F-128 – Física Geral I

Aula exploratória-10B

UNICAMP – IFGW
username@ifi.unicamp.br

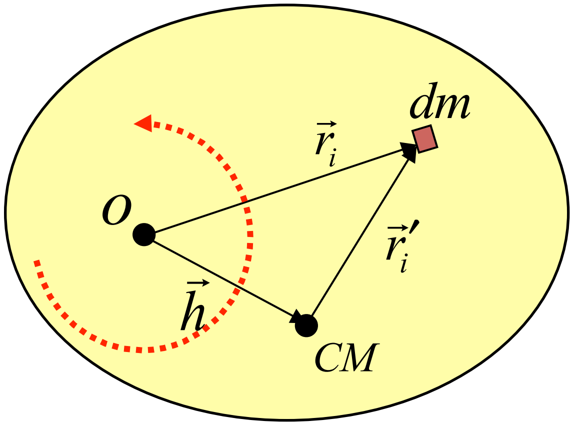
O teorema dos eixos paralelos

Se conhecermos o momento de inércia I_{CM} de um corpo em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa, podemos facilmente determinar I_O do corpo em relação a um eixo paralelo que passa por O.

De fato:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{h} \quad \Rightarrow r_i^2 = (\vec{r}_i' + \vec{h}) \cdot (\vec{r}_i' + \vec{h})$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i r_i'^2 + \sum_i m_i h^2 + 2\vec{h} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i'$$



Mas:

$$\vec{h} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \Rightarrow \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{h}) = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i' = 0$$

Então:

$$I_O = \sum_i m_i r_i^2 = I_{CM} + Mh^2$$ (teorema dos eixos paralelos)

Torque e a 2ª Lei de Newton da rotação

No plano perpendicular ao eixo de rotação:

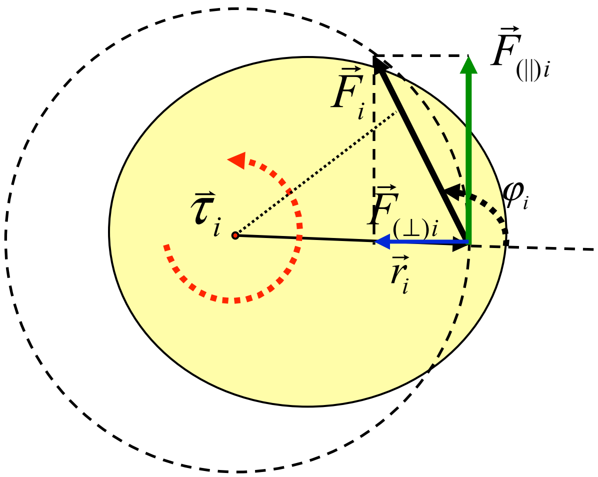
$$F_{(\|)i} = F_i \, sen\, \varphi_i = m_i r_i \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$r_i F_i \, sen\, \varphi_i = m_i r_i^2 \alpha$$

$$\Downarrow$$

Vetorialmente: $\vec{r}_i \times \vec{F}_i = m_i r_i^2 \vec{\alpha} \equiv \vec{\tau}_i$



<u>Definição</u>: $\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ é o torque da força externa $\vec{F}_i$ sobre a *i-ésima* partícula do corpo rígido (⊙ vetor saindo do plano do desenho)

No caso em que várias forças agem sobre a partícula, o torque total é:

$$\vec{\tau}_{res} = \sum_i \vec{\tau}_i = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\vec{\alpha} \equiv I\vec{\alpha}$$

Finalmente:

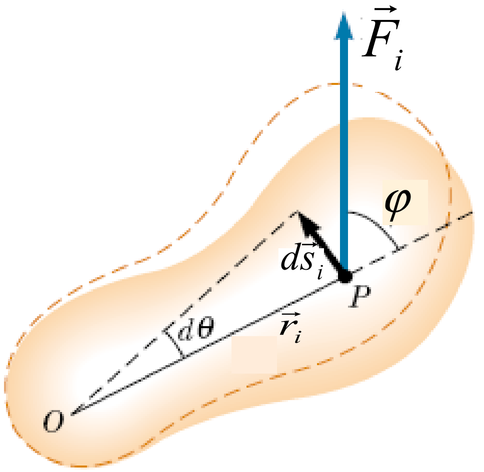
$$\boxed{\vec{\tau}_{res} = I\vec{\alpha}}$$

(2.ª lei de Newton da rotação)

O Trabalho no deslocamento angular

Seja uma força externa $\vec{F}_i$ aplicada a uma partícula no ponto P. O trabalho infinitesimal num deslocamento $ds_i = r_i d\theta$ é:

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = (F_i sen\varphi)\, r_i d\theta = \tau_i\, d\theta$$



($F_i sen\varphi$ é a componente tangencial de $\vec{F}_i$; a componente radial não trabalha). Então:

$$W = \sum_i \int \tau_i d\theta = \int \tau d\theta$$

Como $\tau = I\alpha$:

$$W = \int I\alpha d\theta = \int I \frac{d\omega}{dt} \omega dt$$

$$W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega d\omega = \frac{1}{2} I\,\omega_f^{\,2} - \frac{1}{2} I\,\omega_i^{\,2} = \Delta K$$ (teorema do trabalho-energia cinética na rotação)

Trabalho e potência no deslocamento angular

Usando a definição do momento de inércia:

$$W = \frac{1}{2} I\omega_f^{\,2} - \frac{1}{2} I\omega_i^{\,2} = \sum_k \frac{1}{2} m_k \rho_k^2 \omega_{kf}^{\,2} - \sum_k \frac{1}{2} m_k \rho_k^2 \omega_{ki}^{\,2}$$

$$= \sum_k \frac{1}{2} m_k v_{kf}^{\,2} - \sum_k \frac{1}{2} m_k v_{ki}^{\,2} = \Delta K$$

que é o teorema do trabalho-energia em sua forma usual.

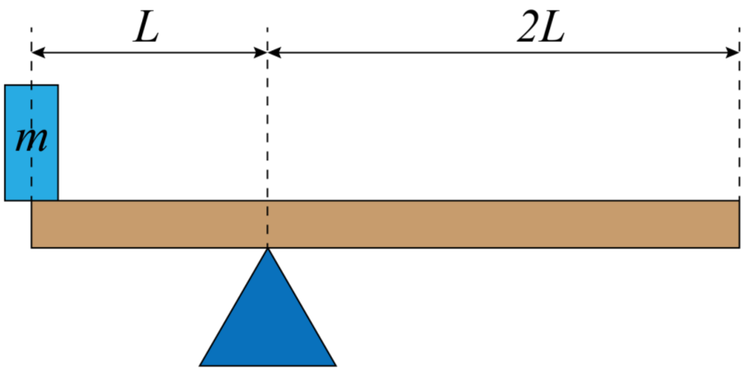
Potência: é a taxa com que se realiza trabalho:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \tau \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \tau \omega$$

Compare com $P = \dfrac{\Delta W}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$

Exercício 01

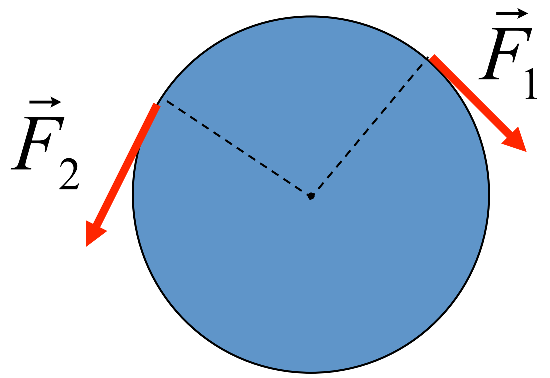
Qual deve se a massa da tábua no balanço da figura abaixo para que o sistema fique em equilíbrio? Neste caso qual a força exercida pelo apoio no balanço?



Exercício 02

A figura mostra um disco uniforme que pode girar em torno do centro, como um carrossel. O disco tem um raio de 2,0 cm e uma massa de 20,0 gramas e está inicialmente em repouso. A partir do instante t = 0, duas forças devem ser aplicadas tangencialmente à borda do disco para que, no instante t = 1,25 s, o disco tenha uma velocidade angular de 250 rad/s no sentido anti-horário. Se o módulo da força F_1 é 0,1 N, qual é o módulo F_2 ?

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{250\ \text{rad/s}}{1{,}25\ \text{s}} = 200\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$



$$\begin{cases} \sum \tau = I\alpha = \dfrac{MR^2}{2}\alpha = \dfrac{1}{2}20\times10^{-3}\times2\times10^{-2}\times200 = 8\times10^{-2}\ \text{N.m} \\ \sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = RF_2 - RF_1 = R(F_2 - F_1) \end{cases}$$

Resp: 0,14 N

Exercício 03

Uma chaminé alta, de forma cilíndrica, cai se houver uma ruptura na sua base. Tratando a chaminé como um bastão fino de altura *h*, e usando θ como sendo o ângulo que a chaminé ela faz com a vertical num instante qualquer, expresse, em função deste ângulo:

a) a velocidade angular da chaminé;

b) a aceleração radial do topo da chaminé;

c) a aceleração tangencial do topo;

d) em que ângulo a aceleração tangencial é igual a *g*?

Por conservação de energia teremos:

$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 - U_2$$

$$0 + mg\frac{h}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\frac{h}{2}\cos\theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{h}\left(1-\cos\theta\right)}$$

A única força que atua no sistema é o peso da chaminé, portanto o torque total é aquele produzido por esta força. Dessa forma a aceleração total será:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_t = h\alpha\hat{v} \\ \vec{a}_r = -\omega^2 h\hat{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_t = h\alpha = h\frac{\tau}{I} = h\frac{mgh/2\sin\theta}{mh^2/3} = \frac{3}{2}g\sin\theta \\ a_r = 3g\left(1-\cos\theta\right) \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}g\sin\theta = g \Rightarrow \theta = \arcsin\frac{2}{3} = 41.8^o$$

Resp:

a) $\omega = \sqrt{\frac{3g}{h}(1-\cos\theta)}$

b) 3g(1-cos θ)

c) 3/2 gsen θ

d) 41,8º

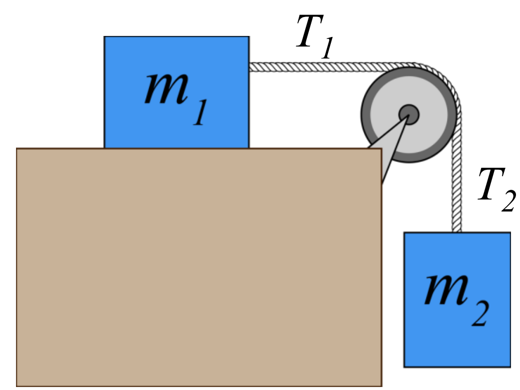
Exercício 04

Na figura, dois blocos estão ligados por uma corda de massa desprezível que passa por uma polia de 2,4 cm de raio e momento de inércia de 7,4 x 10^{-4} kg.m^2. A corda não escorrega na polia; não se sabe se existe atrito entre a mesa e o bloco que escorrega; não há atrito no eixo da polia. Quando este sistema é liberado a partir do repouso, a polia gira 1,3 rad em 91 ms e a aceleração dos blocos é constante. Considere a massa do bloco m_2=6,2 kg e determine:

a) o módulo da aceleração angular da polia;

b) o módulo da aceleração de cada bloco;

c) as tensões $\boldsymbol{T_1}$ e $\boldsymbol{T_2}$.



Como a polia gira 1,3 rad em 91 ms com aceleração constante, então a aceleração angular é:

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \alpha\frac{t^2}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\Delta\theta}{t^2} = 314\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Como a aceleração angular é constate e a corda não escorrega na polia então:

$$a = \alpha R \Rightarrow a = 314 \times 2.4 \times 10^{-2} = 7.54\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Para o corpo dependurado teremos: $-T_2 + mg = ma$, portanto

$$T_2 = m(g-a) = 6.2 \times (10 - 7.54) = 15.3 \text{ N}$$

A aceleração angular da polia é dada pelo torque total aplicado a mesma, assim:

$$RT_1 - RT_2 = -I\alpha \Rightarrow T_1 = T2 - \frac{I\alpha}{R} = 5.6 \text{ N}$$

Resp:

a) α = 314 rad/s^2

b) a = 7,54m/s^2

c) T_1 = 5,6 N; T_2 = 15,3 N

Exercício 05 - Extra

Um disco uniforme de massa M = 2,5 kg e raio R = 0,20 m é montado sobre um eixo horizontal fixo, sem atrito. Uma corda de massa desprezível enrolada na borda do disco suporta um bloco de massa 1,2 kg. Supondo que o disco partiu do repouso, calcule:

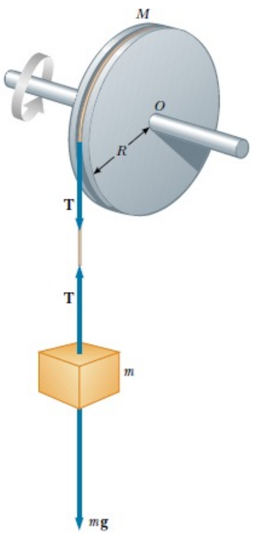
a)a aceleração linear do bloco em queda;

b)a tração na corda;

c)aceleração angular do disco;

d)o trabalho realizado pelo torque aplicado ao disco em 2,0 s;

e)o aumento da energia cinética de rotação do disco.



Considerando a segunda lei de Newton para as forças e torques teremos:

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ TR = I\alpha = I\dfrac{a}{R} \end{cases}$$

Portanto:

$$a = \frac{2m}{2m+M} g = 4.9 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R} = 24.5 \text{ rad/s}^2$$

$$T = \frac{M}{2m+M} mg = 6.1 \text{ N}$$

$$\Delta K = W = \int \tau \, d\theta = \tau \Delta\theta = RT\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) = 60 \text{ J}$$

Resp:

a) a = 4,9 m/s^2

b) T= 6,1 N

c) α = 24.5 rad/s^2

d) W = 60 J

e) ΔK = 60 J