# Física Geral I - F -128

## Aula 14
## Conservação do Momento Angular; Rolamento

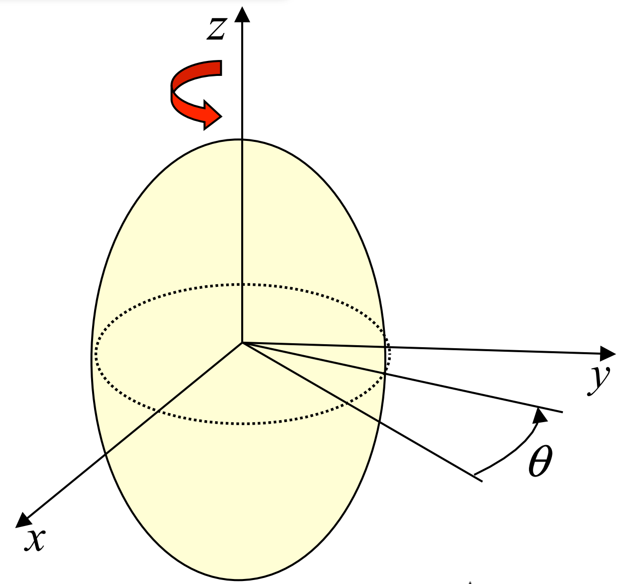
2º semestre, 2012

# Cinemática de Rotação

## Variáveis Rotacionais

Deslocamento angular:

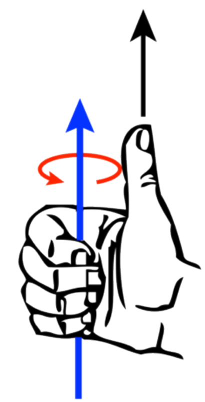
$$\Delta\theta(t) = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$$




Velocidade angular média $\quad \bar{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

Velocidade angular instantânea

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{n} = \frac{d\theta}{dt}\hat{n}$$



Aceleração angular média $\quad \bar{\vec{\alpha}} = \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$

Aceleração angular instantânea $\quad \vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

# Cinemática de Rotação

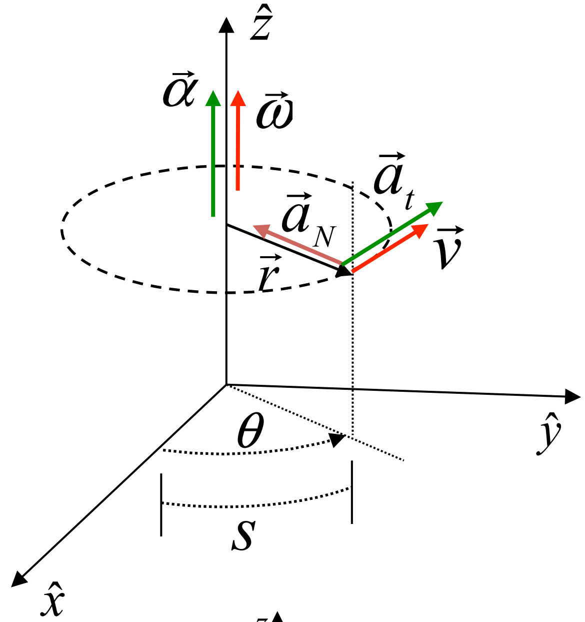
## Relação com as variáveis lineares

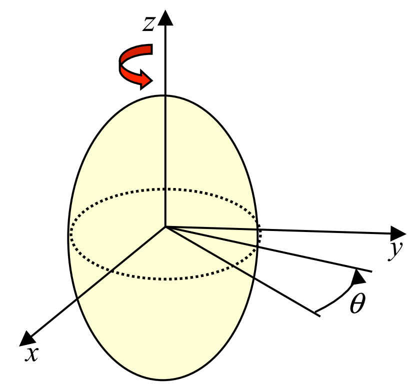
- Posição: $s = r\theta$

- Velocidade: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

- Aceleração: $\vec{a} = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{a}_N}$

$$\begin{cases} \vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} = \alpha r \hat{v} \\ \vec{a}_N = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 r \hat{r} \end{cases}$$



# Rotação em torno de um eixo fixo

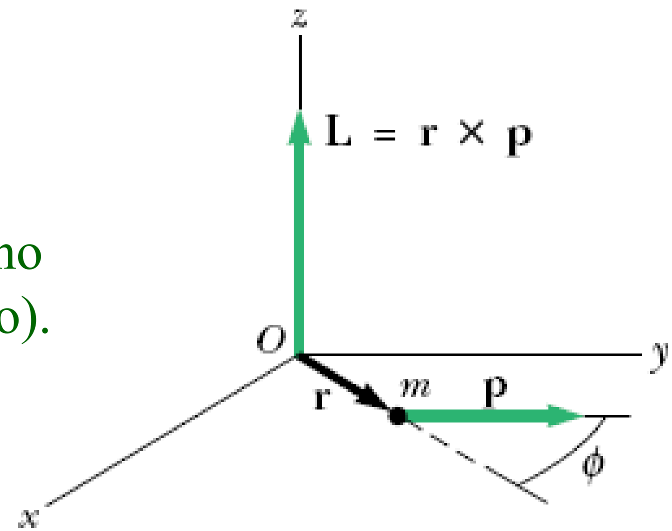
## Tabela de analogias

| | Rotação em torno de um eixo fixo | Movimento de translação |
|---|---|---|
| energia cinética | $K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$ | $K = \frac{1}{2} m v^2$ |
| equilíbrio | $\sum \vec{\tau} = \vec{0}$ | $\sum \vec{F} = \vec{0}$ |
| 2ª lei de Newton | $\sum \vec{\tau} = I \vec{\alpha}$ | $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ |
| 2ª lei de Newton | $\sum \vec{\tau}_{(ext)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ | $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ |
| momento | $L = I\omega$ | $\vec{p} = m\vec{v}$ |
| conservação | $\vec{L}_i = \vec{L}_f$ | $\vec{p}_i = \vec{p}_f$ |
| potência | $P = \tau\omega$ | $P = Fv$ |

# Momento Angular

O momento angular $\vec{\ell}$ de uma partícula de momento $\vec{p}$ em relação ao ponto O é:

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$$




(Note que a partícula *não* precisa estar girando em torno de O para ter momento angular em relação a este ponto).

$$\frac{d}{dt}\vec{\ell} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Para um sistema de partículas, $\vec{\tau}_{ext} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

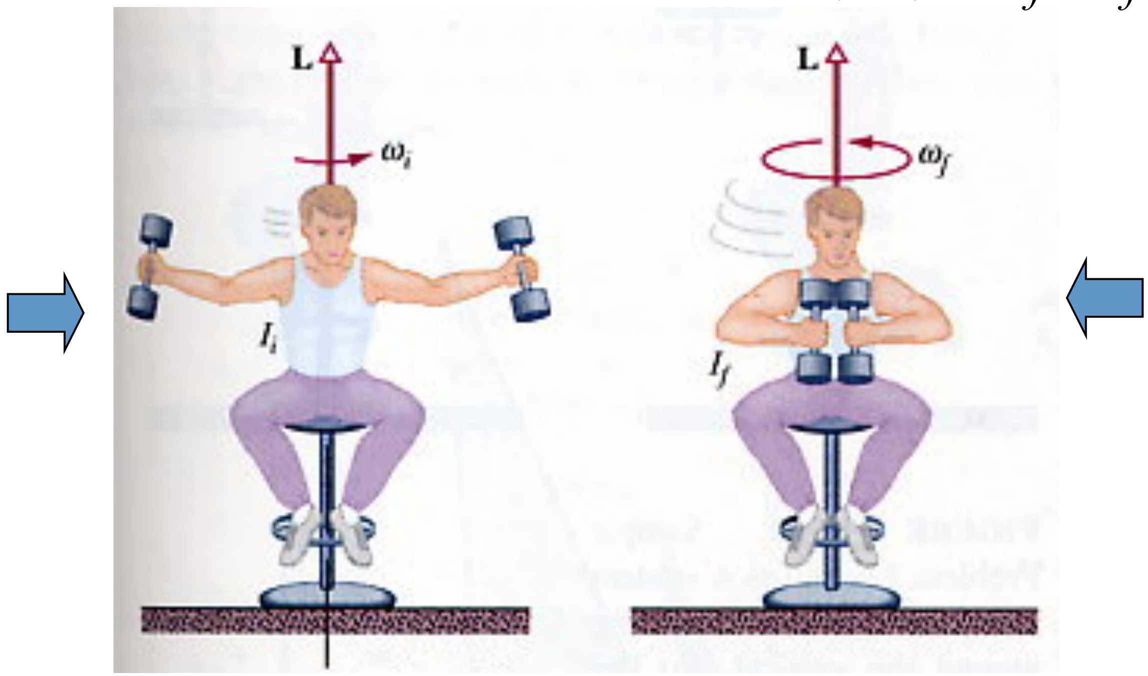
Para um corpo rígido em torno de um eixo fixo, $\vec{L} = I\vec{\omega}$

Se $\vec{\tau} \,/\, \vec{\tau}_{ext} = \vec{0}$, então o momento angular é constante no tempo!

# Conservação do momento angular

No sistema homem – halteres: só há forças internas e, portanto:

$$L^{(z)} = I\omega = \text{constante} \;\Rightarrow\; I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$\omega_i \; I_i$  $\omega_f \; I_f$

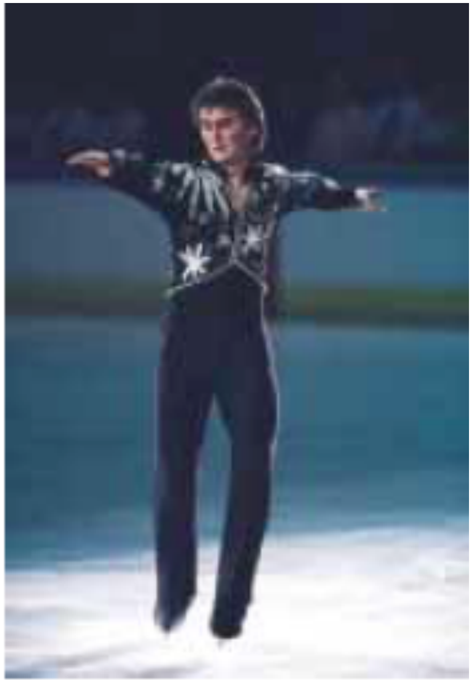


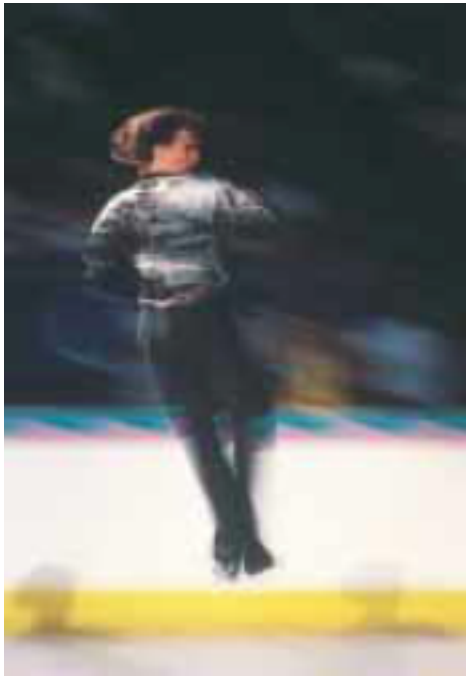
Com a aproximação dos halteres ( $I_f < I_i$ ) a velocidade angular do sistema aumenta.

# Conservação do momento angular

O mesmo princípio se aplica na patinação artística:

$$L^{(z)} = I\omega = \text{constante} \;\Rightarrow\; I_i\omega_i = I_f\omega_f$$



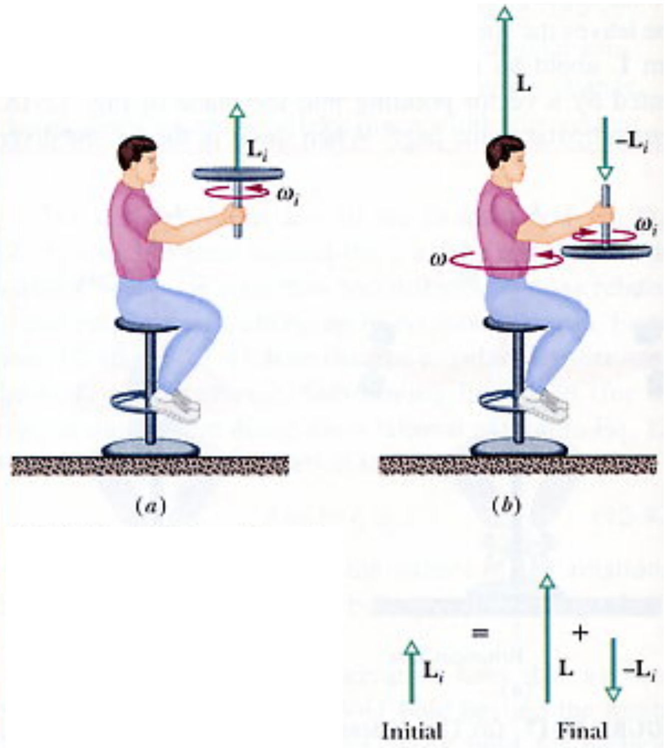


http://www.youtube.com/watch?v=AQLtcEAG9v0

# Exemplo

Dados $I_{bic} = 1,2\ \text{kg.m}^2;\ \ I_{tot} = 6,8\ \text{kg.m}^2$ e $\omega_i = 3,9\ \text{rot/s}$

Queremos calcular a velocidade angular final $\omega$ do sistema após o menino inverter o eixo de rotação da roda de bicicleta (ver figura)




Momento angular inicial do sistema roda de bicicleta-menino (+ banco)

$$L_i = L_{bic} = I_{bic}\,\omega_i$$

O menino inverte o eixo de rotação da roda de bicicleta

$$L_{bic} \rightarrow -L_i$$

# Exemplo

Momento angular final do sistema:

$$L_f = L_{bic} + L_{men} = L_{men} - L_i$$

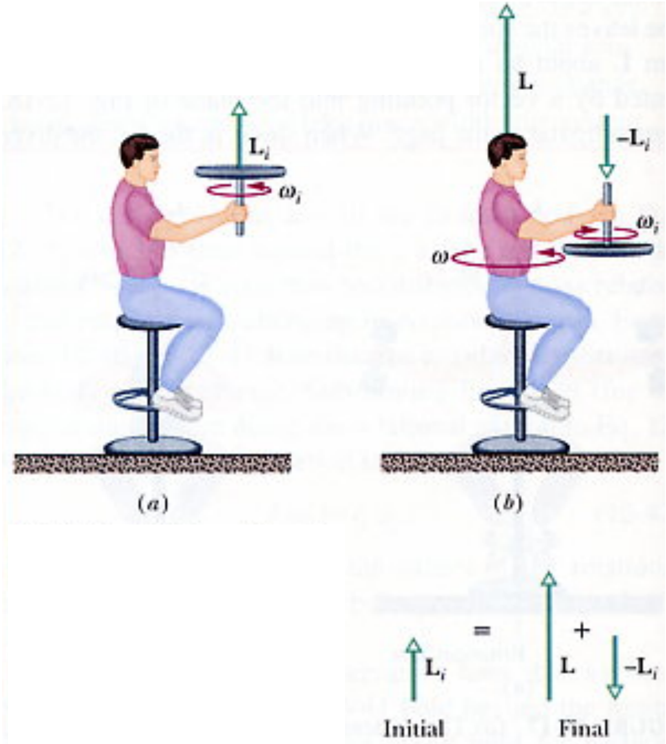
Conservação do momento angular (pois só há forças internas no sistema)

$$L_f = L_i \;\Rightarrow\; L_{men} - L_i = L_i$$

$$\Rightarrow L_{men} = 2L_i$$

$$\Rightarrow \quad I_{tot}\,\omega = 2 I_{bic}\,\omega_i$$

$$\omega = \frac{2 I_{bic}\,\omega_i}{I_{tot}} \cong 1{,}4 \;\; \text{rot/s}$$

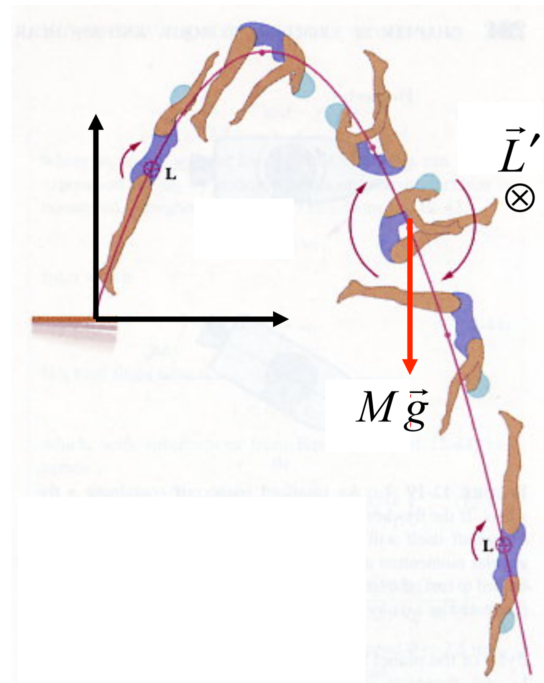


# Conservação do momento angular

No caso da mergulhadora da figura ao lado o CM segue um movimento parabólico.

Nenhum torque externo atua sobre ela em relação a um eixo que passa pelo CM; então no referencial do CM:

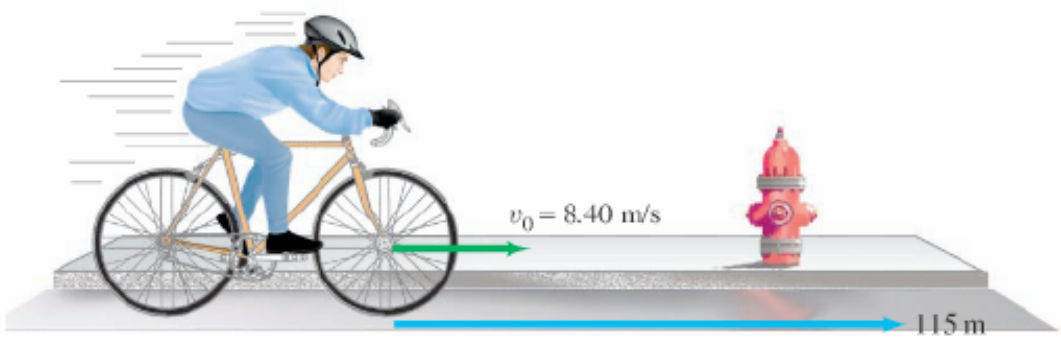
$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_i \vec{r}_i{}' \times \vec{F}_i = \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i{}'}_{=0} \times \vec{g} = 0$$



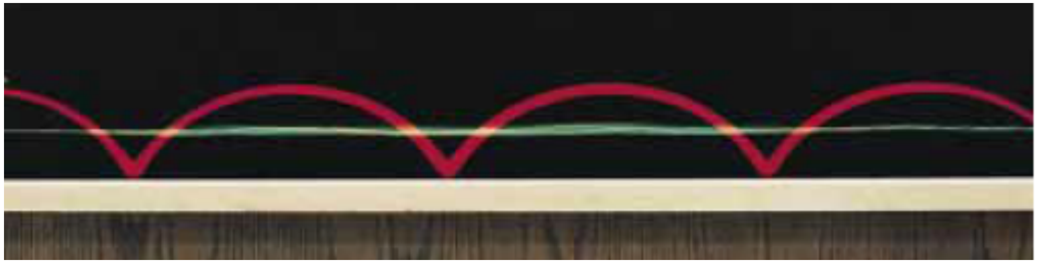

e o momento angular $\vec{L}'$ da nadadora é constante durante o salto. Juntando braços e pernas, ela pode aumentar sua velocidade angular em torno do eixo que passa pelo CM, às custas da redução do momento de inércia em relação a este eixo.

# Movimento de um corpo rígido

O tipo mais geral de movimento de um CR é uma combinação de uma **translação** com uma **rotação**.

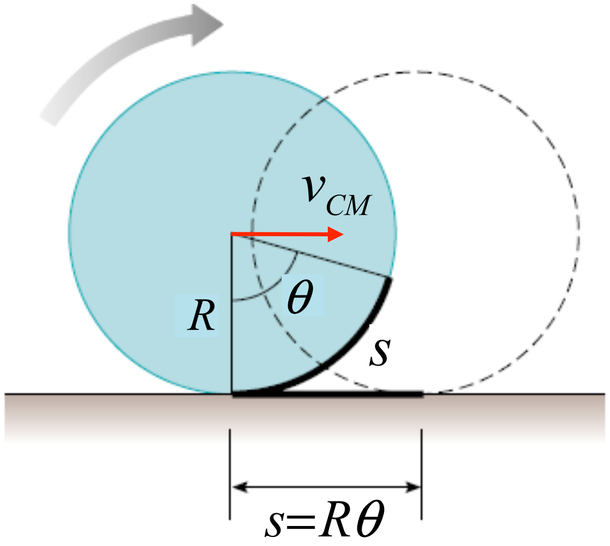



Bike as seen from the ground at $t = 0$



# Rolamento (sem deslizamento)

- O deslocamento do centro de massa e a rotação estão vinculados:
  - $s$ é o deslocamento do centro de massa do objeto
  - $\theta$ é o deslocamento angular do objeto em torno de um eixo que passa pelo CM do sistema.

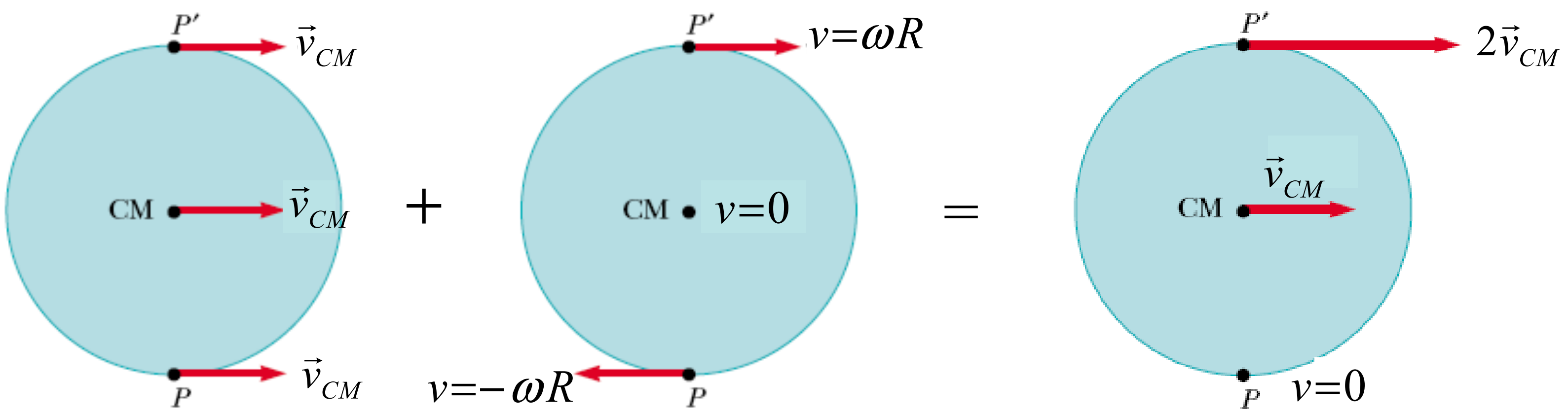



A velocidade do CM é dada por: $$v_{CM} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

# Rolamento (sem deslizamento)

## Decomposição do rolamento em rotação + translação

Translação pura | Rotação pura | Translação + Rotação

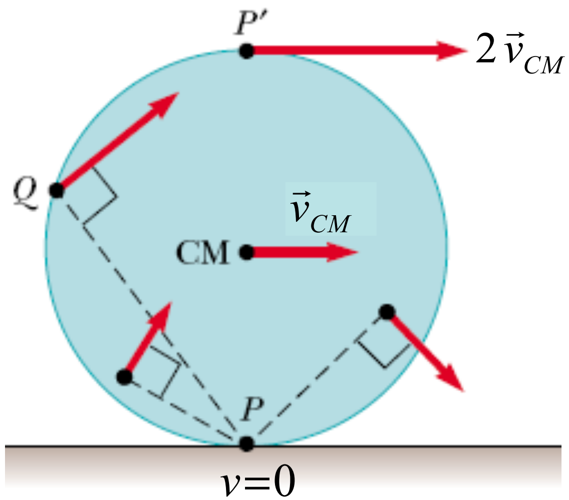



$\boxed{v = v_{CM} = R\omega}$

$v = r\omega$ (acima do centro)
$v = -r\omega$ (abaixo do centro)

O ponto de contato está sempre em repouso.

# Rolamento (sem deslizamento)




Fotografia de uma roda em rolamento

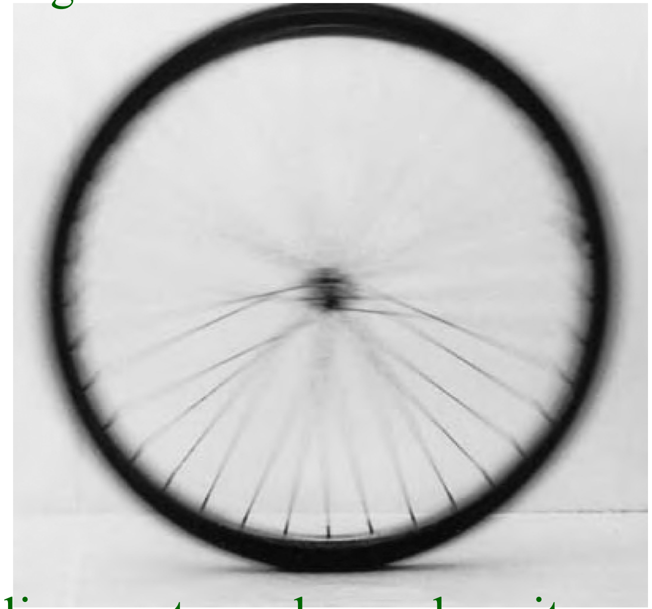


Figura da esquerda: o rolamento sem deslizamento pode ser descrito como uma rotação pura com a mesma velocidade angular $\omega$ em torno de um eixo que sempre passa pelo ponto P de contacto (eixo instantâneo de rotação).

De fato: $v_{P'} = \omega 2R = 2\omega R = 2v_{CM}$

Figura da direita: os raios de cima estão menos nítidos que os de baixo porque estão se movendo mais depressa.

# Energia cinética de rolamento

Encarando o rolamento sem deslizamento como uma rotação pura em torno do eixo instantâneo:

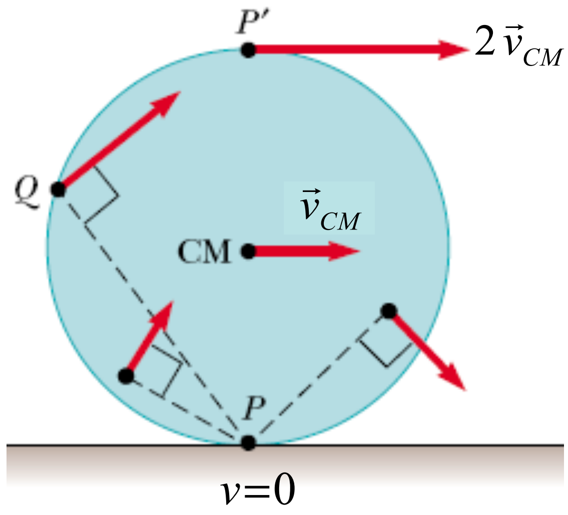
$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

Mas $I_P = I_{CM} + M R^2$ (teorema dos eixos paralelos)

Então:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M R^2 \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

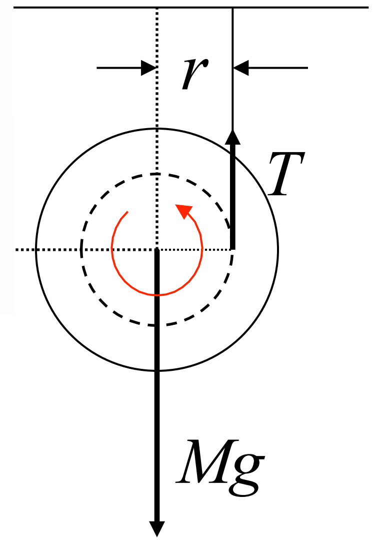



Isto é, a energia cinética do corpo rígido é a soma da energia cinética de rotação em torno do CM com a energia cinética associada ao movimento de translação do CM.

# Exemplo

## O iô-iô

Torque externo relativo ao CM quando o iô-iô desce:




$$Tr = I_{CM}\alpha$$

Dinâmica linear (eixo orientado para baixo)

$$Mg - T = Ma$$

Condição de rolamento: $v = \omega r \quad \Rightarrow \quad a = \alpha r$

$$T = \frac{Mg}{1 + \dfrac{Mr^2}{I_{CM}}} \quad \text{e} \quad a = \frac{r^2}{I_{CM}} T = \frac{g}{1 + \dfrac{I_{CM}}{Mr^2}}$$

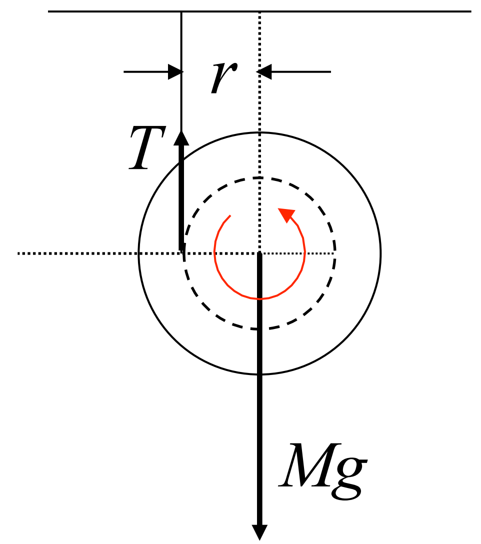
# Exemplo

Note que se o iô-iô sobe, o torque muda de sinal

$$-Tr = I_{CM}\alpha$$

Por outro lado, o fio se enrola e a condição de rolamento também muda de sinal

$$v = -\omega r \quad \Rightarrow \quad a = -\alpha r$$




Ao final, as equações não mudam!

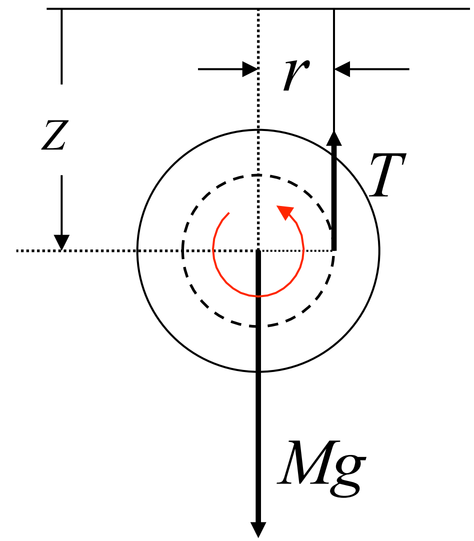
$$Tr = -I_{CM}\alpha = I_{CM}\frac{a}{r}$$

$$Ma = Mg - T$$

$$T = \frac{Mg}{1 + \frac{Mr^2}{I_{CM}}} \quad \text{e} \quad a = \frac{r^2}{I_{CM}}T = \frac{g}{1 + \frac{I_{CM}}{Mr^2}}$$

# Exemplo

Podemos ainda resolver o mesmo problema usando a conservação de energia:




$$\frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = Mgz$$

A condição de rolamento é

$$v_{CM} = \omega r \quad \Rightarrow \quad v_{CM} = \pm\sqrt{\frac{2gz}{1+\frac{I_{CM}}{Mr^2}}} = \pm\sqrt{2az}$$

Sinal (+) para a descida e (–) para a subida.

⇒ Equação de Torricelli com aceleração constante dada por

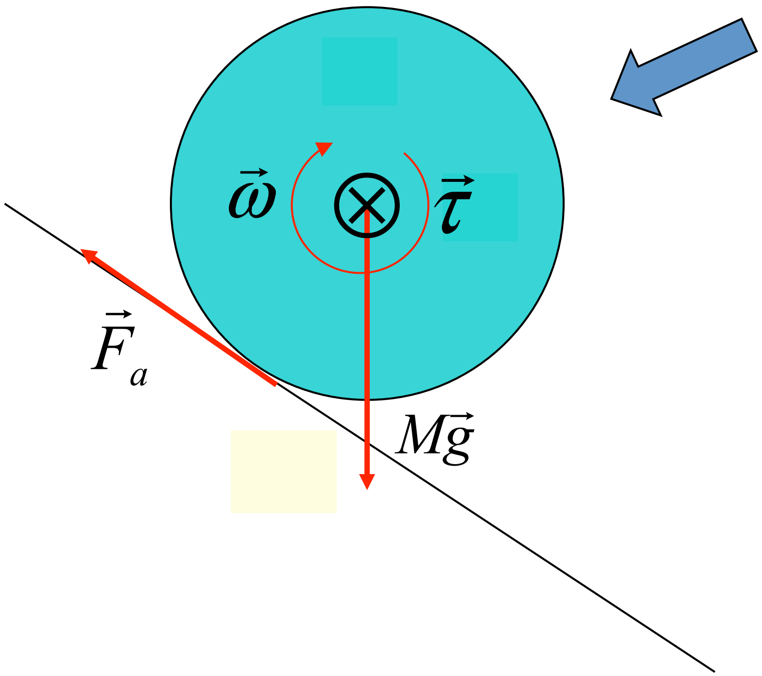
$$a = \frac{g}{1+\frac{I_{CM}}{M\rho^2}}$$

# Rolamento (sem deslizamento)

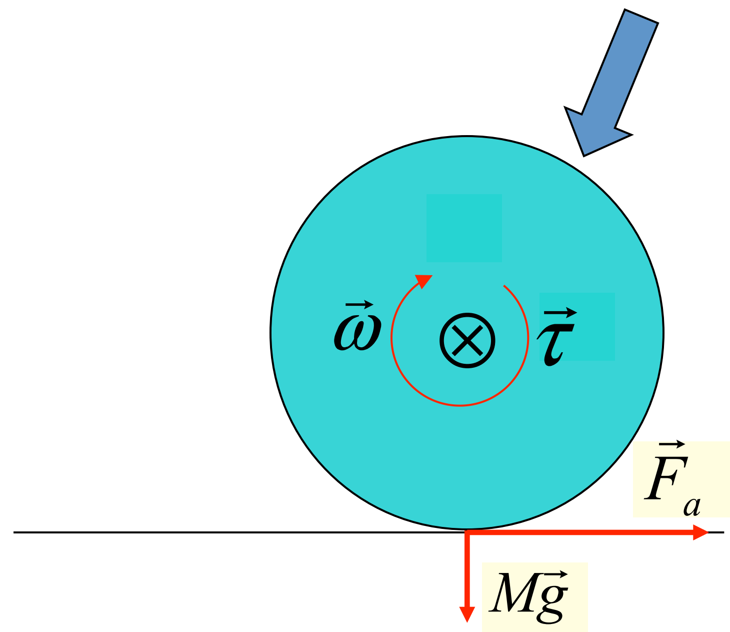
## Atrito no rolamento

Transforma energia cinética de translação em rotação

Transforma energia cinética de rotação em translação




Corpo rolando ladeira abaixo devido ao próprio peso.




Roda de um carro girando.

# Exemplo

## Rolamento sobre um plano inclinado

Na direção y:

$$N - Mg\cos\theta = 0$$

Na direção x:

$$Mg sen\,\theta - F_a = Ma$$

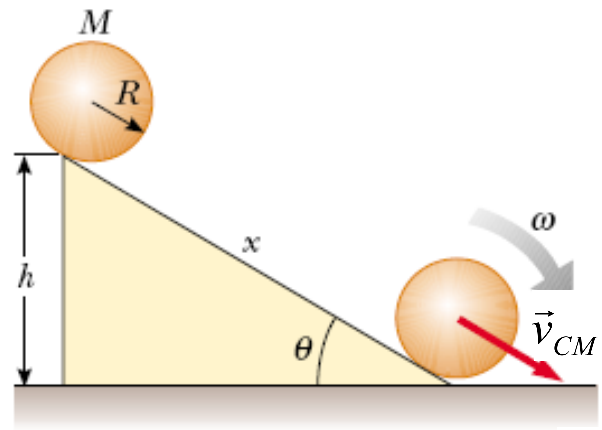
Torque relativo ao CM:

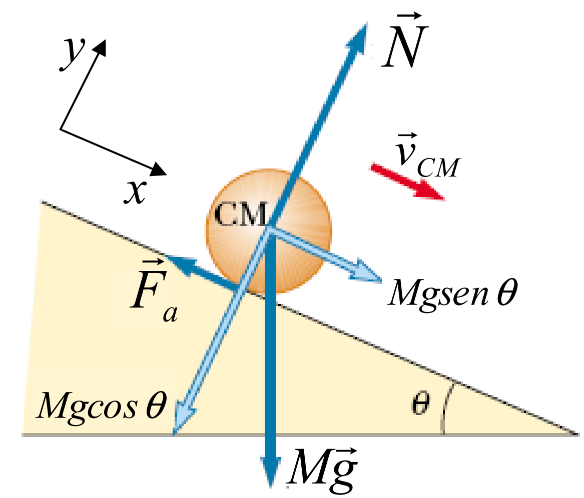
$$F_a R = I_{CM}\alpha$$

Condição de rolamento sem deslizamento: $a = R\alpha$

Momento de inércia: $I_{CM} = Mk^2$

( $k$ é o raio de giração)

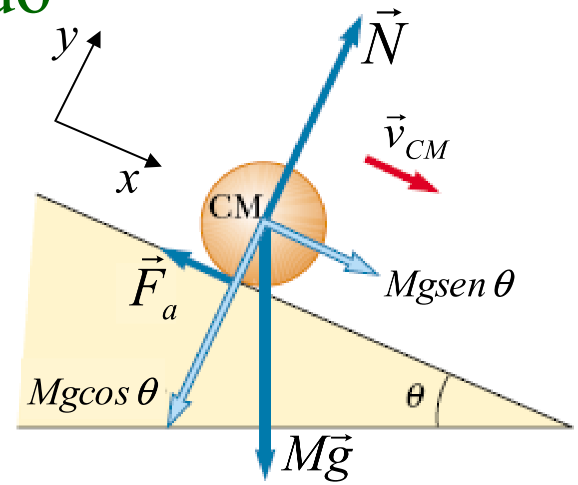


# Exemplo

## Rolamento sobre um plano inclinado

$$a = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{I_{CM}}{MR^2}}$$




Se $\quad 1+\frac{I_{CM}}{R^2} = \begin{cases} 2 & \Rightarrow \text{ anel} \\ 3/2 & \Rightarrow \text{ cilindro} \\ 7/5 & \Rightarrow \text{ esfera} \end{cases}$

Temos ainda:

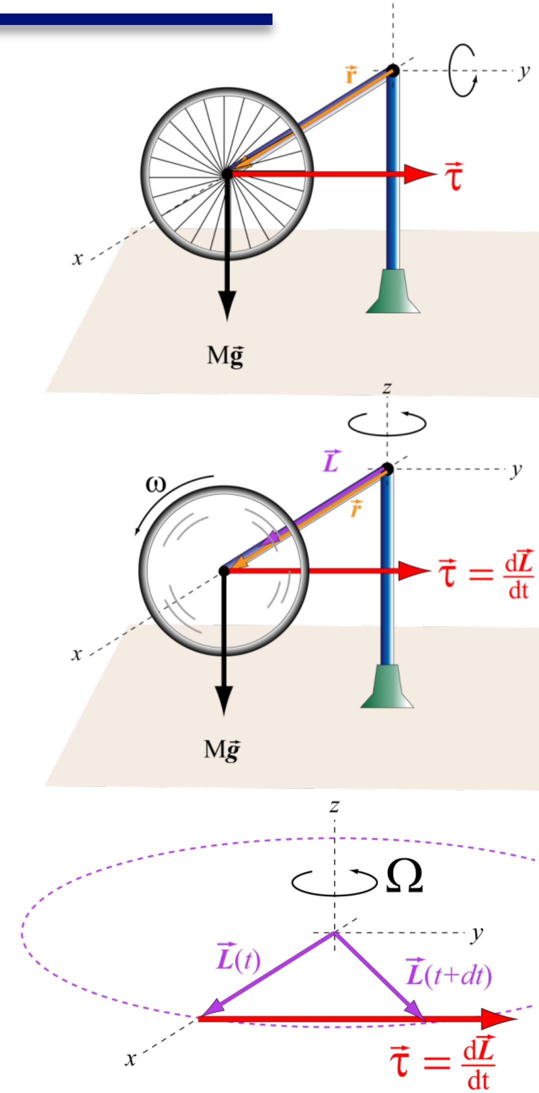
$$F_a = Mgsen\theta \frac{I_{CM}}{I_{CM}+MR^2} \leq \mu_e N = \mu_e Mg\cos\theta \;\therefore$$

$$\text{tg}\theta \leq \mu_e \frac{I_{CM}+MR^2}{I_{CM}} \equiv tg\theta_r$$

Ângulo máximo (limiar) para que haja rolamento sem deslizamento

# Precessão do momento angular

Se a roda tem uma velocidade angular $\omega$ grande, seu eixo gira em torno do eixo $z$, como veremos ( *movimento de precessão*).




O torque da força peso é:

$\vec{\tau} = \vec{r} \times M\vec{g}$ ( $\vec{\tau}$ é perpendicular ao eixo e $\therefore$ ao momento angular $\vec{L}$ da roda.

Como $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ , segue que $d\vec{L}$ é perpendicular a $\vec{L}$

Então o módulo de $\vec{L}$ não varia, e o que muda é apenas a sua direção.

# Precessão do momento angular

<u>Roda</u>

Temos: $dL = \tau dt = Mgrdt$ e da figura:

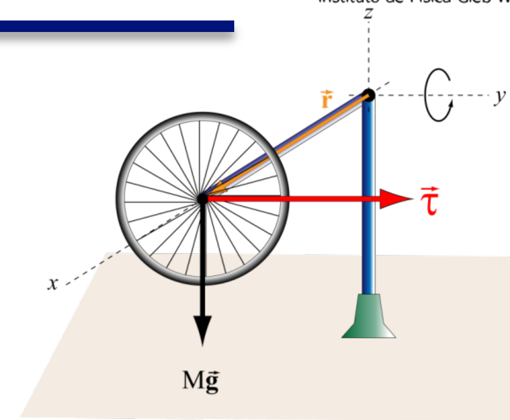
$dL = Ld\varphi = I\omega d\varphi \therefore$

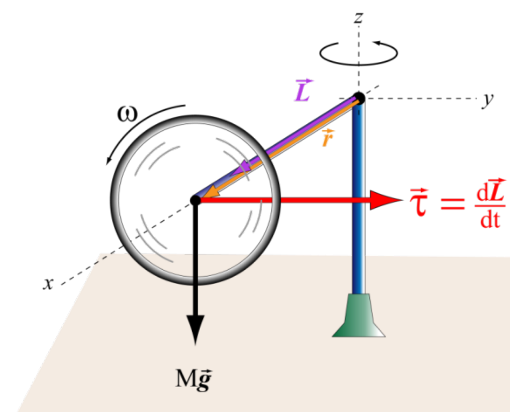
$$d\varphi = \frac{dL}{L} = \frac{Mgrdt}{I\omega}$$

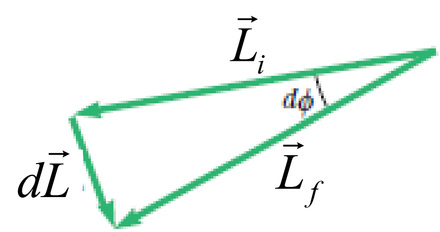
Velocidade angular de precessão:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{Mgr}{I\omega}$$

➡ Note que este resultado também é válido quando o eixo do giroscópio (roda) faz um ângulo diferente de zero com a horizontal (ver exemplo do pião, a seguir)



# Giroscópio


http://www.youtube.com/watch?v=8H98BgRzpOM

# Precessão do momento angular

## Pião

Módulo do torque da força peso:

$$\tau = Mgr\,sen\theta$$

Lei fundamental da dinâmica das rotações:

$$\Delta\vec{L} = \vec{\tau}\,\Delta t \Rightarrow \Delta L = Mgr\,sen\theta\Delta t$$

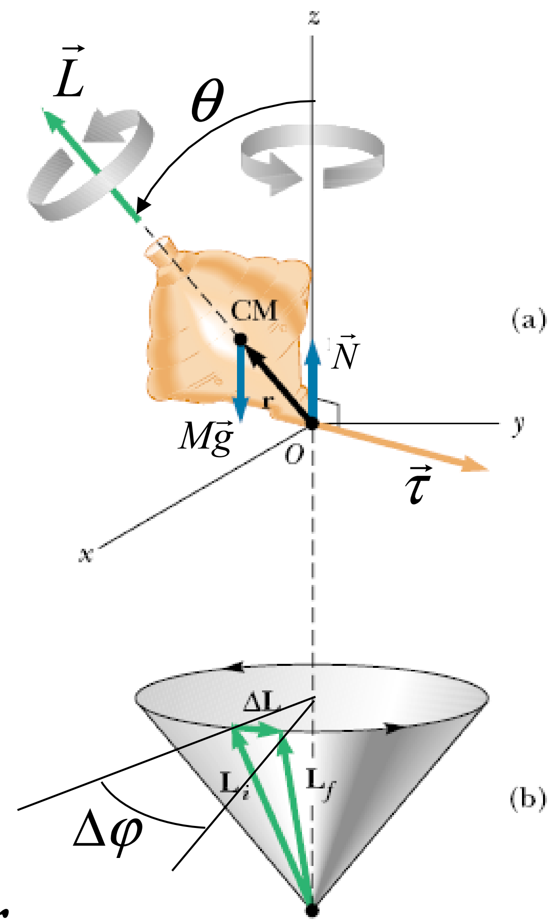
Da figura temos:

$$\Delta L = L\,sen\theta\Delta\varphi = I\omega\,sen\theta\Delta\varphi \;\therefore$$

$$Mgr\,sen\theta\Delta t = I\omega\,sen\theta\Delta\varphi$$

Velocidade angular de precessão:

$$\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{Mgr}{I\omega}$$



# Precessão do momento angular

O centro de massa do pião executa movimento circular com uma aceleração centrípeta

$$a_c = \Omega^2 r sen\theta$$

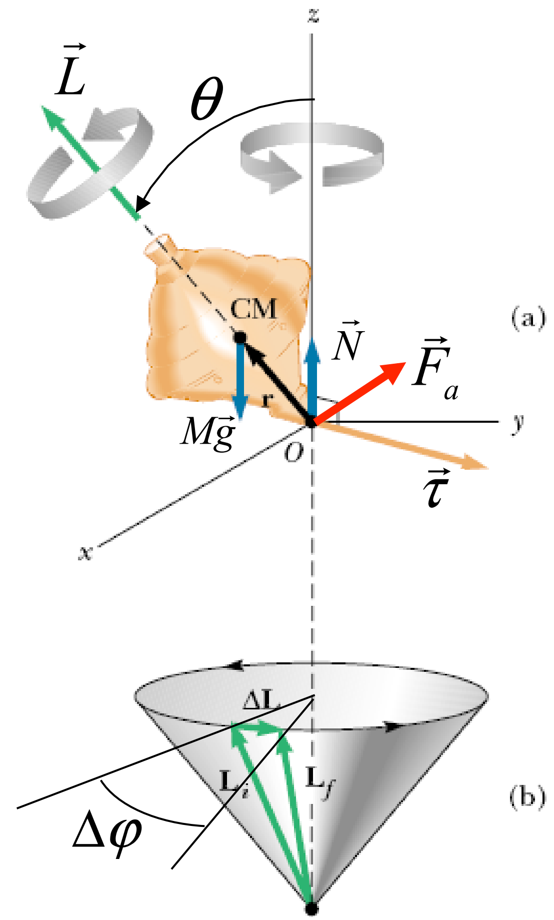
A força de atrito pião-piso é a responsável por esta aceleração

$$F_a = M\Omega^2 r sen\theta$$

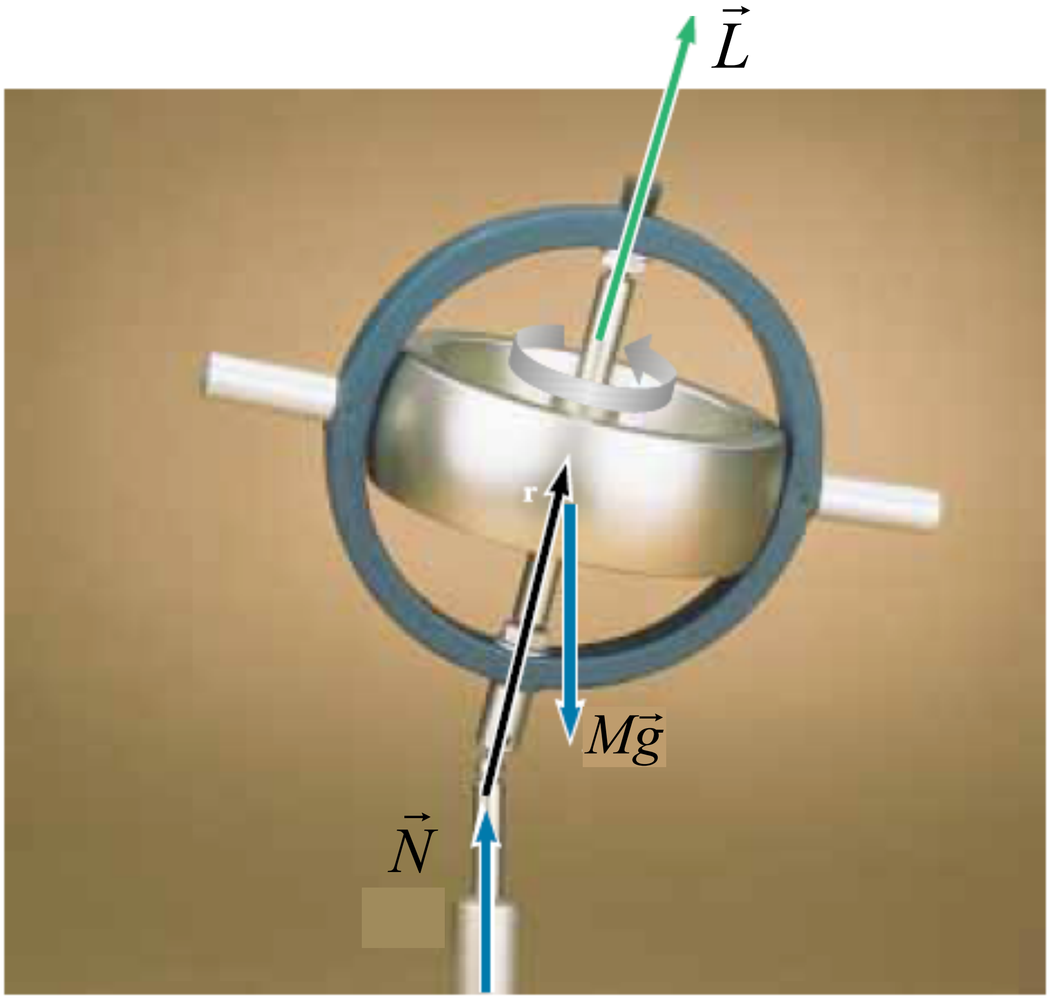
Como $\quad F_a \leq \mu M g$

$$sen\theta \leq \frac{\mu g}{\Omega^2 r}$$

para que a ponta do pião fique fixa e haja apenas movimento de rotação!

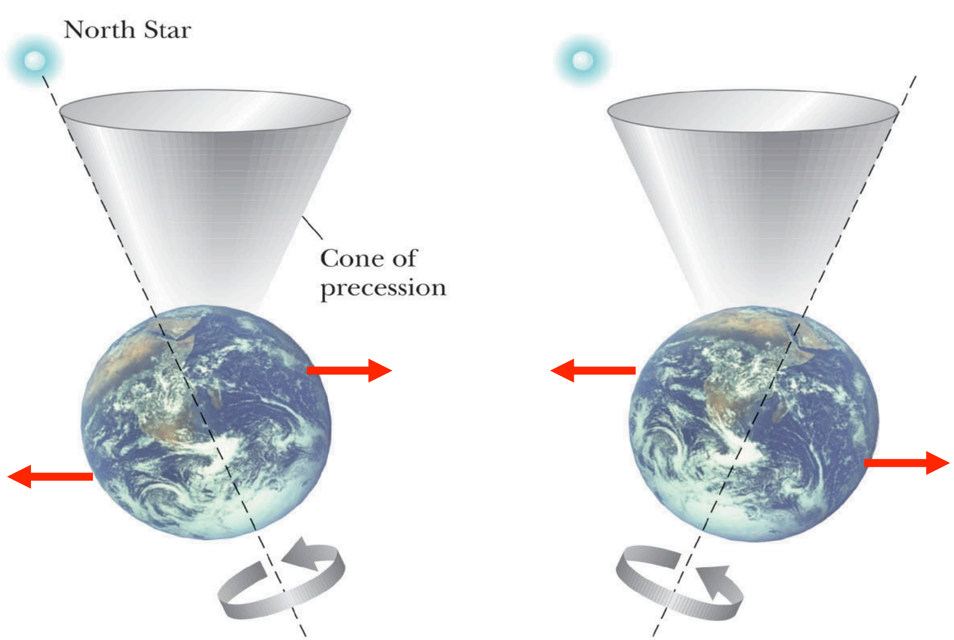


# Um giroscópio



# Precessão do momento angular

Como a Terra é um esferóide oblato (achatado nos polos), a Lua e o Sol provocam forças como as mostradas abaixo e em 13.000 anos o eixo de rotação sofre precessão de  meio período, como na figura.



# FIM! ☹