Aula-11
Oscilações eletromagnéticas e corrente alternada

Curso de Física Geral F-328

2º semestre, 2013

Instituto de Física Gleb Wataghin

Oscilações *LC*

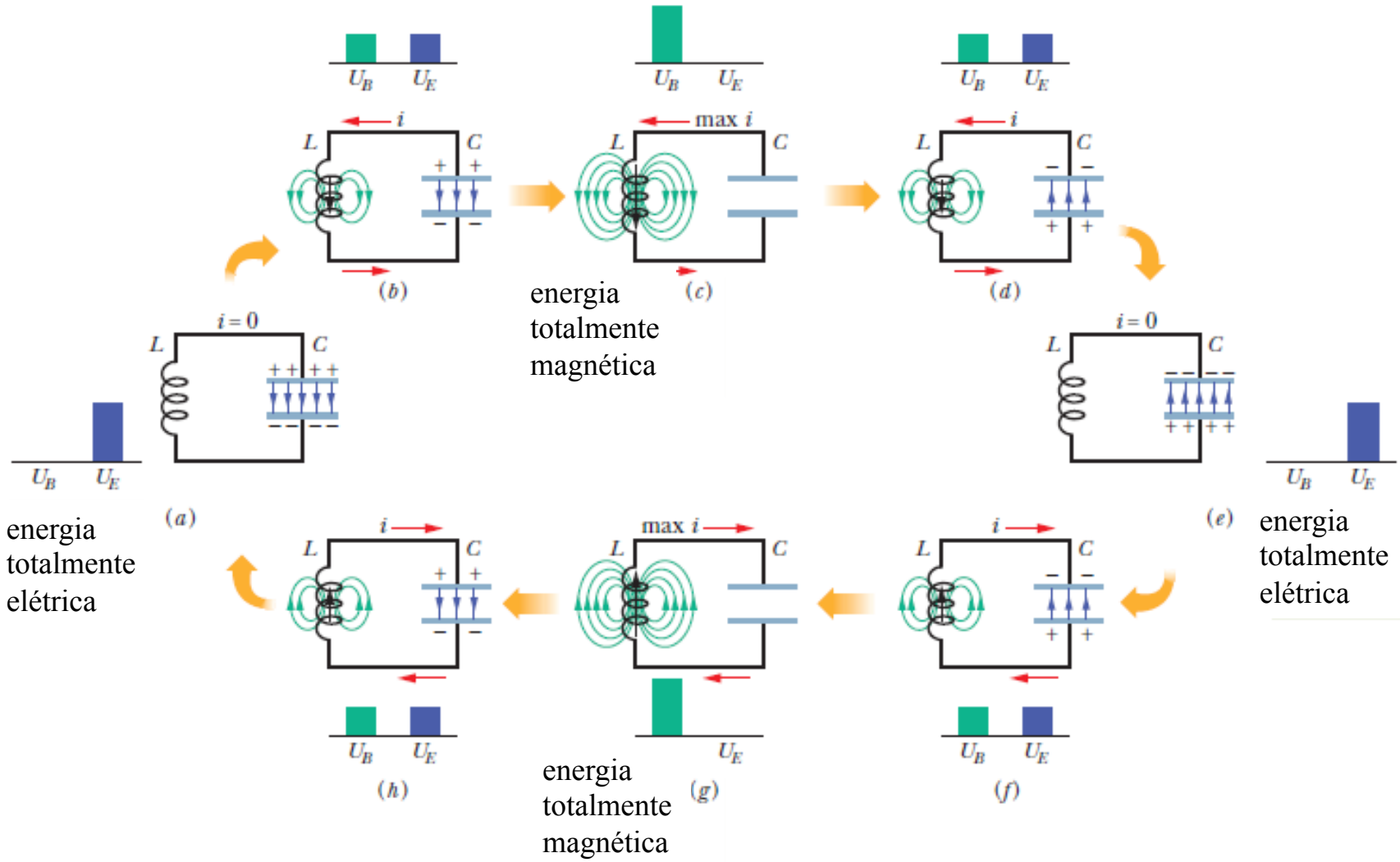
Introdução

Nos dois tipos de circuito estudados até agora (*RC* e *RL*), vimos que a carga, a corrente e a diferença de potencial crescem ou decrescem exponencialmente com o tempo.

Agora vamos estudar o circuito formado pela terceira combinação destes elementos, ou seja, o circuito *LC* . Veremos que, neste caso, estas grandezas não variam exponencialmente com o tempo, mas sim *senoidalmente* (com um determinado período T e uma frequência angular ω_0). As oscilações de carga e corrente resultam em oscilações do campo elétrico do capacitor e do campo magnético do indutor, a que chamamos *oscilações eletromagnéticas*.

Na figura abaixo estão representados oito estágios em um único ciclo de oscilação de um circuito *LC* sem resistência. Supomos que inicialmente a carga q do capacitor tem o seu valor máximo Q e a corrente i que atravessa o indutor é nula.

Oscilações *LC*



Oscilações eletromagnéticas (LC)

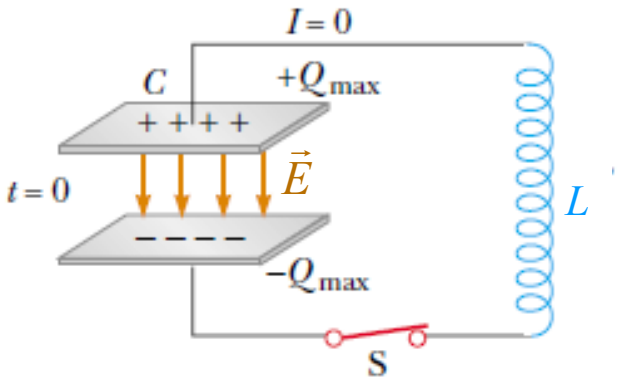
Simulação dos estágios

http://www.walter-fendt.de/ph14br/osccirc_br.htm

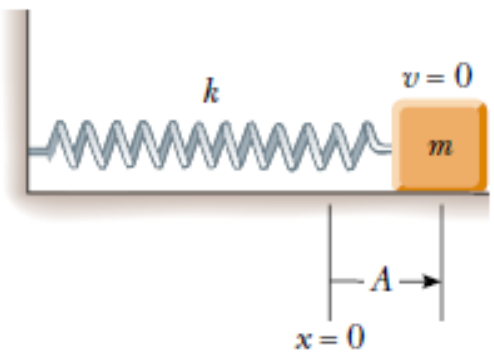
Analogia Eletromecânica

Do ponto de vista formal, um circuito *LC* é análogo a um oscilador harmônico simples, que pode se representado por um sistema massa-mola:

Circuito *LC*



Sistema massa-mola



$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \quad \text{(do capacitor)}$$

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 \quad \text{(do indutor)}$$

$$U_B \Leftrightarrow U_E$$

$$\text{Total: } U_E + U_B = \text{cte}$$

$$U_p = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{(da mola)}$$

$$U_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{(do bloco)}$$

$$U_c \Leftrightarrow U_p$$

$$\text{Total: } U_p + U_c = \text{cte}$$

Analogia Eletromecânica (massa-mola)

No sistema massa-mola , a energia total U é, em qualquer instante:

$$U = U_c + U_p$$

Se não houver atrito, U permanece constante, isto é:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \left(v = \frac{dx}{dt}\right)$$

cuja solução é: $\boxed{x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$

Movimento oscilatório

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} : \text{frequência angular natural} \\ X_m : \text{amplitude} \\ \varphi : \text{constante de fase} \end{cases}$$

Analogia Eletromecânica (oscilador LC)

Energia total oscilante : $U = U_B + U_E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

Como não há resistência no circuito, temos:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad \left(i = \frac{dq}{dt}\right)$$

Fazendo as seguintes correspondências :

$$x \to q, \qquad v \to i, \qquad m \to L, \qquad k \to \frac{1}{C}$$

a solução da equação acima é: $\boxed{q(t) = Q\cos(\omega_0 t + \varphi)}$

onde Q é a amplitude das oscilações da carga, $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ é a *frequência angular natural* das oscilações eletromagnéticas e φ é uma constante de fase, como no caso mecânico. A corrente no circuito LC é:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 Q\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi) = -I\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

Analogia Eletromecânica

	Circuito LC	Sistema massa-mola
Frequência angular:	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Amplitude:	Q	X_m
Constante de fase:	φ	φ

Correspondências entre os dois sistemas	$x \rightarrow q$	$m \rightarrow L$
	$v \rightarrow i$	$k \rightarrow \frac{1}{C}$

No circuito LC, a amplitude e a constante de fase são determinadas pelas condições iniciais $i(0)$ e $q(0)$.

Energias elétrica e magnética

A energia elétrica armazenada no capacitor em qualquer instante *t* é:

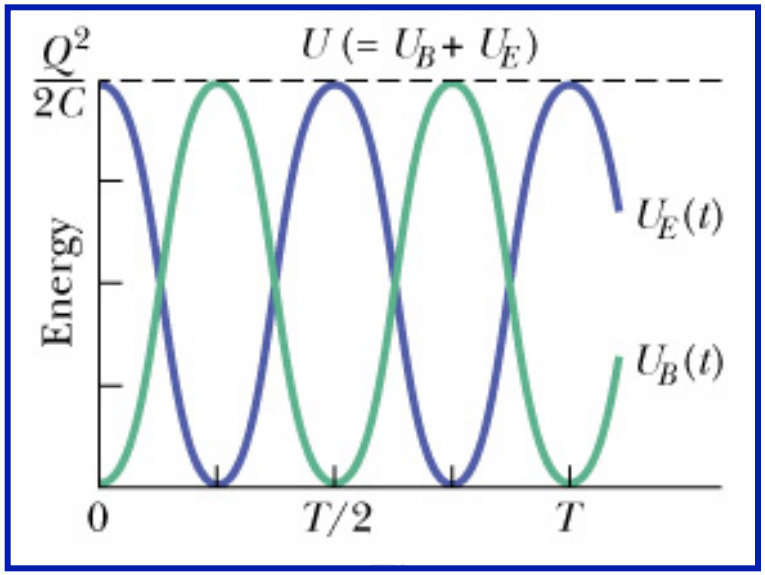
$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

A energia magnética armazenada no indutor é, por sua vez:

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\omega_0{}^2 Q^2 \mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{Q^2}{2C}\mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \varphi)$$, pois $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

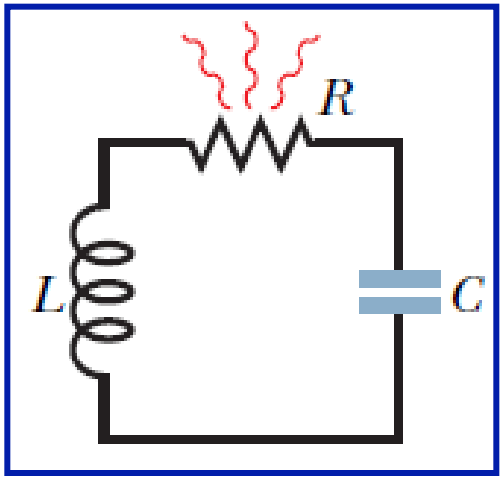
$$\Rightarrow \quad U_E + U_B = \frac{Q^2}{2C}$$

Então, a soma (energia total eletromagnética) permanece constante.



Oscilações amortecidas (circuito *RLC*)

Com um resistor R no circuito, a energia eletromagnética total U do sistema não é mais constante, pois diminui com o tempo na medida em que é transformada em energia térmica no resistor $\left(\frac{dU}{dt} < 0\right)$.



Energia eletromagnética $U = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C}$

Potência dissipada $\frac{dU}{dt} = -Ri^2$

$$\Rightarrow \quad Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = -Ri^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad \left(i = \frac{dq}{dt}\right)$$

Oscilações Amortecidas (circuito *RLC*)

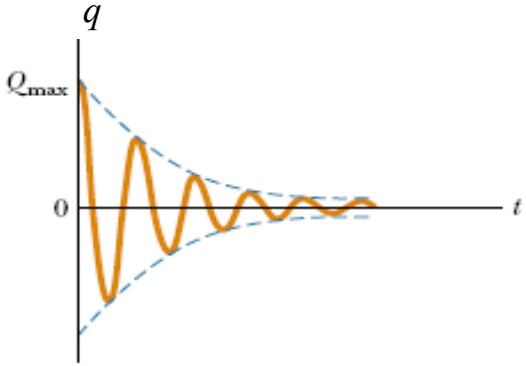
A solução desta equação para o caso de amortecimento fraco $\left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}\right)$ é:

$$\boxed{q(t) = Q_{\max} e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega' t + \varphi)}$$

onde $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$. Quando $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 << \frac{1}{LC} \Longrightarrow \omega' \cong \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

ou seja, ω' aproxima-se da *frequência angular natural* do sistema.

Agora as oscilações são *amortecidas*, pois a amplitude de $q(t)$ decai exponencialmente com o tempo:



Exemplo 1

Um circuito *RLC* série possui indutância L=12 mH, capacitância C =1,6 μF, e resistência R = 1,5 Ω.

a) em que instante t a amplitude das oscilações da carga no circuito será 50% do seu valor original?

Queremos que:

$$Q_{\max} e^{-\frac{R}{2L}t} = 0{,}5 Q_{\max} \Rightarrow -\frac{Rt}{2L} = \ln 0{,}5 \quad \text{, daí:} \quad t = -\frac{2L}{R}\ln 0{,}5 \Rightarrow t = 0{,}011\,s$$

b) quantas oscilações são completadas neste intervalo de tempo?

O tempo para uma oscilação completa é o período $T = \dfrac{2\pi}{\omega'}$.

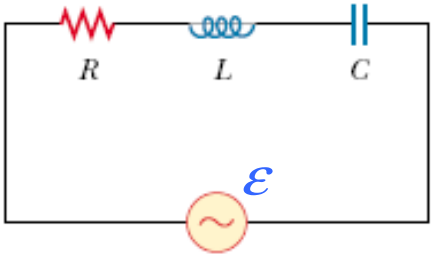
Neste caso, como $\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 << \omega_0{}^2$, $\omega' \cong \omega_0$. Ou seja:

$$nT = t \Rightarrow n = \frac{t}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{ou} \quad n = \frac{0{,}011}{2\pi\left(12.10^{-3} \times 1{,}6 \times 10^{-6}\right)^{\frac{1}{2}}} \cong 13$$

Oscilações forçadas – Corrente alternada

As oscilações de um circuito *RLC* não serão totalmente amortecidas se um dispositivo de *fem* externo fornecer energia suficiente para compensar a energia térmica dissipada no resistor.

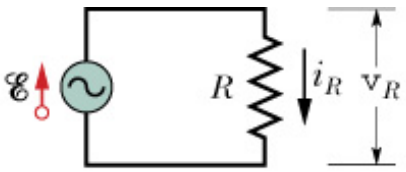
Normalmente este dispositivo é um gerador de corrente alternada com *fem* do tipo: $\varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t)$, onde ω é a chamada *frequência angular propulsora*. Quando uma *fem* como esta é ligada a um circuito *RLC*, dizemos que as oscilações da carga, da tensão e da corrente são *oscilações forçadas*. Veremos que, qualquer que seja a frequência angular natural ω_0 de um circuito, estas oscilações ocorrem sempre na *frequência angular propulsora*.



Mostramos aqui a solução para a corrente: $i(t) = I \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$, onde I é a amplitude da corrente no circuito e φ é a diferença de fase entre a tensão da fonte e a corrente. Voltaremos a isso mais adiante.

Um Circuito Resistivo

Um resistor ligado ao gerador de *fem* alternada.

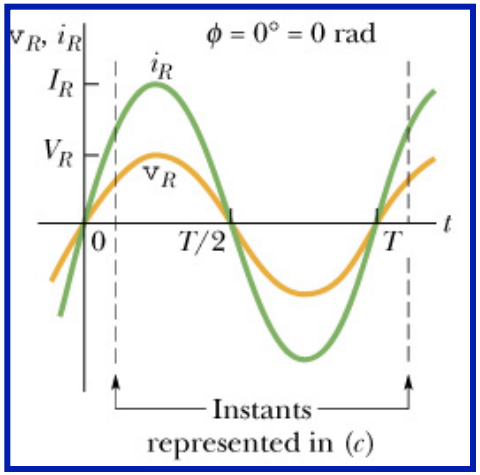


(a)

Temos: $\varepsilon = v_R = \varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t) = V_R \operatorname{sen}(\omega t)$

Corrente i_R no resistor:

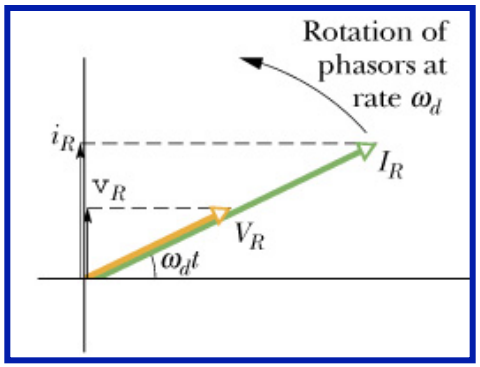
$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{V_R}{R} \operatorname{sen}(\omega t)$$



Se escrevermos a corrente na forma

$$i_R = I_R \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

então temos: $I_R = \dfrac{V_R}{R}$ e $\varphi = 0$.



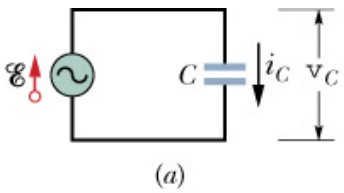
Portanto, a corrente e a tensão (*ddp*) estão *em fase* no resistor. A relação entre as amplitudes da corrente e da tensão no resistor é:

$$\boxed{V_R = I_R R}$$

Um Circuito Capacitivo

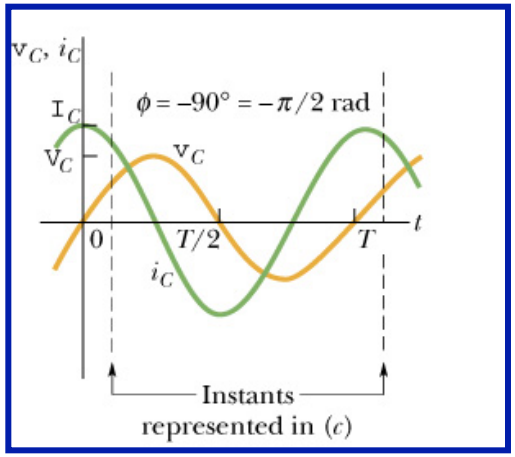
Um capacitor ligado ao gerador de *fem* alternada.

Temos: $v_C = \varepsilon_m \,\text{sen}(\omega t) = V_C \,\text{sen}(\omega t)$



Mas: $q_C = C v_C = C V_C \text{sen}(\omega t)$ e como $i_C = \dfrac{dq_C}{dt}$

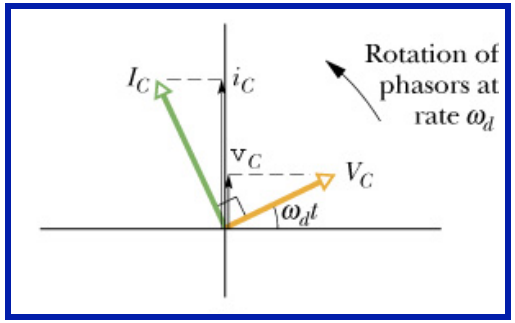
$$\Rightarrow \; i_C = \omega C V_C \cos(\omega t) = \omega C V_C \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



Introduzindo a *reatância capacitiva* $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$:

$$i_C = \frac{V_C}{X_C}\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_C \,\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

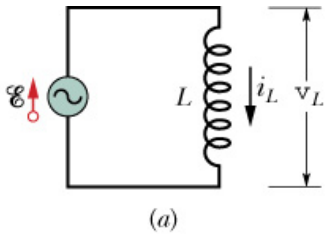
Então $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ e as amplitudes da tensão e da corrente estão relacionadas por: $\boxed{V_C = I_C X_C}$



(vemos que a corrente está *adiantada* de $\dfrac{\pi}{2}$ em relação à tensão).

Um Circuito Indutivo

Um indutor ligado à fonte de *fem* alternada.



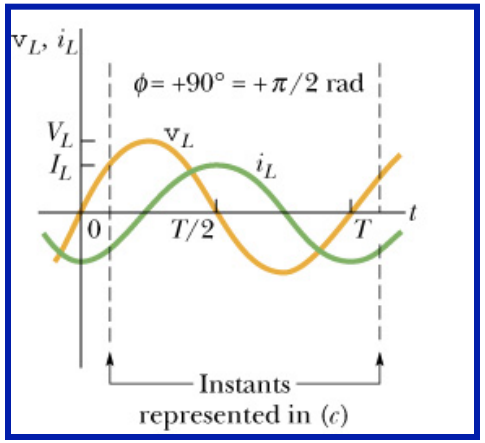
Temos: $v_L = \varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t) = V_L \operatorname{sen}(\omega t) = L\dfrac{di_L}{dt}$

ou $di_L = \dfrac{V_L}{L}\operatorname{sen}(\omega t)dt \therefore$

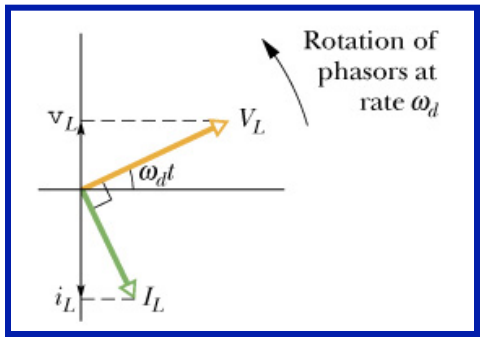
$$i_L = \frac{V_L}{L}\int \operatorname{sen}(\omega t)dt = -\frac{V_L}{\omega L}\cos(\omega t)$$

Introduzindo a *reatância indutiva* $X_L = \omega L$:

$$i_L = \frac{V_L}{X_L}\operatorname{sen}(\omega t - \frac{\pi}{2}) = I_L \operatorname{sen}(\omega t - \frac{\pi}{2})$$



Então $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ e as amplitudes da tensão e da corrente estão relacionadas por: $\boxed{V_L = I_L X_L}$



(vemos que a corrente no indutor está *atrasada* de $\dfrac{\pi}{2}$ em relação à tensão).

Simulações dos três circuitos simples

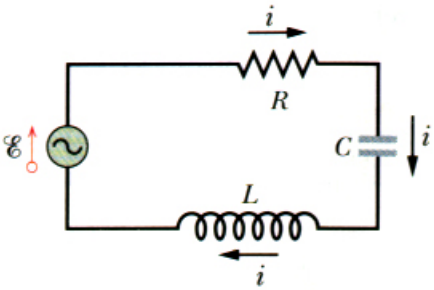
http://www.walter-fendt.de/ph14br/accircuit_br.htm

(Simulação dos três circuitos simples)

O Circuito *RLC* Série

A *fem* aplicada é: $\varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t)$

A corrente transiente é nula; a corrente permanente é dada por: $i(t) = I \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$



➡ Objetivo: determinar I e φ em função das grandezas R, L, C, ε_m e ω.

A corrente i tem o mesmo valor em todos os elementos e é representada por um único *fasor* (vetor girante) no diagrama. Para qualquer t :

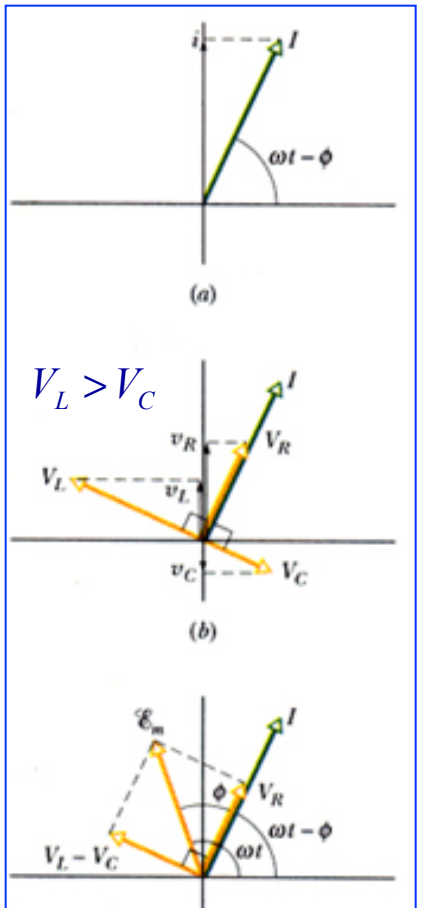
$$\varepsilon = v_R + v_L + v_C$$

Segue que: $\vec{\varepsilon}_m = \vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C$

Do diagrama, supondo que $V_L > V_C$:

$$\varepsilon_m^{\ 2} = V_R^{\ 2} + (V_L - V_C)^2 \qquad \text{ou}$$

$$\varepsilon_m^{\ 2} = (IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2$$

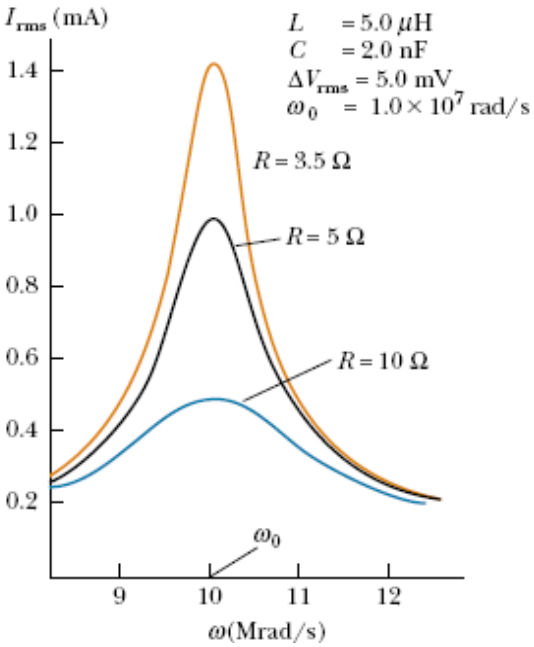


O Circuito *RLC* Série

Daí achamos o valor de I :

$$I=\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}=\frac{\varepsilon_m}{Z},$$

onde $Z=\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}$ é a *impedância* do circuito para a frequência de excitação ω.



Também a constante de fase φ pode ser encontrada do diagrama dos fasores:

$$tg\varphi=\frac{V_L-V_C}{V_R}=\frac{X_L-X_C}{R}=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$$

Circuito RLC série

- Corrente: $$I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

- Impedância: $$Z = \frac{\varepsilon_m}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

- Constante de fase: $$tg\varphi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Ressonância

Como maximizar a amplitude I da corrente?

Minimizando a impedância Z para facilitar a passagem da corrente

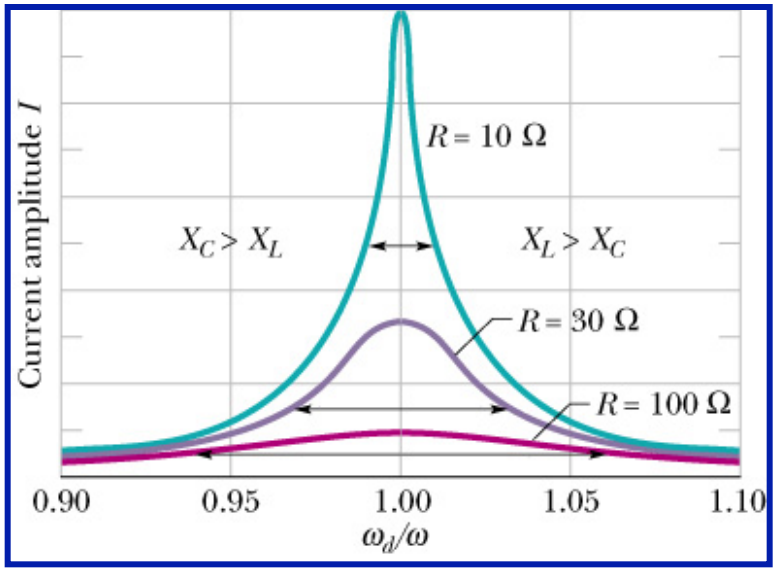
$$Z=\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}$$

A amplitude I da corrente é máxima (condição de *ressonância*)

quando $\omega L=\frac{1}{\omega C}$ ou $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}=\omega_0$

isto é, quando a *frequência propulsora* coincide com a *frequência angular natural* do circuito:

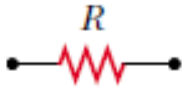
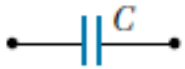
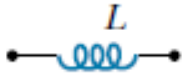
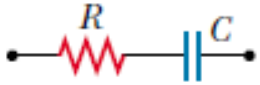
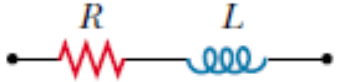
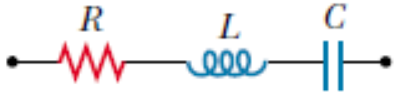
$$\omega=\omega_0$$



http://ngsir.netfirms.com/englishhtm/RLC.htm

Impedâncias e ângulos de fase

TABELA: Impedância e ângulos de fase para várias combinações de componentes em série no circuito

Componente	Impedância Z	Fase φ
	R	$0°$
	X_C	$-90°$
	X_L	$+90°$
	$\sqrt{R^2 + X_C^2}$	Negativa, entre -90° e 0°
	$\sqrt{R^2 + X_L^2}$	Positiva, entre 0° e 90°
	$\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	Negativa, se $X_C > X_L$ Positiva, se $X_C < X_L$

[a] In each case, an ac voltage (not shown) is applied across the elements.

Potência em Circuitos CA

- Potência instantânea: $P = \varepsilon i = \varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t) I \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$

$$= \varepsilon_m I \operatorname{sen}^2(\omega t)\cos\varphi - \varepsilon_m I \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t)\, sen\,\varphi$$

- Potência média num ciclo (de período T):

$$P_{med} = \varepsilon_m I \cos\varphi \frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sen}^2(\omega t)dt = \frac{1}{2}\varepsilon_m I \cos\varphi$$

- Valores *rms*: valores constantes dando a mesma potência que a média no tempo de $i(t)$: $\varepsilon_{rms} = \dfrac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}}$ $\qquad I_{rms} = \dfrac{I}{\sqrt{2}}$

Então: $P_{med} = \varepsilon_{rms} I_{rms} \cos\varphi$

Para a máxima transferência de potência: $\cos\varphi = 1$ (ou $\varphi = 0$).

Nestas condições, $\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$, que é a condição de *ressonância*.

Potência em Circuitos CA (resistor)

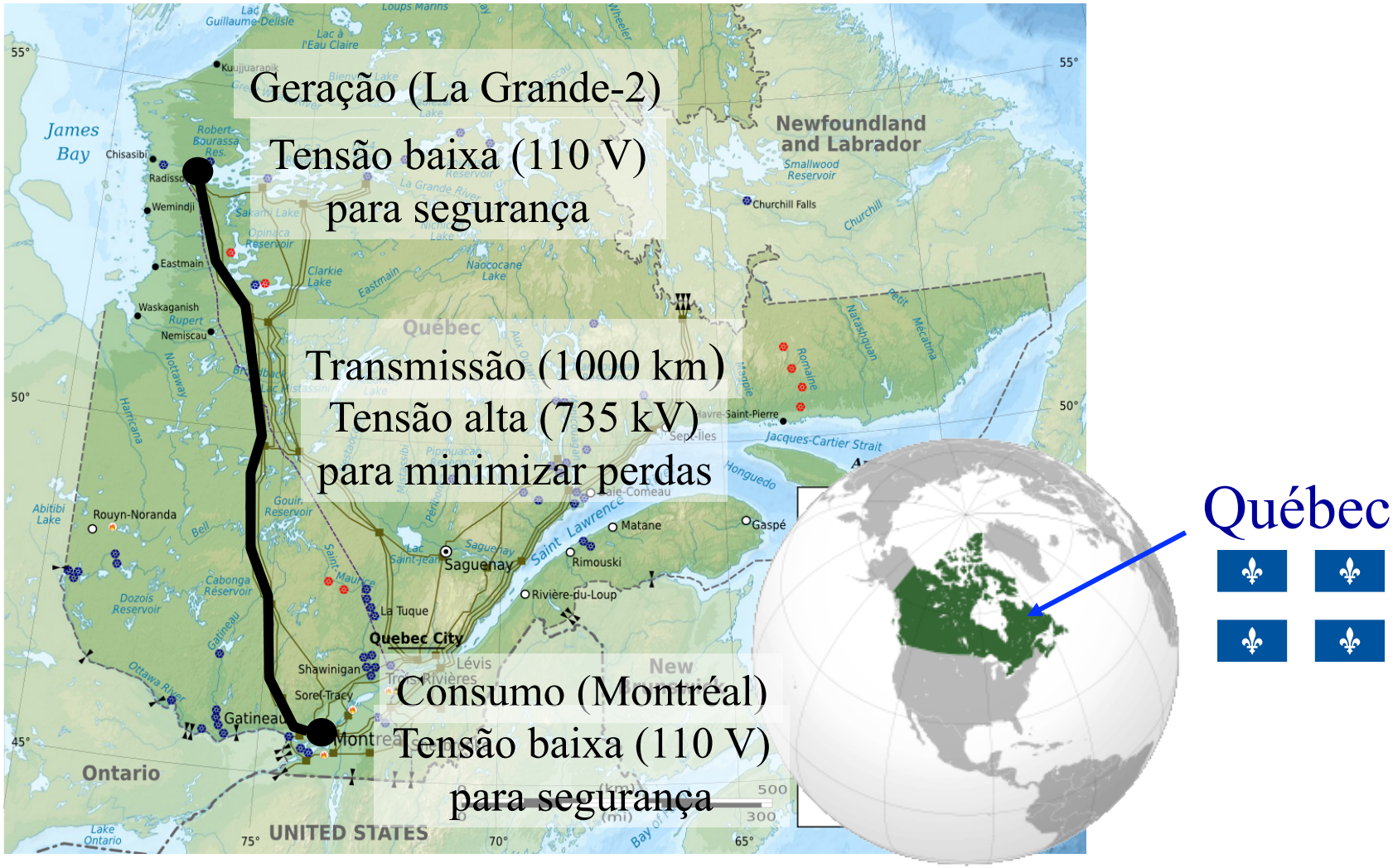
Potência dissipada somente no resistor:

- Potência instantânea: $P = i^2 R = I^2 R \operatorname{sen}^2(\omega t - \varphi)$
- Potência média num ciclo (de período T):

$$P_{med} = \varepsilon_{rms} I_{rms} \cos\varphi = \varepsilon_{rms} I_{rms} \frac{R}{Z} = R I_{rms}^2 \qquad \left(\text{pois } \cos\varphi = \frac{R}{Z}\right)$$

- Fator de potência ($\cos\varphi$):
  - $\cos\varphi = 1$: circuito resistivo (transferência máxima de potência ➡ ressonância)
  - $\cos\varphi = 0$: circuito indutivo ou capacitivo (não há transferência de potência)

Transformadores



Sistema de distribuição → Requer mudança de tensão

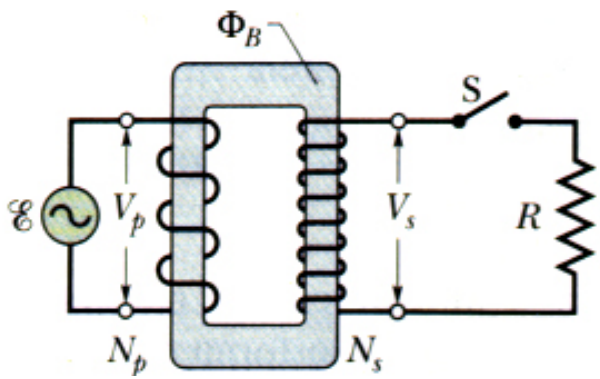
Transformadores

A taxa média de dissipação numa carga resistiva é: $P = V_{rms} I_{rms}$

Por razões de segurança, tanto na estação geradora quanto na extremidade receptora, é conveniente lidar com baixas voltagens. Já na transmissão, é conveniente lidar com baixas correntes (para minimizar perdas ôhmicas).

Solução?

Transformador: um dispositivo usado para aumentar ou diminuir a *ddp* em um cicuito CA, de modo a manter constante o produto $V \times I$.



Primário Secundário

Transformadores

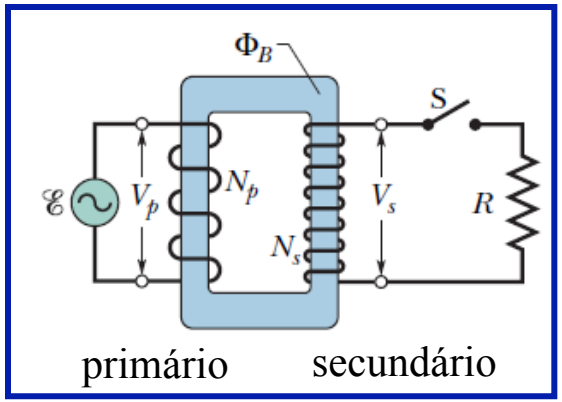
Transformador ideal

a) *S* aberta: O enrolamento primário é um indutor puro; como $\cos\varphi=0$, não há transferência de potência do gerador para o transformador. O fluxo ϕ_B atravessa os dois enrolamentos e a *fem* induzida *por espira* é a mesma nos dois:

$$\varepsilon_{esp} = \frac{d\phi_B}{dt} = \frac{V_P}{N_P} = \frac{V_S}{N_S} \longrightarrow \boxed{V_S = \frac{N_S}{N_P} V_P}$$

(relação entre as tensões)

Controlando-se N_S e N_P, pode-se elevar ou baixar a tensão do secundário.

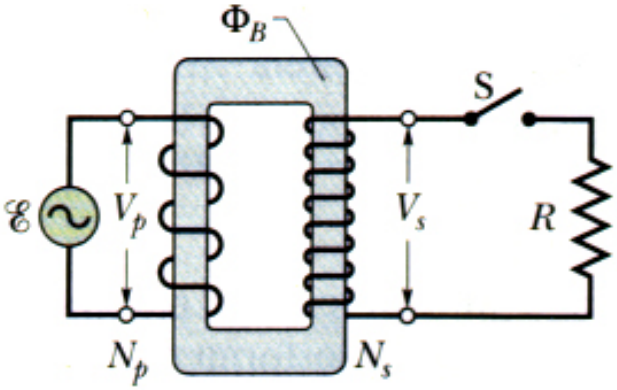


Transformadores

b) Fechando-se S, há transferência de potência do gerador para a carga (representada aqui apenas por uma carga resistiva R). Para um transformador ideal com carga resistiva o fator de potência é igual a 1; a taxa com que o gerador fornece energia ao enrolamento primário é $V_P I_P$ e, analogamente, a energia é transferida do enrolamento primário ao secundário com taxa $V_S I_S$. Por conservação de energia:

$$I_P V_P = I_S V_S \quad \Rightarrow \quad I_S = I_P \frac{V_P}{V_S} = \frac{N_P}{N_S} I_P$$

que é a relação de transformação de correntes.



Primário Secundário

Finalmente, lembrando que $I_S = \frac{V_S}{R}$, vem:

$$I_P = I_S \frac{N_S}{N_P} = \frac{V_S}{R}\frac{N_S}{N_P} = \frac{N_S^{\,2}}{N_P^{\,2}}\frac{V_P}{R} = \frac{V_P}{\left(\frac{N_P}{N_S}\right)^2 R}$$

o que mostra que, do ponto de vista do primário, a resistência equivalente da carga não é R e sim $R_{eq} = \left(\frac{N_P}{N_S}\right)^2 R$

Exemplo 2

Num circuito *RLC* série, $R = 200\Omega$, $C = 15\mu F$, $L = 230$ mH, $f = 60$ Hz e $\varepsilon_m = 36$ V.

a) Determine a impedância do circuito

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 86{,}7\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = 177\Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(200)^2 + (86{,}7 - 177)^2} \cong 219\ \Omega$$

b) Determine a amplitude e a fase da corrente

$$I = \frac{\varepsilon_m}{Z} = 0{,}164\text{A};\ \varphi = \text{arctg}\frac{X_L - X_C}{R} \cong -0{,}42\ \text{rad}$$

c) Calcule o fator de potência

$$\cos\varphi = \cos(-0{,}42) \cong 0{,}91 \quad \text{ou} \quad \cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{200}{219} \cong 0{,}91$$

d) Determine a potência média dissipada no resistor

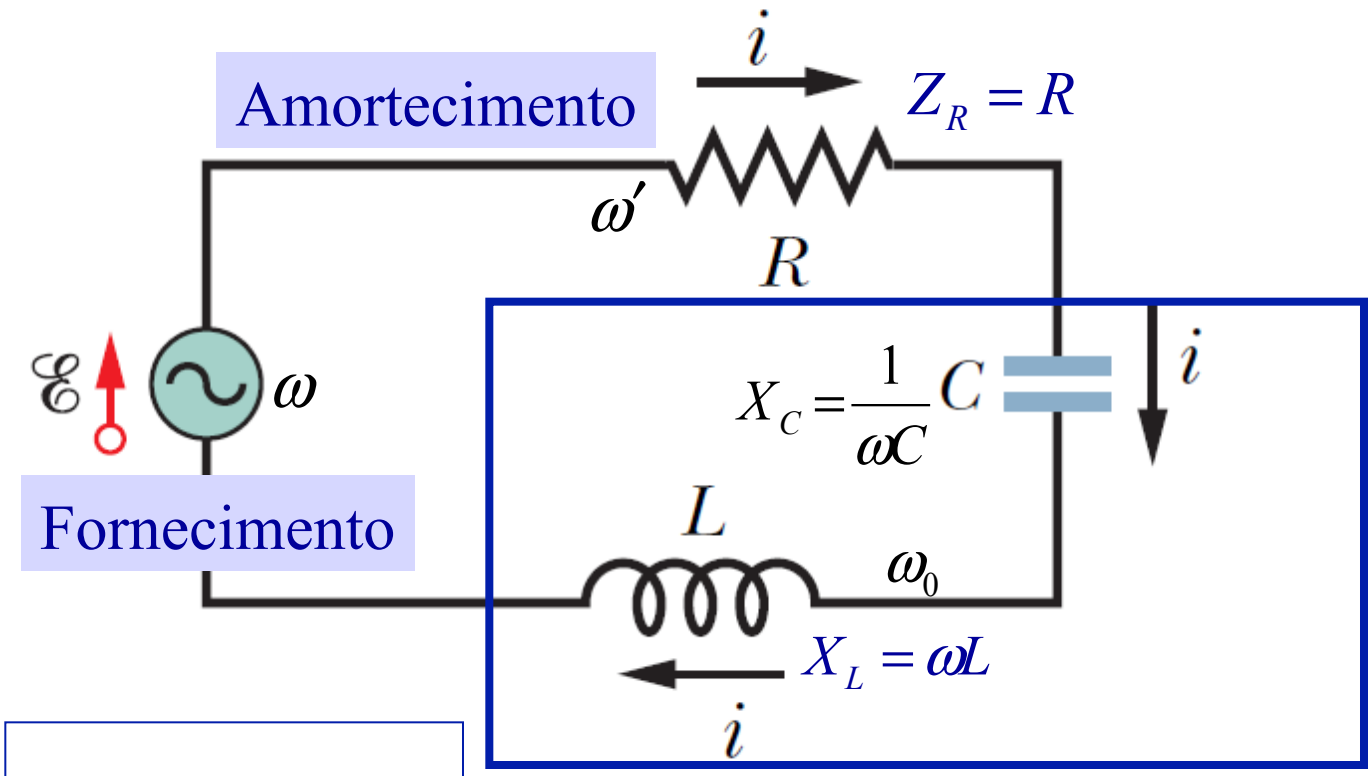
$$P_{med} = I_{rms}^2 R = (0{,}116)^2 \text{x} 200 \cong 2{,}69\text{W}$$

ou $$P_{med} = \varepsilon_{rms} I_{rms} \cos\varphi = 25{,}5 \text{x} 0{,}116 \text{x} 0{,}91 \cong 2{,}69\text{W}$$

e) O circuito é predominantemente capacitivo ou indutivo ?

Como $X_C > X_L$ ($\varphi < 0$) o circuito é predominantemente capacitivo.

Resumo



Ressonância:
$\omega = \omega_0$

Oscilações eletromagnéticas
(movimento harmônico simples)

Lista de exercícios do Capítulo 31

Os exercícios sobre Oscilações Eletromagnéticas estão na página da disciplina : (http://www.ifi.unicamp.br).
Consultar: Graduação → Disciplinas → F 328-Física Geral III

Aulas gravadas:
http://lampiao.ic.unicamp.br/weblectures (Prof. Roversi)
ou
UnivespTV e Youtube (Prof. Luiz Marco Brescansin)