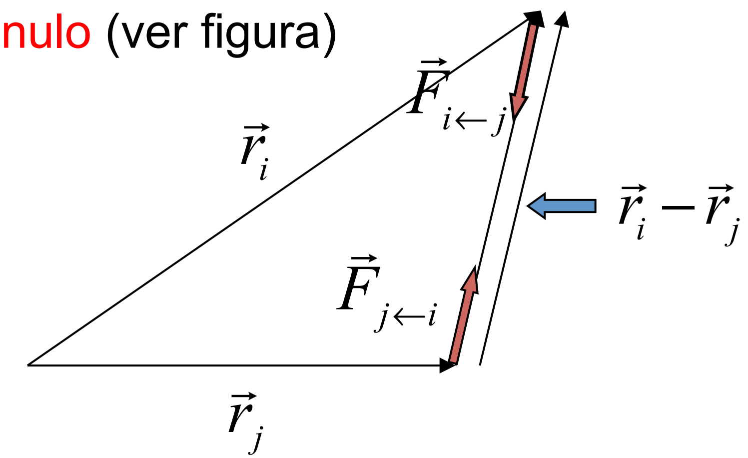
$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i(ext)} + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}\sum_{i \neq j}[(\vec{r}_i \times \vec{F}_{i \leftarrow j}) + (\vec{r}_j \times \vec{F}_{j \leftarrow i})]$$

Usando a 3ª Lei de Newton $\vec{F}_{j \leftarrow i} = -\vec{F}_{i \leftarrow j}$ temos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i(ext)}}_{\vec{\tau}_{(ext)}} + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}\sum_{i \neq j}[(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{i \leftarrow j})$$

Como o produto vetorial do segundo termo é nulo (ver figura)

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{(ext)}}$$

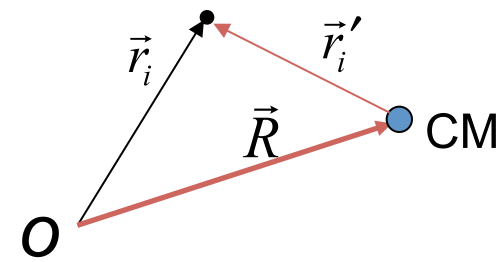


Energia cinética de um sistema de partículas

Como vimos anteriormente:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R} \Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i' = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_i' = \sum_i \vec{p}_i' = 0$$



$$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}$$ e $$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\Downarrow$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{V}) \cdot (\vec{v}_i' + \vec{V}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \vec{V} \cdot \sum_i \underbrace{m_i \vec{v}_i'}_{=0} + \sum_i \frac{1}{2} m_i V^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M V^2}$$

Ou seja, a energia cinética de um sistema de partículas é a soma da energia cinética do sistema em relação ao CM com a energia cinética do CM.

Rotação em torno de um eixo fixo

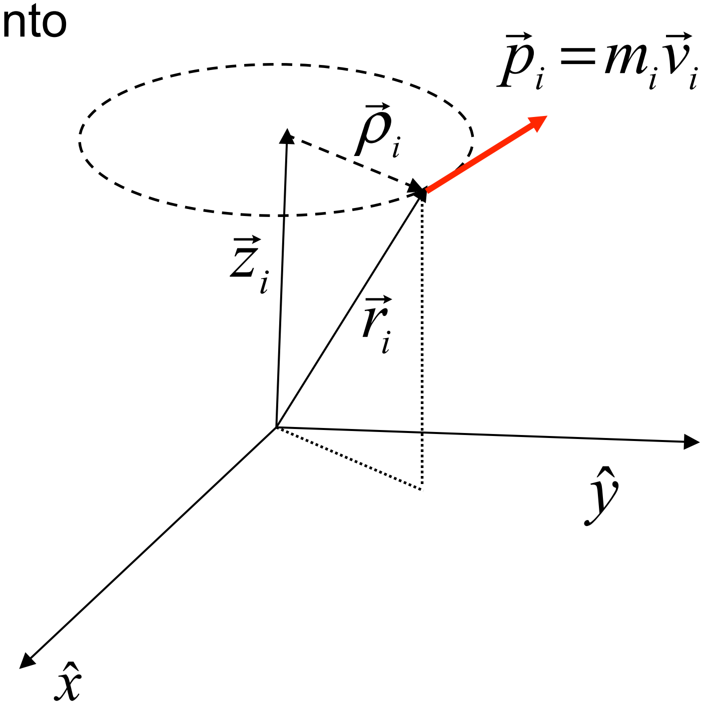
Vamos agora estudar o movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. Como podemos decompor o vetor posição de qualquer ponto do corpo rígido como

$$\vec{r}_i = \vec{\rho}_i + \vec{z}_i$$, temos:

$$\vec{\ell}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \underbrace{\vec{\rho}_i \times \vec{p}_i}_{/\!/ \hat{z}} + \underbrace{\vec{z}_i \times \vec{p}_i}_{\perp \hat{z}}$$

$$\ell_i^{(z)} \hat{z} = \vec{\rho}_i \times \vec{p}_i$$

$$\frac{d\ell_i^{(z)}}{dt} \hat{z} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\rho}_i \times \vec{p}_i\right) = \tau_i^{(z)} \hat{z}$$



(com o torque definido em relação ao eixo de rotação).

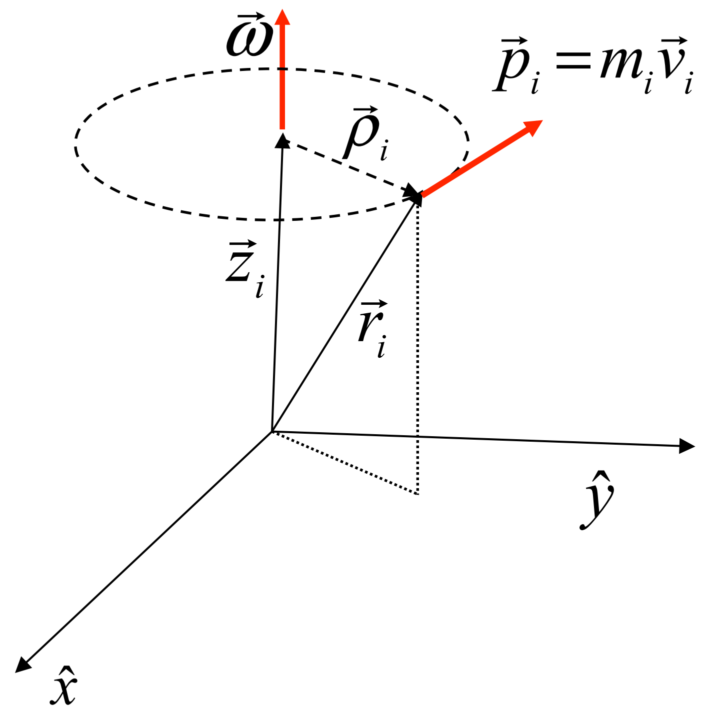
Rotação em torno de um eixo fixo

Como $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i = m_i \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$,

temos: $\ell_i^{(z)} \hat{z} = \vec{\rho}_i \times \vec{p}_i = m_i \rho_i^2 \omega \hat{z}$

ou $\ell_i^{(z)} = m_i \rho_i^2 \omega$

$$\boxed{L^{(z)} = \sum_i \ell_i^{(z)} = \sum_i m_i \rho_i^2 \omega = I\omega}$$



Note a analogia:

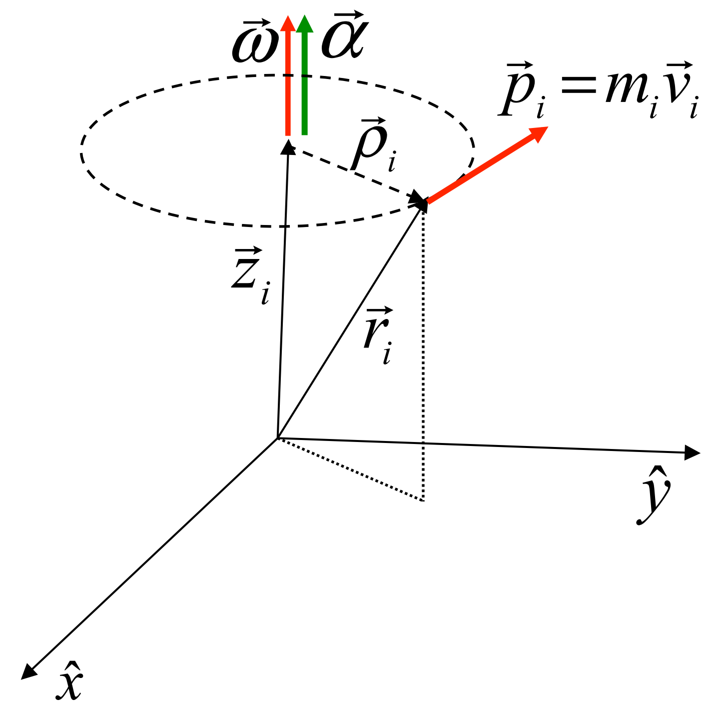
$$L^{(z)} = I\omega \quad \leftrightarrow \quad p = mv$$

Rotação em torno de um eixo fixo

Temos também: $\tau_i^{(z)} = \dfrac{d\ell_i^{(z)}}{dt}$

$$\tau^{(z)} = \sum_i \tau_i^{(z)} = \sum_i \frac{dl_i^{(z)}}{dt} =$$

$$\frac{d\left(\sum_i l_i^{(z)}\right)}{dt} = \frac{dL^{(z)}}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$



Mas, pela Lei fundamental da dinâmica das rotações:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i(ext)} = \vec{\tau}_{(ext)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau^{(z)} = \tau_{(ext)}^{(z)} = \frac{dL^{(z)}}{dt} = I\,\alpha}$$

Rotação em torno de um eixo fixo

Tabela de analogias

	Rotação em torno de um eixo fixo	Movimento de translação
energia cinética	$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$	$K = \frac{1}{2} m v^2$
equilíbrio	$\sum \vec{\tau} = \vec{0}$	$\sum \vec{F} = \vec{0}$
2ª lei de Newton	$\sum \vec{\tau} = I \vec{\alpha}$	$\sum \vec{F} = m \vec{a}$
2ª lei de Newton	$\sum \vec{\tau}_{(ext)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
momento	$L = I\omega$	$\vec{p} = m\vec{v}$
conservação	$\vec{L}_i = \vec{L}_f$	$\vec{p}_i = \vec{p}_f$
potência	$P = \tau\omega$	$P = Fv$

Exemplo

Um projétil de massa ***m*** move-se para a direita com velocidade v_i. Ele bate e gruda na extremidade de uma haste de massa M e comprimento d que está montada num eixo sem atrito que passa por seu centro.

a) calcule a velocidade angular do sistema imediatamente após a colisão;
b) determine a porcentagem de energia mecânica perdida por causa da colisão

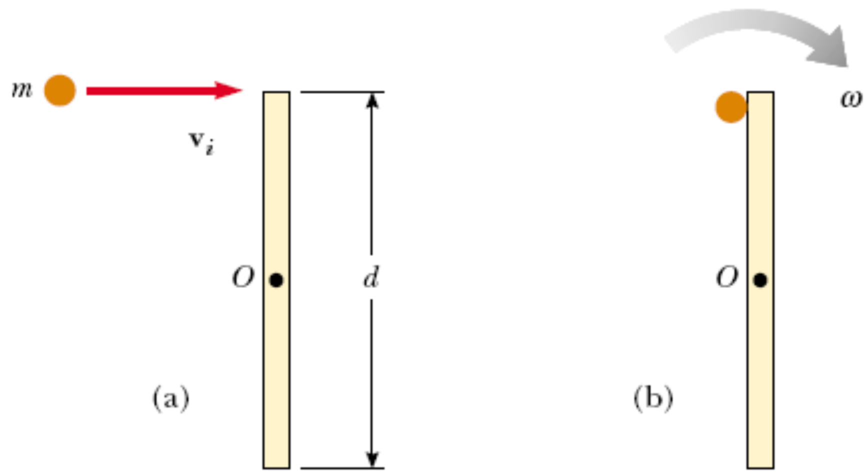


Figure P11.54