

Aula-5

Capacitância

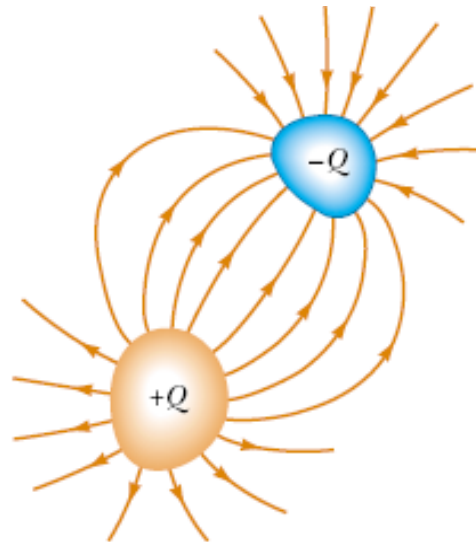
Curso de Física Geral F-328
1º semestre, 2013



Capacitância

Capacitores

Dois condutores carregados com cargas $+Q$ e $-Q$ e isolados, de formatos arbitrários, formam o que chamamos de um *capacitor*.

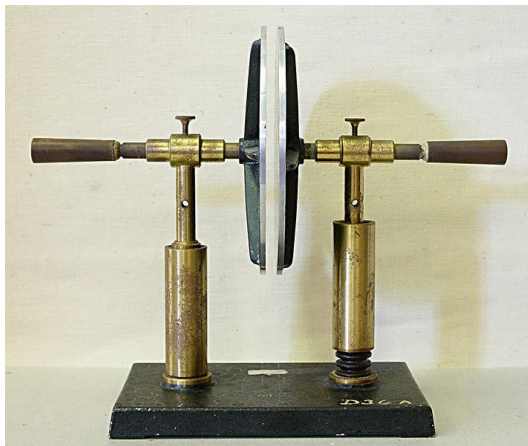


A sua principal utilidade é *armazenar energia potencial* no *campo elétrico* por ele formado.

História - Garrafa de Leiden e bateria

Quatro capacitores carregados formando uma “bateria”.
Esse sistema foi usado por **Daniel Gralath** para *armazenar energia potencial* no *campo elétrico* existente no interior dos capacitores - 1756.

[Daniel Bernoulli](#) e [Alessandro Volta](#) mediram a força entre placas de um capacitor, e [Aepinus](#) em 1758 foi quem supôs que ela era uma lei de inverso do quadrado. (Em 1785 - Lei de Coulomb).

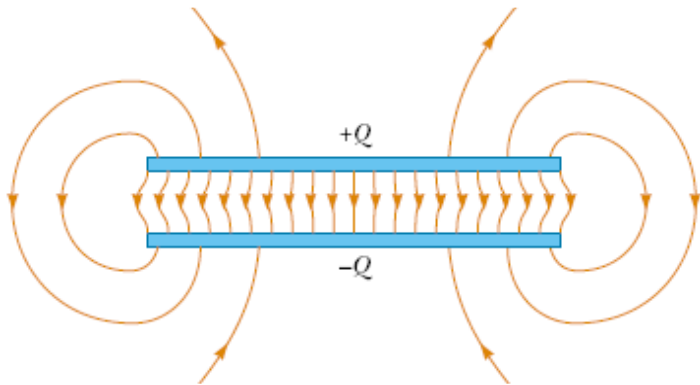
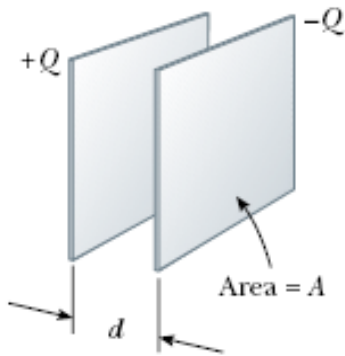


Réplica do sistema de Gralath existente no museu de Ciência da Cidade de Leiden (Holanda).

Capacitância

Capacitores

O capacitor mais convencional é o de *placas paralelas*. Em geral, dá-se o nome de *placas do capacitor (ou armaduras)* aos condutores que o compõem, independentemente das suas formas.



Capacitor de placas paralelas



Outros capacitores

Capacitância

Capacitores

Como as placas do capacitor são condutoras, elas formam *superfícies equipotenciais*. A carga nas placas é proporcional à diferença de potencial entre elas, ou seja:

$$Q = CV ,$$

onde C é a chamada *capacitância* do capacitor. Então:

$$C = \frac{Q}{V}$$

A constante C depende apenas da *geometria* do capacitor. No SI a capacitância é medida em *farads* (F).

$$1 \text{ farad} = 1\text{F} = 1 \text{ coulomb/volt} = 1\text{C/V}$$

$$1 \mu\text{farad} = 10^{-6}\text{F}$$

Importante: $\epsilon_0 = 8,85 \text{ pF/m}$

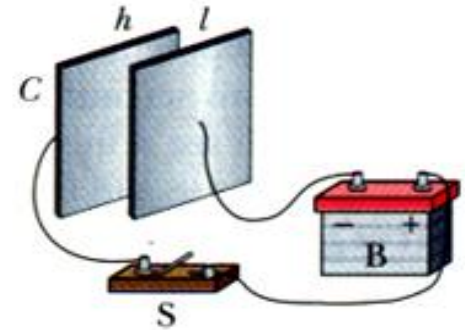
Capacitância

Carregando o capacitor

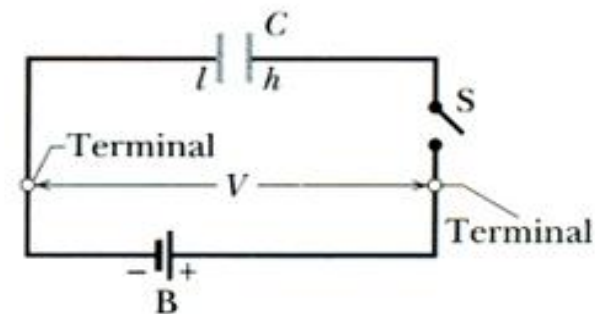
Podemos carregar um capacitor ligando as suas placas a uma bateria que estabelece uma diferença de potencial fixa, V , ao capacitor. Assim, em função de

$$Q = CV,$$

cargas Q e $-Q$ irão se acumular nas placas do capacitor estabelecendo entre elas uma diferença de potencial $-V$ que se opõe à diferença de potencial da bateria e faz cessar o movimento de cargas no circuito.



(a)



(b)

Cálculo da Capacitância

Esquema de cálculo

Em geral, os capacitores que usamos gozam de alguma simetria, o que nos permite calcular o campo elétrico gerado em seu interior através da lei de Gauss:

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

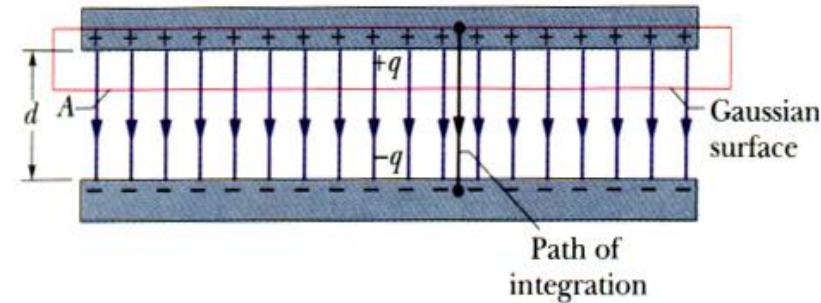
De posse do campo elétrico, podemos calcular a diferença de potencial entre as duas placas como:

$$V = V_f - V_i = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

E, finalmente, usamos o resultado anterior em $Q = CV$, de onde podemos extrair C .

Capacitância

Capacitor de placas paralelas



$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

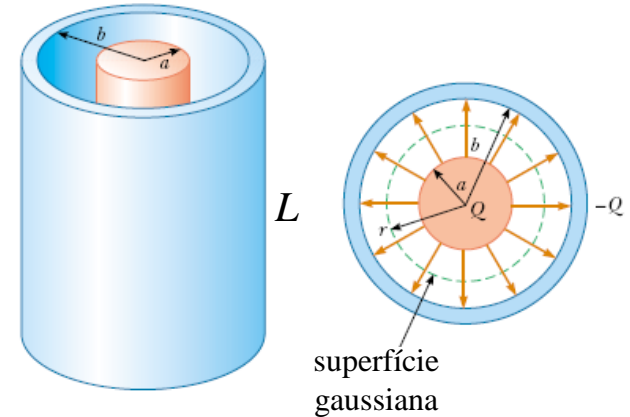
$$V_f - V_i = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \quad \longrightarrow \quad V = Ed$$

$$q = CV \quad \longrightarrow \quad C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Nota-se que a capacitância é proporcional a um comprimento e só depende de *fatores geométricos* do capacitor.

Capacitor cilíndrico

$$(L \gg b)$$



$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$



$$E = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L r}$$

$$V_f - V_i = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$



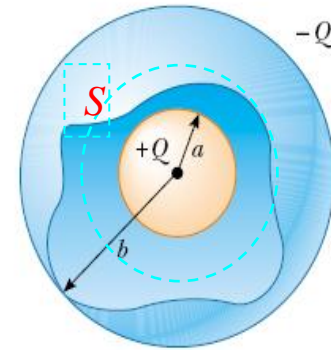
$$V = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$Q = CV$$



$$C = 2\pi \epsilon_0 \frac{L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Capacitor esférico



$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$



$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$V_f - V_i = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$



$$V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{b-a}{ab}$$

$$Q = CV$$



$$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

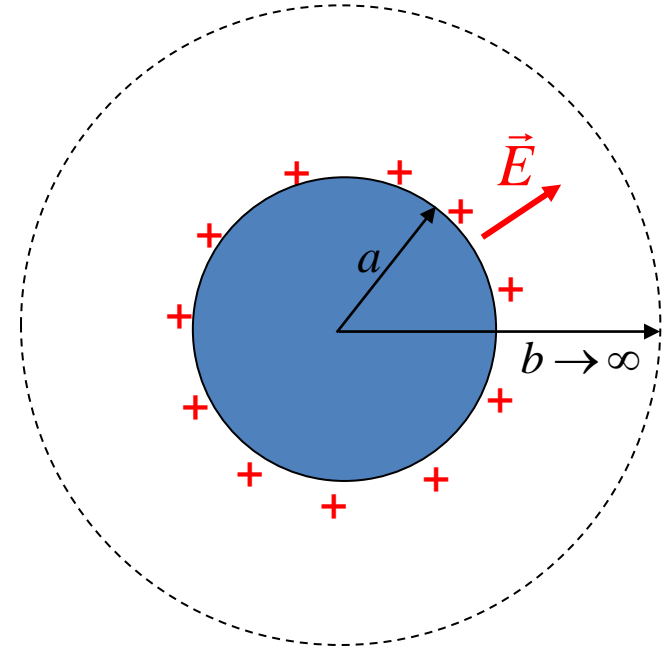
Capacitância

Esfera isolada ($R = a$)

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} = 4\pi\epsilon_0 \frac{a}{1 - \frac{a}{b}}$$

↓ $b \rightarrow \infty$

$$C = 4\pi\epsilon_0 a$$



Exemplo numérico:

$$R=1\text{m} , \epsilon_0 = 8,85 \text{ pF/m} \longrightarrow C \approx 1,1 \times 10^{-10} \text{ F}$$

Capacitância

Associação de capacitores em paralelo

$$q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V \quad \text{e} \quad q_3 = C_3 V$$

$$q = q_1 + q_2 + q_3 \Rightarrow q = (C_1 + C_2 + C_3)V$$

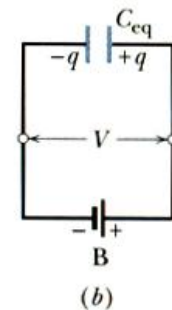
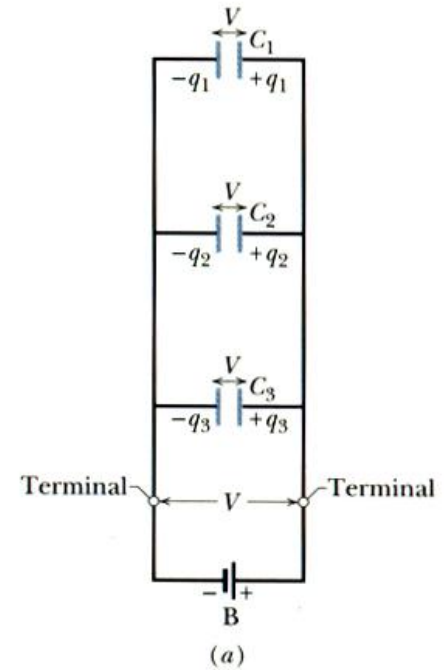
Como $q = C_{eq} V$



$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

ou

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$



Capacitância

Associação de capacitores em série

$$q = C_1 V_1, \quad q = C_2 V_2 \quad \text{e} \quad q = C_3 V_3$$

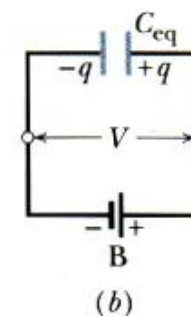
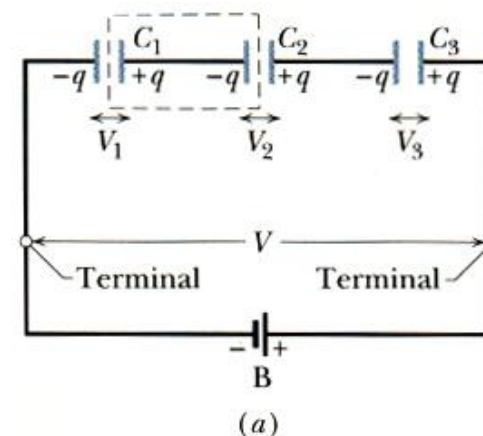
$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$$

Como $V = \frac{q}{C_{eq}}$:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

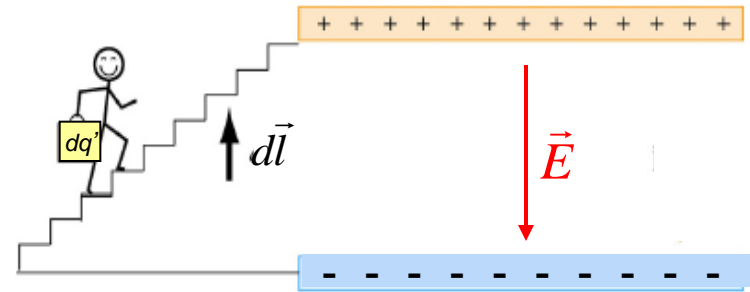
ou

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$



Energia armazenada no campo elétrico

Um agente externo deve realizar trabalho para carregar um capacitor. Este trabalho fica armazenado sob a forma de energia potencial na região do campo elétrico entre as placas.



Suponha que haja q' e $-q'$ armazenadas nas placas de um capacitor. O trabalho para se deslocar uma carga elementar dq' de uma placa para a outra é então:

$$dW = V' dq' = \frac{q'}{C} dq' \longrightarrow W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}$$

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2$$

Energia no capacitor

Densidade de energia

$$u = \frac{\text{energia potencial}}{\text{volume}}$$

Em um capacitor de placas paralelas sabemos que:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \text{e} \quad V = Ed$$



$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} E^2 d^2$$



$$u \equiv \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

(Apesar de a demonstração ter sido feita para o capacitor de placas paralelas, esta **fórmula é sempre válida!**)

Uma nova visão de U

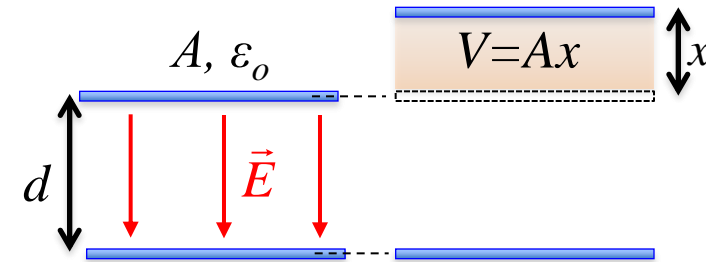
a) Qual é o trabalho W necessário para aumentar em x a separação das placas?

- É a energia adicional que aparece no volume Ax , que antes não existia. Então:

$$\begin{aligned} W = U = uAx &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 Ax = \\ &= \frac{1}{2} E Ax \varepsilon_0 \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = \frac{1}{2} QE x \end{aligned}$$

b) Qual é a força de atração entre as placas?

- Como $W = Fx \longrightarrow F = \frac{1}{2} QE$



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

Capacitores com dielétricos

Ao colocarmos um material dielétrico entre as placas de um capacitor, se Q é mantida constante, V *diminui* e se V é mantido constante, a carga das placas *umenta*.

Como $Q=CV$, ambas as situações são compatíveis com o fato de que o dielétrico entre as placas *faz a capacitância aumentar*.

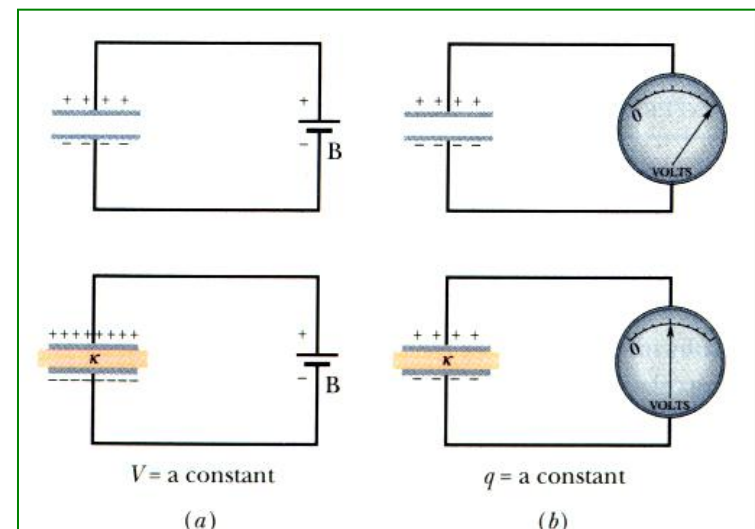
Vimos: $C_0 = \epsilon_0 \mathcal{L}$

onde \mathcal{L} tem dimensão de comprimento.

Então, na presença de um dielétrico preenchendo *totalmente* o capacitor:

$$C_d = \kappa \epsilon_0 \mathcal{L} = \kappa C_0, \text{ onde } \kappa > 1$$

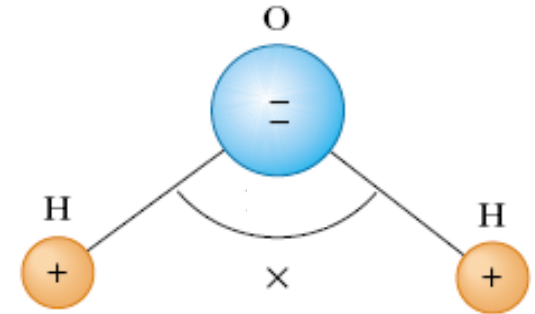
No vácuo, $\kappa = 1$



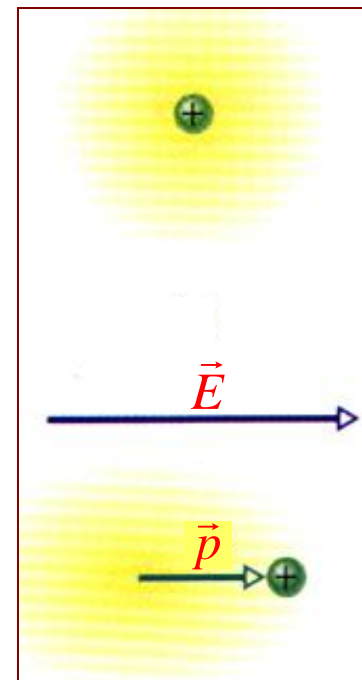
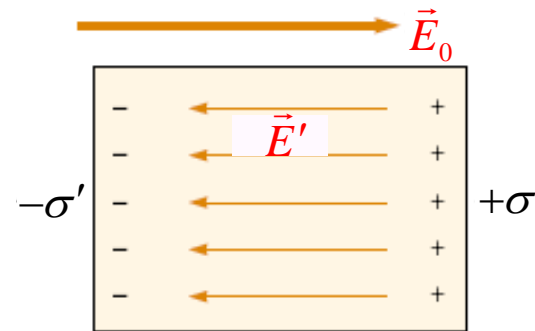
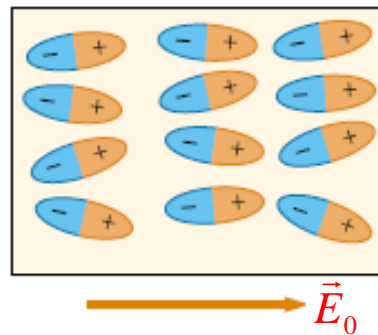
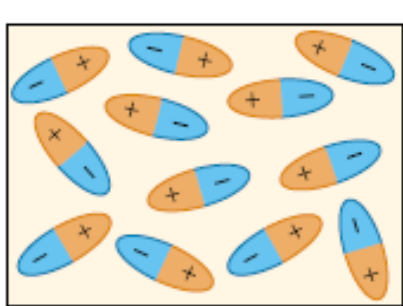
Dielétricos

Visão atômica

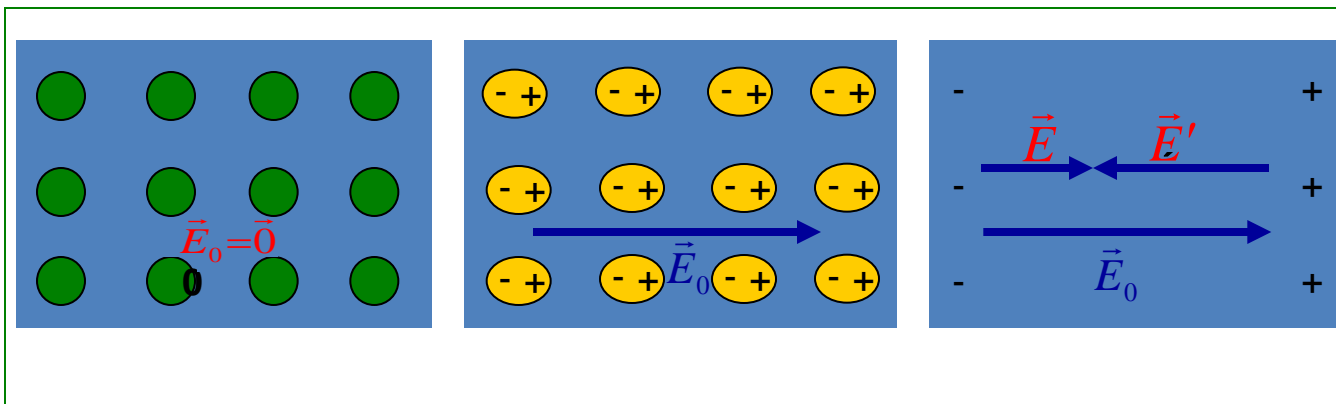
Dielétricos são materiais *isolantes* que podem ser *polares* ou *não-polares*.



um dielétrico polar: molécula de água



um dielétrico não-polar



Dielétricos

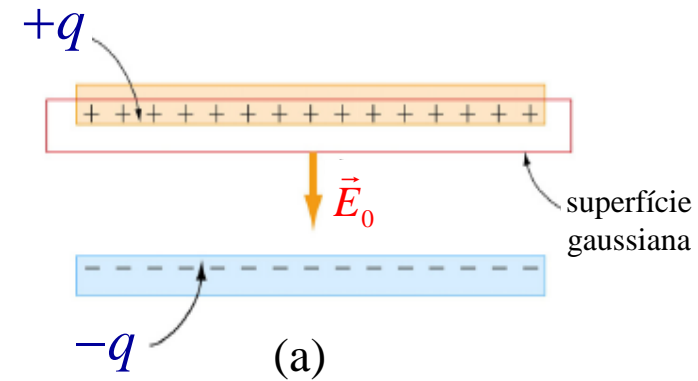
Material	Constante dielétrica	Resistência Dielétrica (kV/mm)
Ar (1 atm)	1,00054	3
Poliestireno	2,6	24
Papel	3,5	16
Pirex	4,7	14
Porcelana	6,5	5,7
Silício	12	
Etanol	25	
Água (20°)	80,4	
Água (25°)	78,5	

Lei de Gauss com Dielétricos

$$(a): \oint \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q}{\epsilon_0} \longrightarrow E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

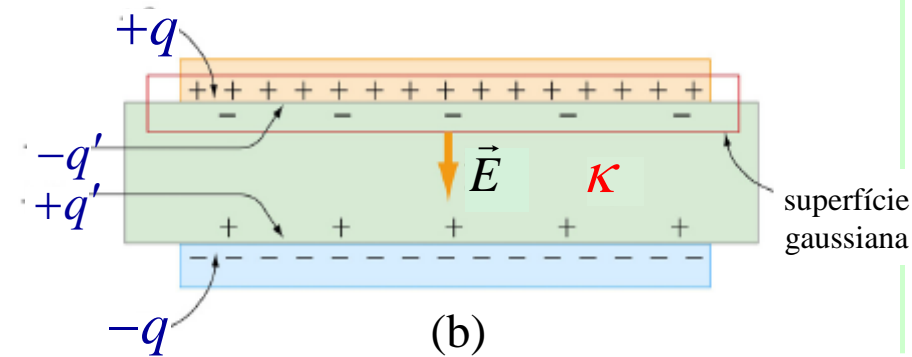
$$(b): \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q - q'}{\epsilon_0} \longrightarrow E = \frac{q - q'}{\epsilon_0 A}$$

Mas $E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{q}{\kappa \epsilon_0 A} = \frac{q - q'}{\epsilon_0 A} \therefore q - q' = \frac{q}{\kappa}$



Em (b): $\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q}{\kappa \epsilon_0}$

Ou: $\oint_A \vec{D}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = q$,



onde $\vec{D}(\vec{r}) \equiv \kappa \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})$ é o vetor de deslocamento elétrico.

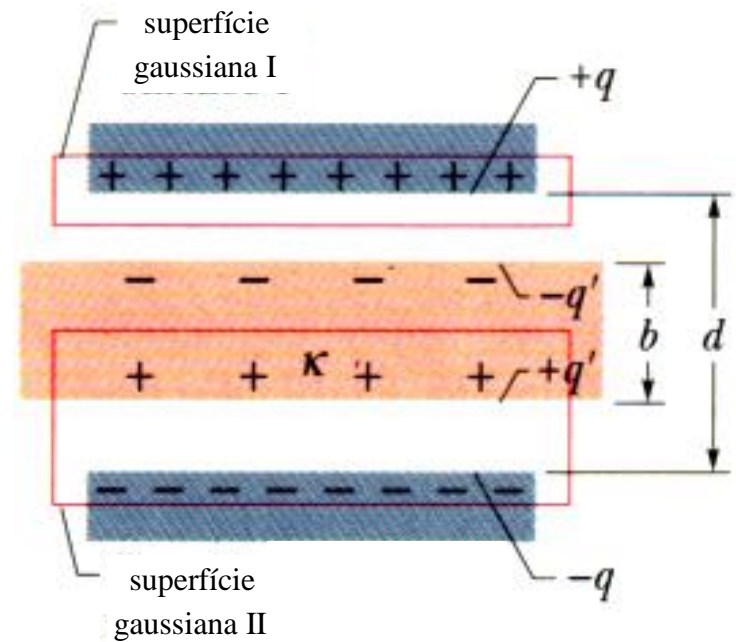
Então, na lei de Gauss expressa com o vetor \vec{D} , aparecem apenas as *cargas livres* (das placas).

Exemplo

Capacitor de placas paralelas com $A=115 \text{ cm}^2$, $d=1,24 \text{ cm}$,
 $V_0=85,5 \text{ V}$, $b=0,78 \text{ cm}$, $\kappa=2,61$.

Calcule:

- C_0 sem o dielétrico;
- a carga livre nas placas;
- o campo E_0 entre as placas e o dielétrico;
- o campo E_d no dielétrico;
- a ddp V entre as placas na presença do dielétrico;
- A capacitância C com o dielétrico.



Lista de exercícios do Capítulo 25

Os exercícios sobre **Lei de Gauss** estão na página da disciplina :
(<http://www.ifi.unicamp.br>).

Consultar: **Graduação → Disciplinas → F 328-Física Geral III**

Aulas gravadas:

<http://lampiao.ic.unicamp.br/weblectures> (Prof. Roversi)

ou

[UnivespTV e Youtube](#) (Prof. Luiz Marco Brescansin)