# Aula-10
# Indução e Indutância

Curso de Física Geral F-328

2º semestre, 2013

Instituto de Física Gleb Wataghin

# Indução

Aprendemos que:

Uma espira condutora percorrida por uma corrente $i$ na presença de um campo magnético sofre ação de um torque:

espira de corrente + campo magnético → torque

Será que...

Uma espira sem corrente ao girar no interior de uma região onde há um campo magnético $B$, faz aparecer uma corrente $i$ na espira? Isto é:

torque + campo magnético → corrente?

# Experimentos de Faraday

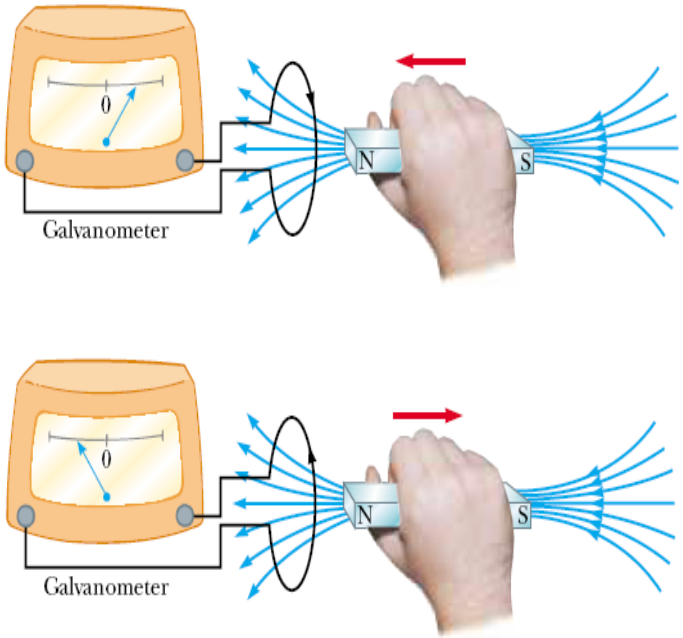
As respostas a essas questões foram dadas por Faraday. Ele observou que o *movimento relativo* de um conjunto de ímãs e circuitos metálicos fechados fazia aparecer nestes últimos *correntes transientes*.

Primeiro experimento:

Espira conectada a um galvanômetro – não há bateria! Observa-se que:

1- se houver movimento relativo ímã-espira, aparecerá uma corrente no galvanômetro;

2- quanto mais rápido for o movimento relativo, maior será a corrente na espira.



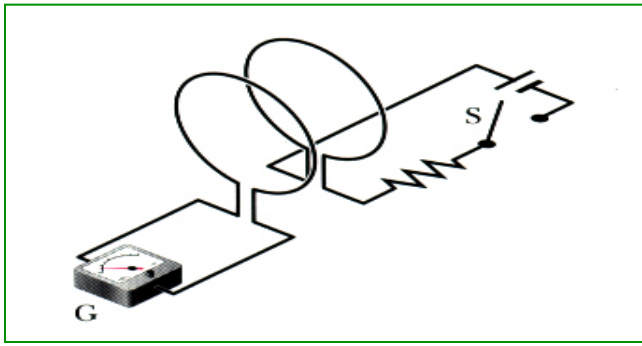

corrente induzida

# Experimentos de Faraday

Segundo experimento:

Figura ao lado: duas espiras condutoras próximas uma da outra, mas sem se tocarem.

Fechando-se *S* (para ligar a corrente na espira da direita) aparece um pico momentâneo de corrente no galvanômetro *G*.




Abrindo-se *S* (para desligar a corrente), aparece um pico momentâneo de corrente no galvanômetro, no sentido oposto à da anterior.

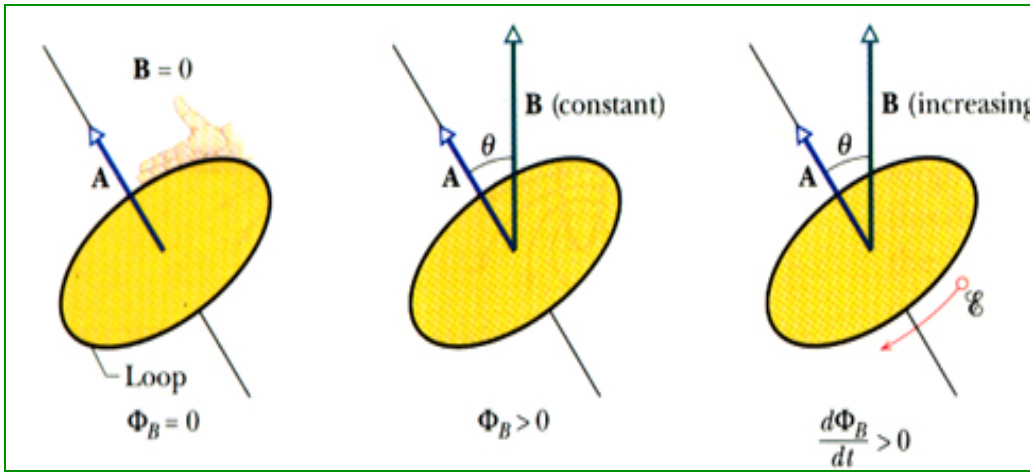
Embora não haja movimento das espiras, temos uma corrente induzida ou uma *força eletromotriz induzida* (*fem*).

Nesta experiência, uma *fem* é induzida na espira somente quando o campo magnético que a atravessa estiver variando.

# A Lei de Faraday da Indução

Fluxo do campo magnético:

$$\phi_B = \int_S \vec{B}.\hat{n}\, dA$$




A unidade SI para fluxo é o *weber* (Wb)

1weber = 1Wb = 1T.m$^2$

A intensidade da *fem* induzida $\mathcal{E}$ é igual à taxa de variação temporal do *fluxo do campo magnético* :

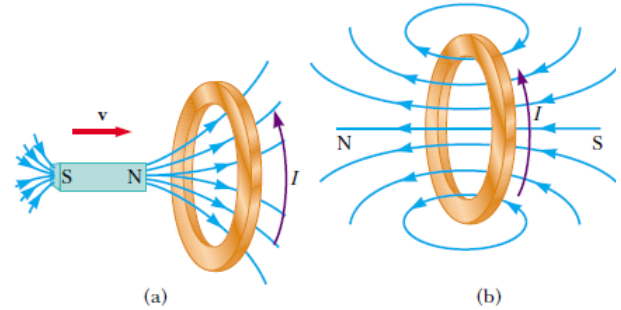
$$\varepsilon = -\frac{d\varphi_B}{dt} \quad \text{(Lei de Faraday)}$$

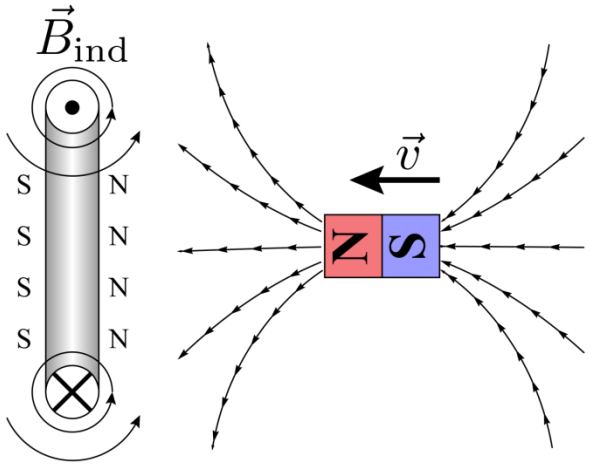
O *sinal negativo* indica que a *fem* deve se *opor* à *variação* do fluxo que a produziu.

# A Lei de de Lenz

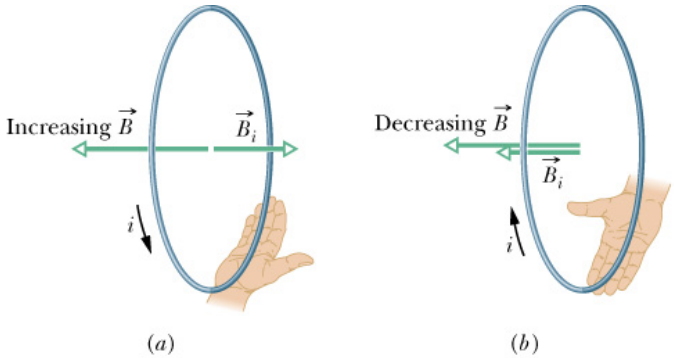
*O sentido da corrente induzida é tal que o campo que ela produz se opõe à variação do fluxo magnético que a produziu.*

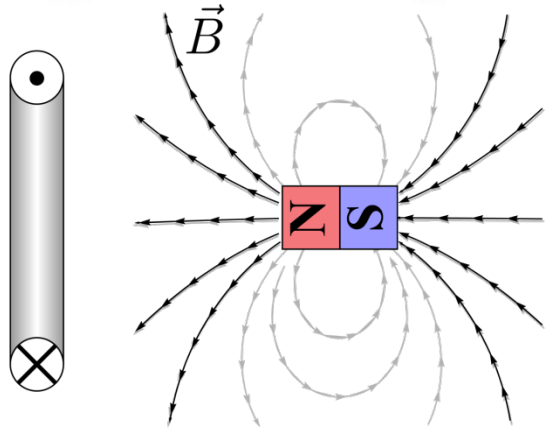
## Oposição ao movimento



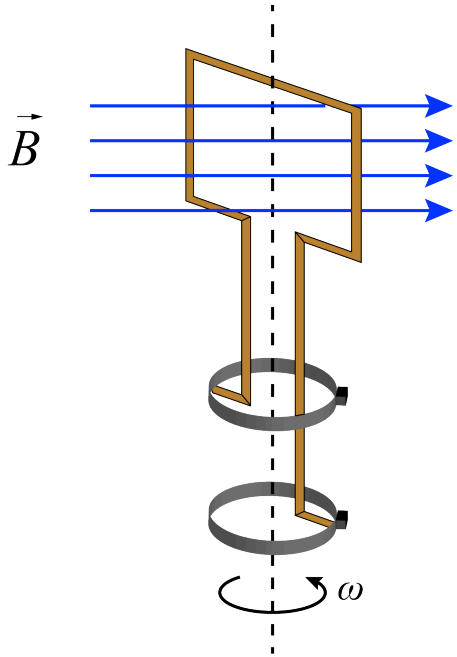




## Oposição à variação do fluxo



# Indução e gerador de corrente senoidal



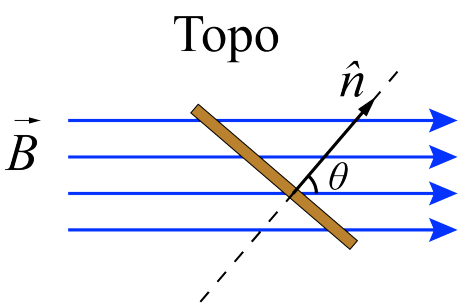

Espira sendo rodada numa região de campo $\vec{B}$ com velocidade angular $\omega$ constante.
Como $\phi_B = \phi_B(t)$, aparece uma *fem* induzida na espira. Temos:

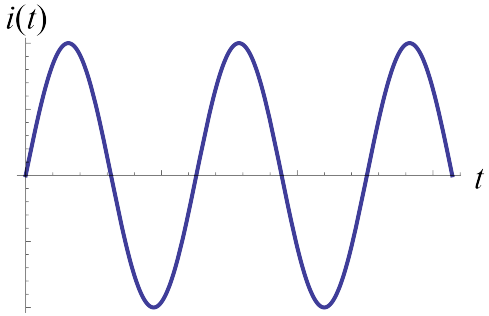
$$\phi_B = \int_S \vec{B}.\hat{n}\,dA = \int_S B\cos\theta\,dA$$

$$\phi_B = Bab\cos\theta \;\; ; \theta = \theta_0 + \omega t. \quad Se\ \theta_0 = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \omega t$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = Bab\omega\,\mathrm{sen}\,(\omega t)$$

$$i(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R} = \frac{Bab\omega}{R}\mathrm{sen}\,(\omega t)$$



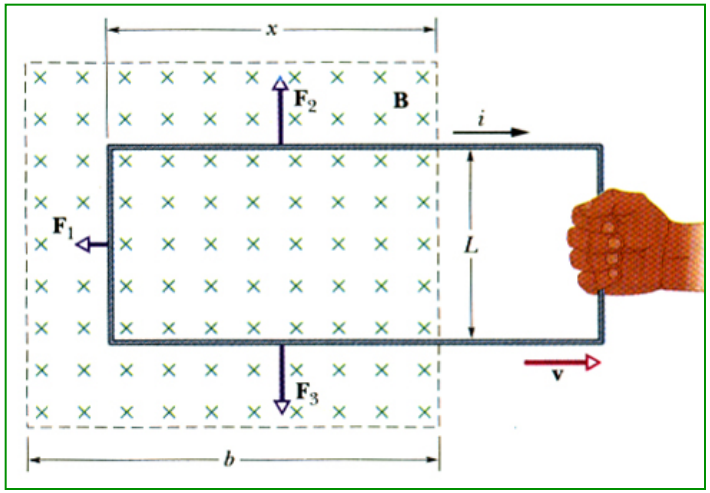




$\therefore$ uma corrente que varia senoidalmente com $t$.

# Indução e transferência de energia

Espira sendo deslocada para direita com velocidade constante $\vec{v}$.

Como o fluxo está diminuindo, aparece uma *fem* e portanto uma corrente induzida na espira.




$$\phi_B = BLx \;\Rightarrow\; \varepsilon = BLv \;\therefore$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BLv}{R} \quad \text{(sentido horário)}$$

Forças sobre a espira:

$\vec{F}_{apl}$ (não mostrada), $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$

$v$ = constante $\Rightarrow$ $\vec{F}_{ap} + \vec{F}_1 = \vec{0}$ ou $F_{ap} = F_1 = iLB = \dfrac{B^2L^2v}{R}$

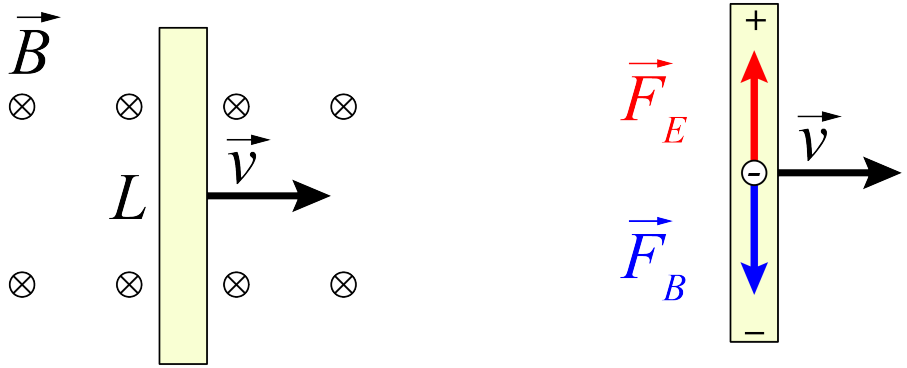
Potência aplicada: $P_{ap} = \vec{F}_{ap} \cdot \vec{v} = F_{ap}\, v = \dfrac{B^2L^2v^2}{R}$

Taxa de aparecimento de energia térmica na espira:

$$P = Ri^2 = \left(\frac{BLv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2L^2v^2}{R} \quad \text{(igual à potência aplicada)}$$

# Força de Lorentz e *fem* induzida

Barra metálica movendo-se transversalmente numa região de campo $\vec{B}$ com velocidade $\vec{v}$ constante.




$$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B} \quad \text{e} \quad \vec{F}_E = q\vec{E} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

No equilíbrio, a força elétrica é oposta à força magnética:

$$q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} = 0 \;\Rightarrow\; E = vB$$

Por outro lado, temos que:

$$\varepsilon = \int_{+}^{-} \vec{E}\cdot d\vec{l} = BLv$$

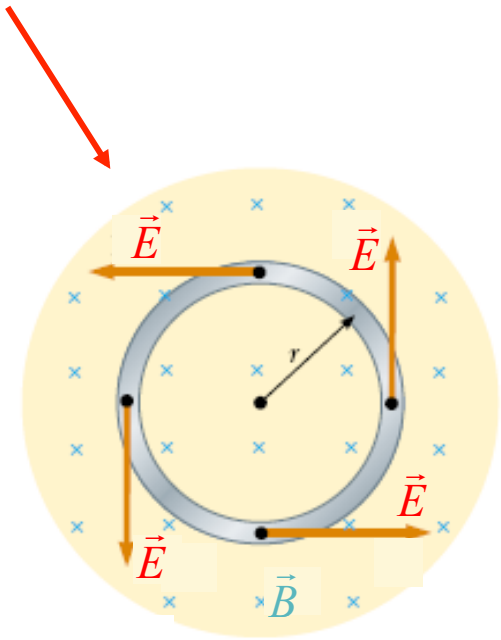
# Campos elétricos induzidos

Seja um anel de cobre de raio *r* numa região onde há um campo magnético variável no tempo (com módulo crescendo à taxa *dB/dt*).

A variação temporal de *B* faz aparecer uma corrente no anel. Portanto, aparece um campo elétrico induzido no anel.

Pode-se então dizer que: *um campo magnético variável com o tempo produz um campo elétrico* (*Lei de Faraday reformulada*).

$$\boxed{\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow E}$$




As linhas do campo elétrico induzido são tangentes ao anel, formando um conjunto de circunferências concêntricas.

# Campos elétricos induzidos

Trabalho sobre uma partícula com carga $q_0$ , movendo-se ao redor de uma circunferência de raio $r$:

$$\Delta W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \text{(ou: } \Delta W = q_0 E.2\pi r\text{)}$$

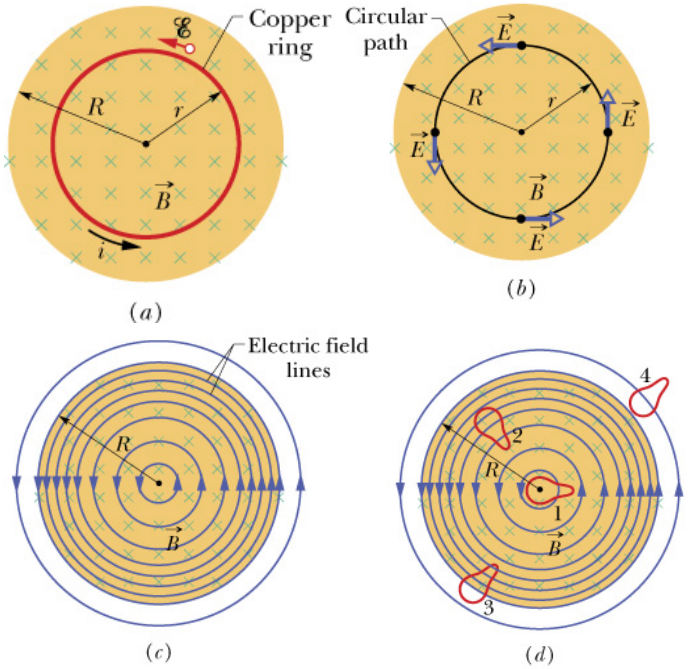
Mas, também:

$$\Delta W = q_0 \varepsilon \quad (\varepsilon = \text{fem induzida})$$

Então: $$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ou:

$$\oint \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (Lei\ de\ Faraday)$$




➡ *Note que não se pode associar um potencial elétrico ao campo elétrico $\vec{E}$ induzido!*

# Exemplo 2

Para a figura do slide anterior, adotar $dB/dt = 0{,}13$ T/s e $R = 8{,}5$ cm. Determinar as expressões da intensidade do campo elétrico induzido para $r < R$ e $r > R$ . Obtenha os valores numéricos para $r = 5{,}2$ cm e $r = 12{,}5$ cm .

a) <u>$r < R$:</u>

$$\oint \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \Rightarrow E(2\pi r) = (\pi r^2)\frac{dB}{dt} \Rightarrow E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

Para $r$ =5,2 cm: $$E = \frac{5{,}2\times10^{-2}\,m}{2}(0{,}13T/s) = 3{,}4mV/m$$

b) <u>$r > R$:</u>

$$\oint \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \Rightarrow E(2\pi r) = \pi R^2\frac{dB}{dt} \Rightarrow E = \frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}$$

Para $r$ =12,5 cm:

$$E = \frac{(8{,}5\times10^{-2}\,m)^2}{2\times12{,}5\times10^{-2}\,m}(0{,}13T/s) = 3{,}8mV/m$$

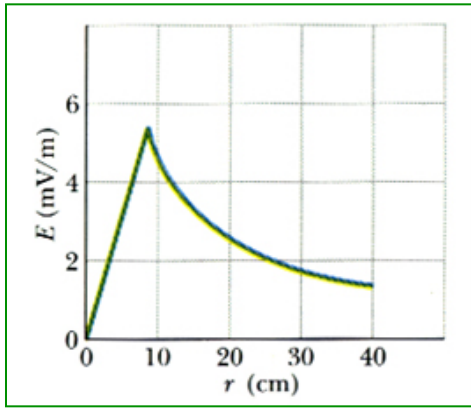



Gráfico de $E(r)$

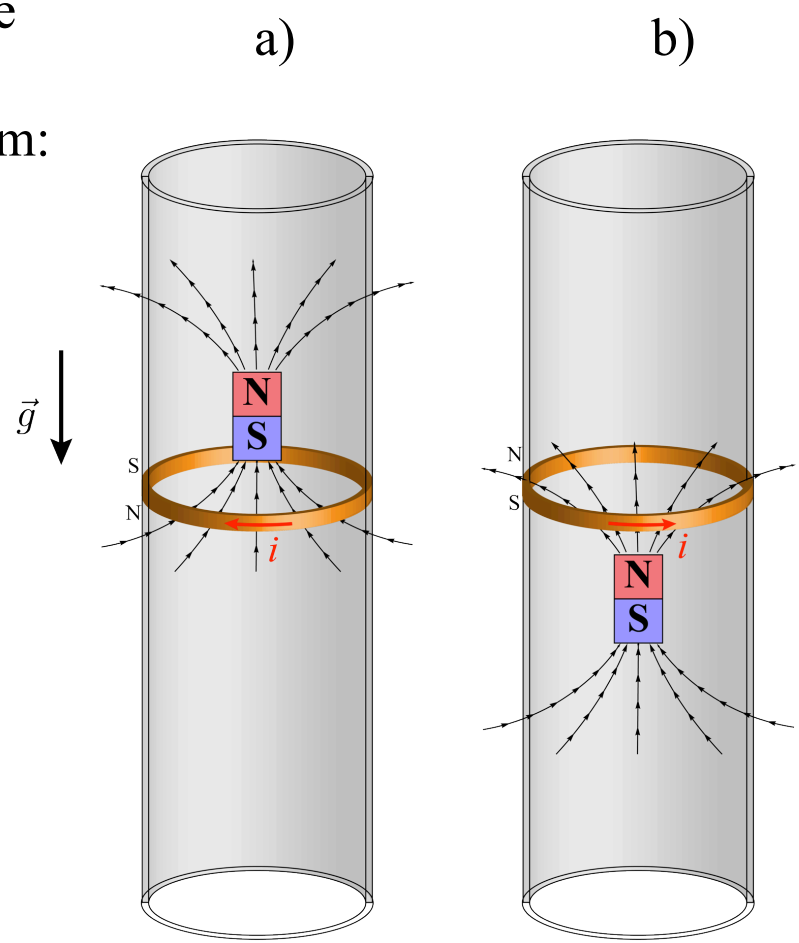
# Freio Magnético

Um magneto em queda livre dentro de um tubo atinge uma velocidade terminal devido ao campo induzido por uma corrente nas paredes do tubo.

Uma dada secção transversal do tubo pode ser vista como uma pequena espira. Durante a queda do magneto duas situações se apresentam:

a) magneto se aproxima da "espira"

b) magneto se afasta da "espira"




Em ambos os casos a Lei de Faraday e a Lei de Lenz nos ensinam que aparecerá uma força magnética induzida no magneto apontando para cima.

⇩

**Freio magnético**

# Auto-indutância

Consideremos uma bobina de $N$ voltas, chamada de *indutor*, percorrida por uma corrente $i$ que produz um fluxo magnético $\phi_B$ através de todas as espiras da bobina. Se $i = i(t)$, pela lei de Faraday aparecerá nela uma *fem* dada por:

$$\varepsilon_L = -\frac{d(N\phi_B)}{dt} \qquad (N\phi_B = \text{fluxo concatenado})$$

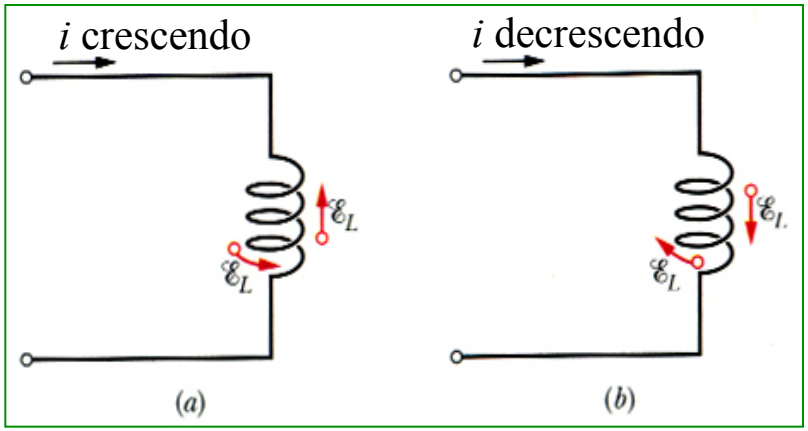
Na ausência de materiais magnéticos, $N\phi_B$ é proporcional à corrente:

$$N\phi_B = Li \quad \text{ou:} \quad \boxed{L = \frac{N\phi_B}{i}} \qquad (L\text{: auto-indutância})$$

Então:

$$\varepsilon_L = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

(*fem* auto-induzida)




O sentido de $\varepsilon_L$ é dado pela lei de Lenz: ela deve se *opor* à *variação* da corrente que a originou (figura).

# Indutância de um solenoide

Solenoide longo de comprimento $l$ e área $A$:

$$N\phi_B = (nl)(BA)$$

Lembrando que neste caso $B$ é dado por $B=\mu_0 in$, da definição de indutância tem-se:

$$L = \frac{N\phi_B}{i} = \frac{(nl)(\mu_0 ni)(A)}{i} = \mu_0 n^2 lA$$

($L$ só depende de fatores geométricos do dispositivo e do meio).

$$\boxed{\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A}$$ (Indutância por unidade de comprimento)

A unidade SI de indutância é o henry:

$$1\,\text{henry} = 1\,\text{H} = 1\,\text{T}\cdot\text{m}^2/\text{A} = 1\,\text{W}_\text{b}/\text{A}$$

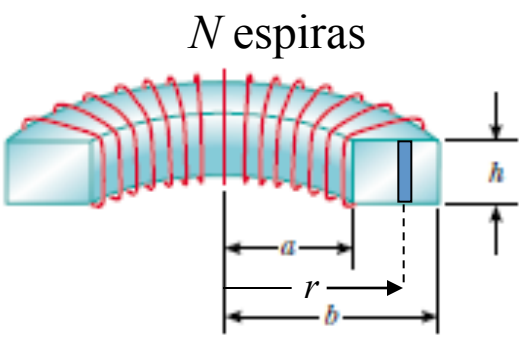
# Indutância de um toroide

Vimos que o campo magnético no interior de um toroide é:

$$B = \frac{N\mu_0 i}{2\pi r}$$

$$\phi_B = \int \vec{B}.\hat{n}\,dA = \int Bhdr = \int_a^b \frac{\mu_0 iNhdr}{2\pi r} =$$

$$= \frac{\mu_0 iNh}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

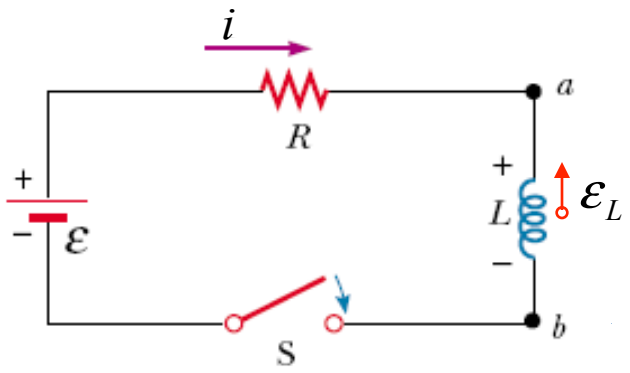



Então:

$$L = \frac{N\phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

# Circuito RL

Circuitos *RL* são aqueles que contêm *resistores e indutores*. Neles, as correntes e os potenciais variam com o tempo. Apesar das fontes (*fem*) que alimentam estes circuitos serem independentes do tempo, a introdução de indutores provoca efeitos dependentes do tempo. Estes efeitos são úteis para controle do funcionamento de máquinas e motores.




Circuito básico para analisar correntes em um indutor.

a) Fechando-se a chave *S*, no instante $t = 0$, estabelece-se uma corrente crescente no resistor .

$$t=0 \;\Rightarrow\; i(0)=0 \;\rightarrow\; t\neq 0 \;\Rightarrow\; i(t)$$

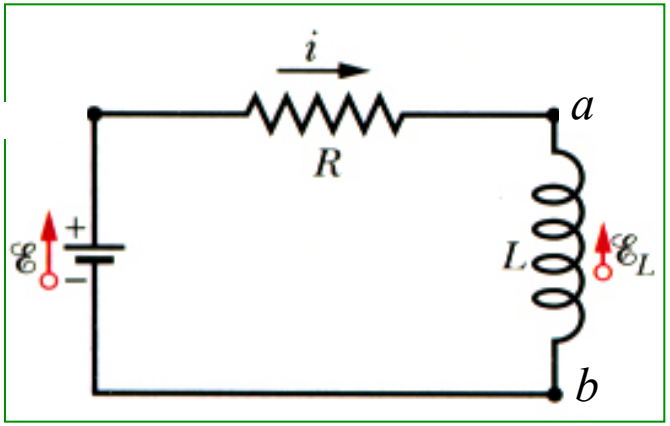
Resolver (estudar) este circuito é encontrar a expressão para a corrente $i(t)$ que satisfaça à equação:

$$\varepsilon - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$$

# Circuito RL

A equação anterior fica:

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{\varepsilon}{L}$$




$\varepsilon_L$ : voltagem no indutor

Resolvendo esta equação diferencial para $i(t)$, vamos ter:

$$i(t)=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-Rt/L}) \Rightarrow i(t)=I(1-e^{-t/\tau_L}), \quad \text{onde}$$

$$\tau_L=\frac{L}{R} \quad \text{e} \quad I=\frac{\varepsilon}{R}$$

( $\tau_L$ : constante de tempo *indutiva*)

($I$ : corrente máxima, assintótica)

Para $t$ muito grande, a corrente atinge um valor máximo constante, como se o indutor fosse um fio de ligação comum.

# Circuito RL

Voltagens no resistor e no indutor – figura abaixo

$$V_R = Ri \quad \text{e} \quad V_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \longrightarrow V_L = \varepsilon e^{-Rt/L}$$

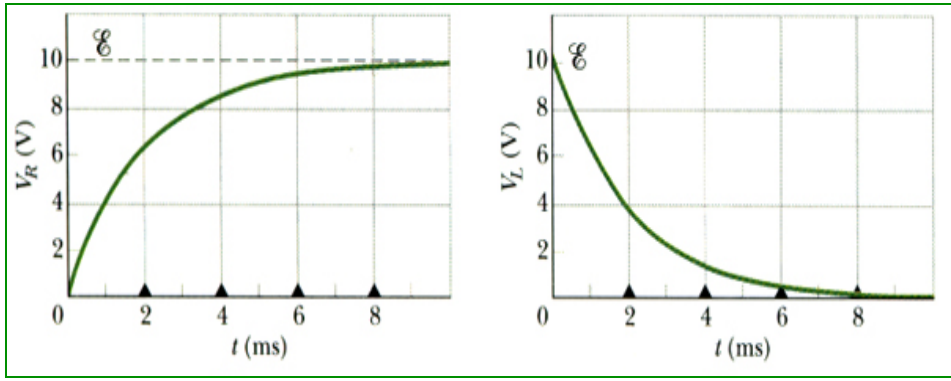
$t=0,\ V_L = \text{máximo} \rightarrow$ equivalente a um circuito aberto

$t >> \tau_L,\ V_L = 0 \rightarrow$ equivalente a um curto–circuito

Interpretação de $\tau_L$:

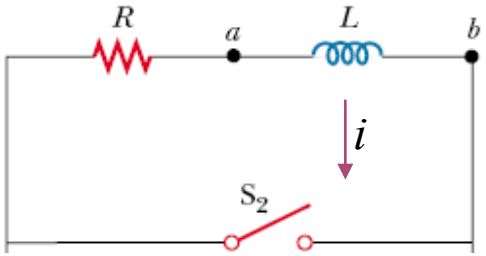
Para $t = \tau_L = \dfrac{L}{R}$:

$$\begin{cases} i = \dfrac{\varepsilon}{R}(1-e^{-1}) = 0{,}63\dfrac{\varepsilon}{R} \\ V_L = \varepsilon e^{-1} = 0{,}37\varepsilon \end{cases}$$



# Circuito RL

b) Fechando-se a chave $S_2$: neste caso, a equação das quedas de potencial será:

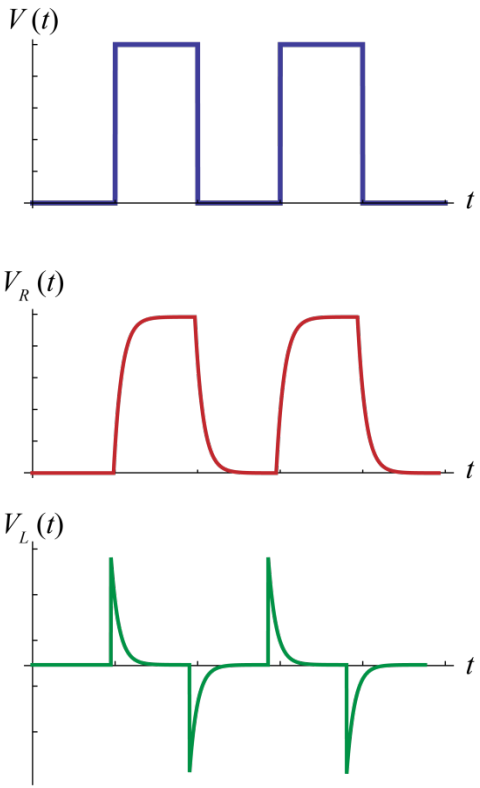



$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

A solução desta equação é:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-Rt/L} = I_0 e^{-t/\tau_L}$$

Variações das voltagens com o tempo:




Ao lado, temos gráficos das tensões Em $V_L$, $V_R$ e $V_R+V_L=\varepsilon$ para várias situações a) e b).

# Energia armazenada no campo magnético

Do circuito abaixo tem-se:

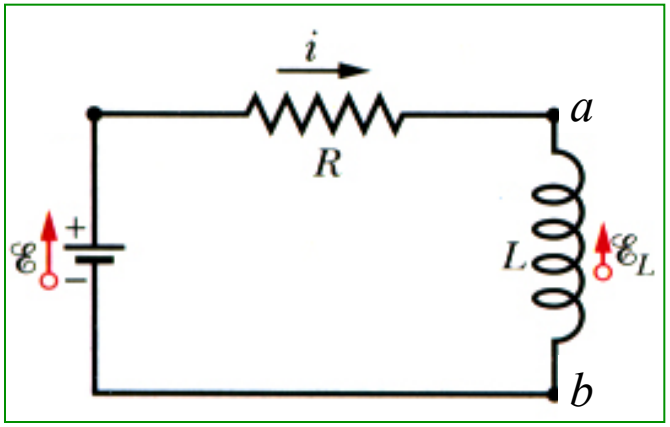
$$\varepsilon = Ri + L\frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad \varepsilon i = Ri^2 + Li\frac{di}{dt}$$

Os termos $\varepsilon i$, $Ri^2$ e $Lidi/dt$ são, respectivamente, a potência fornecida pela bateria, a potência dissipada no resistor e a taxa com que a energia $U_B$ é armazenada no campo magnético do indutor, isto é:

$$\frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt} \rightarrow dU_B = Lidi$$

$$\int_0^{U_B} dU_B = \int_0^i Lidi$$

$$\boxed{U_B = \frac{1}{2}Li^2}$$



# Densidade de energia do campo magnético

É a energia por unidade de volume armazenada em um ponto qualquer do campo magnético. Consideremos o campo magnético de um solenoide longo de comprimento $l$ e seção transversal $A$, transportando uma corrente $i$.

A densidade de energia será dada por:

$$u_B = \frac{U_B}{Al} = \frac{1}{2}\frac{Li^2}{Al}$$

Como $L = \mu_0 n^2 lA \rightarrow u_B = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 i^2$

Lembrando que $B = \mu_0 in$ resulta que:

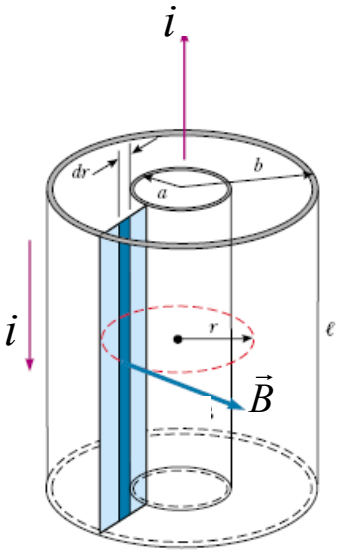
$$\boxed{u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$ (densidade de energia magnética)

# Exemplo 3

Cabo coaxial de raios $a$ e $b$. Os cilindros interno e externo transportam correntes iguais em sentidos opostos. Determine:

a) a energia magnética $U_B$ armazenada no campo entre os cilindros ao longo de um comprimento $l$ do cabo;

b) $U_B$ por unidade de comprimento, se $a = 1{,}2$ mm, $b = 3{,}5$ mm e $i = 2{,}7$ A.




Da lei de Ampère tem-se:

$$\begin{cases} B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}, \; a < r < b \\ B = 0, \; r > b \end{cases}$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}$$

a) $$U_B = \int dU_B = \int u_B dV = \int_a^b \frac{\mu_0 i^2 \, 2\pi r l dr}{8\pi^2 r^2} \Rightarrow U_B = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

b) $$\frac{U_B}{l} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\text{H/m})(2{,}7\text{A})^2}{4\pi} \ln \frac{3{,}5\text{mm}}{1{,}2\text{mm}}$$

$$= 7{,}8 \times 10^{-7}\,\text{J/m} = 780\,\text{nJ/m}$$

# Indutância mútua

Fluxos conectados: variação de fluxo da bobina 1 produz uma *fem* na bobina 2 e vice-versa.

Indução mútua $L_{21} \rightarrow M_{21}$ $\boxed{M_{21} = \dfrac{N_2 \phi_{21}}{i_1}}$

$$\boxed{M_{21} i_1 = N_2 \phi_{21} \quad ou \quad N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}}$$

A *fem* induzida na bobina 2: $\varepsilon_2 = -M_{21} \dfrac{di_1}{dt}$

A *fem* induzida na bobina 1: $\varepsilon_1 = -M_{12} \dfrac{di_2}{dt}$

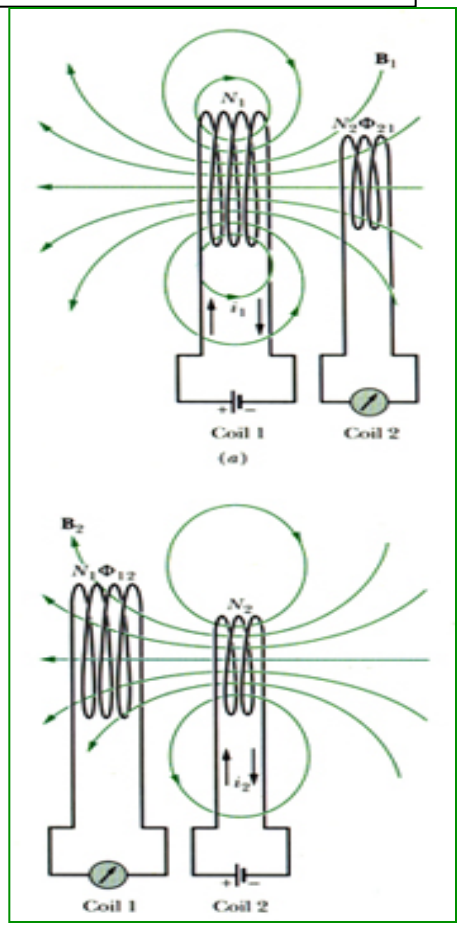
Pode-se provar que:

$$\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$$

A indução é de fato mútua

$$\varepsilon_1 = -M \frac{di_2}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -M \frac{di_1}{dt}$$



# Exemplo 4

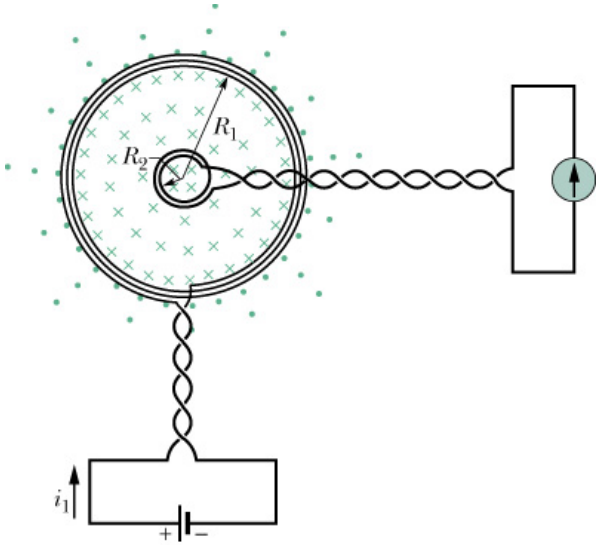
Duas bobinas circulares compactas, a menor delas (raio $R_2$ e $N_2$ voltas) sendo coaxial com a maior (raio $R_1$ e $N_1$ voltas) e no mesmo plano. Suponha $R_1 >> R_2$ .

a) deduzir uma expressão para a indutância mútua deste arranjo ;

b) Qual o valor de $M$ para $N_1 = N_2 = 1200$ voltas, $R_2 = 1{,}1$ cm e $R_1 = 15$ cm?

a) $$\phi_{21} = B_1 A_2 \rightarrow N_2 \phi_{21} = N_2 B_1 A_2$$

$$B_1 = N_1 \frac{\mu_0 i_1}{2R_1} \Rightarrow N_2 \phi_{21} = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 R_2^{\,2}}{2R_1} i_1$$




Então:

$$M_{21} = \frac{N_2 \phi_{21}}{i_1} = M \Rightarrow M = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 R_2^{\,2}}{2R_1}$$

b) $$M = \frac{\pi (4\pi \times 10^{-7} H/m)(1200)(1200)(0{,}011 m)^2}{2 \times (015 m)} = 2{,}29 mH$$

# Indução e indutores - Geral

Para dois ou mais circuitos próximos, a variação das correntes em cada um deles produz campos e fluxos magnéticos nos demais.

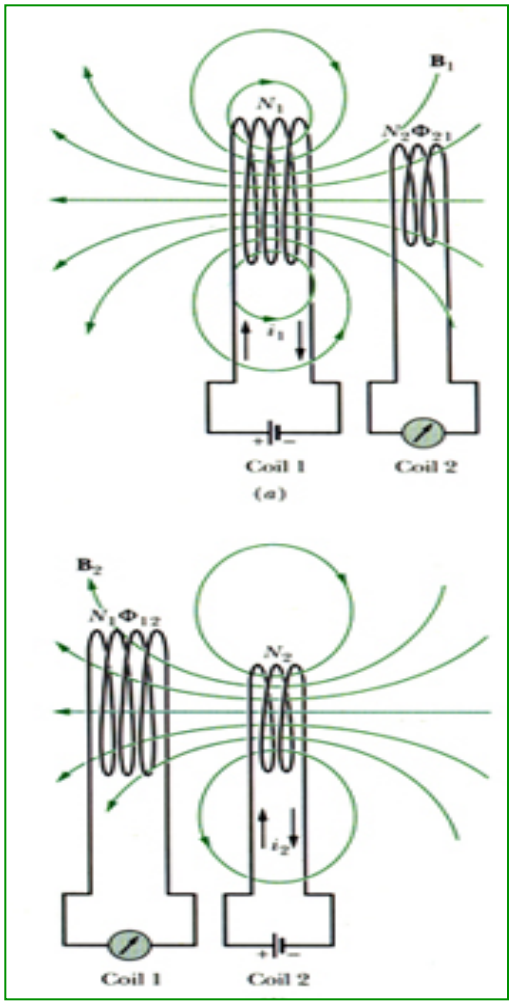
$$\vec{B}(\vec{r}_m) = \sum_n \frac{\mu_0 i_n}{4\pi} \int_{C_n} \frac{d\vec{l}_n \times (\vec{r}_m - \vec{r}_n)}{|\vec{r}_m - \vec{r}_n|^3}$$

O fluxo no circuito *m* será então:

$$\phi_{B_m} = \int_{S_m} \vec{B}(\vec{r}_m) \cdot d\vec{A}_m = \int_{S_m} \sum_n \frac{\mu_0 i_n}{4\pi} \int_{C_n} \frac{d\vec{l}_n \times (\vec{r}_m - \vec{r}_n)}{|\vec{r}_m - \vec{r}_n|^3} \cdot d\vec{A}_m$$

Segue então da lei de Faraday $\varepsilon = -\dfrac{d\phi_B}{dt}$ que

$$\varepsilon_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{S_m} \left[ \sum_n i_n \int_{C_n} \frac{d\vec{l}_n \times (\vec{r}_m - \vec{r}_n)}{|\vec{r}_m - \vec{r}_n|^3} \cdot d\vec{A}_m \right] \right\}$$



# Indutância - Geral

Para $S_m$ e $C_n$ independentes do tempo podemos escrever a *fem* induzida na forma:

$$\varepsilon_m = -\sum_n L_{m,n} \frac{di_n}{dt}$$

onde a *indutância* $L_{m,n}$ é escrita na forma:

$$L_{m,n} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_m} \int_{C_n} \frac{d\vec{l}_n \times (\vec{r}_m - \vec{r}_n)}{|\vec{r}_m - \vec{r}_n|^3} \cdot d\vec{A}_m \quad (*)$$

Na prática, os $L_{m,n}$ são denominados de *auto-indutância* ($L$) quando $n = m$ e *indutância mútua* ($M$) para n≠m.

# Lista de exercícios do Capítulo 30

**Os exercícios sobre Lei de Faraday estão na página da disciplina : (http://www.ifi.unicamp.br).**
**Consultar: Graduação → Disciplinas → F 328-Física Geral III**

**Aulas gravadas:**
**http://lampiao.ic.unicamp.br/weblectures (Prof. Roversi)**
**ou**
**UnivespTV e Youtube (Prof. Luiz Marco Brescansin)**