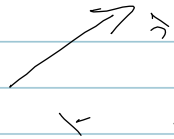
Eletrodinâmica I   F502   Sem 1 2012

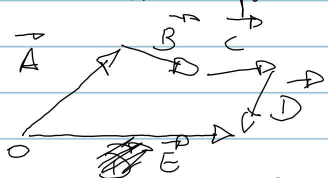
1. Vetor: necessitamos do conceito de uma grandeza que engloba direção e sentido



o tamanho do vetor é sua magnitude
a direção é dada pela flecha

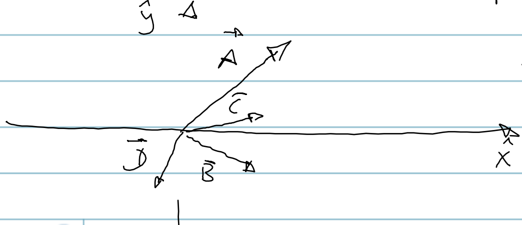
Os vetores se associam sequencialmente (e linearmente)

Ex 1.1: Vetores indicam deslocamento a partir de um ponto O.



$\vec{E} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$

Notem que não necessitamos um sistema de coordenadas, mas podemos fazer a escolha de 1 e somar por componentes



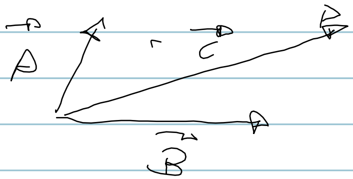
$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$

$E_x = A_x + B_x + C_x + D_x$

$E_y = A_y + B_y + C_y + D_y$

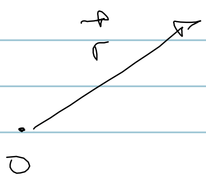
E_i são as projeções no sistema coord.

Podemos somar diretamente também sem pensar em coordenadas



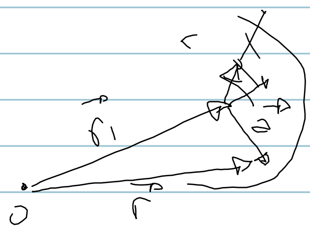
Ex. 1.2 Esfera de raio a centrada num ponto $\vec{r}_1$

Surge a ideia do vetor posição com respeito a uma certa origem (em geral a origem está em O)



O vetor posição é um elemento geométrico ~~que va~~ aponta da origem para o ponto do espaço distante da origem de um valor $r = |\vec{r}|$

A equação de uma esfera de raio $|\vec{a}|$ é:



Todos os pontos da esfera estão em
$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}$

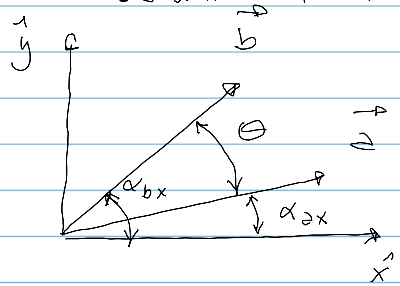
$\vec{a}$ toma ~~to~~ todas as direções

Se quisermos escrever em termos de componentes num certo sistema de coordenadas temos

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$
$$\vec{r}_1 = x_1\hat{x} + y_1\hat{y} + z_1\hat{z}$$

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}|^2 = |\vec{a}|^2 = a^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$$

2. Ângulo θ entre vetores (sistema arbitrário de referência)



$|\vec{a}| \equiv a$; $|\vec{b}| \equiv b$

$$\vec{a} = \underbrace{a\cos\alpha_{ax}}_{a_x}\hat{x} + \underbrace{a\,\mathrm{sen}\,\alpha_{ax}}_{a_y}\hat{y}$$
$$\vec{b} = \underbrace{b\cos\alpha_{bx}}_{b_x}\hat{x} + \underbrace{a\,\mathrm{sen}\,\alpha_{bx}}_{b_y}\hat{y}$$

Notem que $\alpha_{bx} = \alpha_{ax} + \theta$

Definimos o modulo escalar $\vec{a}\cdot\vec{b} \equiv \cancel{a_x b_x + a_y b_y}$ $a_x b_x + a_y b_y$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\left[\cos\alpha_{ax}\cos\alpha_{bx} + \mathrm{sen}\,\alpha_{ax}\,\mathrm{sen}\,\alpha_{bx}\right]$$

$$\cos\alpha_{bx} = \cos(\alpha_{ax} + \theta) = \cos(\alpha_{ax})\cos\theta - \mathrm{sen}\,\alpha_{ax}\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$\mathrm{sen}\,\alpha_{bx} = \mathrm{sen}(\alpha_{ax} + \theta) = \mathrm{sen}(\alpha_{ax})\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta\cos\alpha_{ax}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\Big[\cos^2\alpha_{ax}\cos\theta - \cancel{\cos\alpha_{ax}\,\mathrm{sen}\,\alpha_{ax}\,\mathrm{sen}\,\theta}$$
$$+ \mathrm{sen}^2\alpha_{ax}\cos\theta + \cancel{\mathrm{sen}\,\alpha_{ax}\cos\alpha_{ax}\,\mathrm{sen}\,\theta}\Big]$$

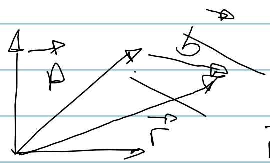
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta \quad \text{ou} \quad \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

- o produto escalar e a magnitude dos vetores nos dá ~~os~~ ângulo ~~s~~ entre os vetores
- se $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$
- Como α_{ax} é arbitrário, o ângulo independe da coordenada.

Maneira ~~multid~~ p/ mais dimensões:

$$\vec{a} = \sum_i A_i \hat{x}_i \qquad \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_i A_i B_i$$
$$\vec{b} = \sum_i B_i \hat{x}_i$$

Ex. 2.1 Seja $\vec{A}$ um vetor que vai da origem a um ponto P fixo no espaço. Seja $\vec{r}$ um vetor que vai da origem a um ponto genérico $Q(x,y,z)$. Mostre que $\vec{A}\cdot\vec{r} = A^2$ é a equação do plano perpendicular a $\vec{A}$ que contém P.



→ plano perpendicular a $\vec{A}$

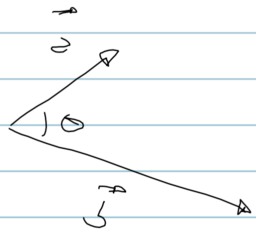
$\vec{r}$ é um ponto no plano

$$\vec{r} = \vec{A} + \vec{b} \Rightarrow \vec{b} = \vec{r} - \vec{A}$$

Agora, $\vec{b} \perp \vec{A} \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{b} = 0$

$$\Rightarrow \vec{A}\cdot(\vec{r} - \vec{A}) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{A}\cdot\vec{r} = A^2}$$

3. Produto vetorial



→ $\vec a$ e $\vec b$ determinam um plano

A área do paralelogramo $(= \cancel{\Sigma_i}\ S)$ é:

$$S\ \cancel{\Sigma_i} = |\vec a||\vec b| \operatorname{sen}\theta$$

$$|\vec a| = \left(\sum_{i=1}^{3} A_i^2\right)^{1/2} \qquad |\vec b| = \left(\sum_{i=1}^{3} B_i^2\right)^{1/2}$$

$$\cancel{\Sigma_i^2} = S^2 = a^2 b^2 \operatorname{sen}^2\theta = a^2 b^2 (1 - \cos^2\theta)$$

$$S^2 = a^2 b^2 - a^2 b^2 \cos^2\theta$$

$$S^2 = a^2 b^2 - (\vec a \cdot \vec b)^2$$

$$S^2 = \left(\sum_i A_i^2\right)\left(\sum_i B_i^2\right) - \left(\sum_i A_i B_i\right)^2$$

$$= (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 + (A_2 B_3 - A_3 B_2)^2 + (A_3 B_1 - A_1 B_3)^2$$

A área é portanto o módulo ao quadrado de um vetor que pode ser convenientemente escrito:

$$\vec a \times \vec b = \begin{cases} (A_2 B_3 - A_3 B_2)\ \hat x \\ (A_3 B_1 - A_1 B_3)\ \hat y \\ (A_1 B_2 - A_2 B_1)\ \hat z \end{cases}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \cancel{\begin{vmatrix} \hat{x}_1 & \hat{y} & \hat{z} \\ a_1 & b_1 & d_1 \end{vmatrix}} \quad \begin{array}{ccc} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ \end{array}$$

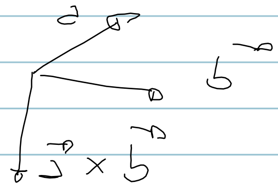
$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{a}\times\vec{b}$ é perpendicular a $\vec{a}$ ou $\vec{b}$.

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Sentido → regra da mão direita



$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\theta$ → área do paralelogramo

$\vec{a}\parallel\vec{b} \Rightarrow \theta = 0 \quad \vec{a}\times\vec{b} = 0$

Outra relação importante $(\vec{a}\times\vec{b})^2 = a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

Produto ~~vetorial~~ escalar triplo

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) \qquad \vec{A} = A_1\hat{x}_1 + A_2\hat{x}_2 + A_3\hat{x}_3$

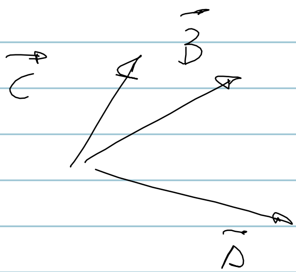
$$\begin{aligned} \vec{B}\times\vec{C} = {} & (B_2C_3 - B_3C_2)\hat{x}_1 + \\ & (B_3C_1 - B_1C_3)\hat{x}_2 + \\ & (B_1C_2 - B_2C_1)\hat{x}_3 \end{aligned}$$

$$\vec A\cdot(\vec B\times\vec C) = A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 + A_2B_3C_1 - A_2B_1C_3 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

Pelo determinante, permutações cíclicas

$$\vec A\cdot(\vec B\times\vec C) = \vec B\cdot(\vec C\times\vec A) = \vec C\cdot(\vec A\times\vec B)$$

$$= -\vec A\cdot(\vec C\times\vec B) = -\vec B\cdot(\vec A\times\vec C) = -\vec C\cdot(\vec B\times\vec A)$$

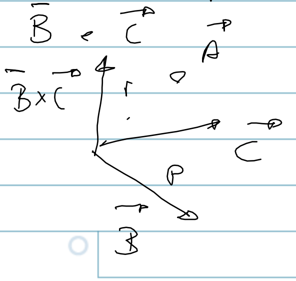


$\vec C\cdot(\vec A\times\vec B) =$ volume

Produto vetorial triplo

$\vec A\times(\vec B\times\vec C)$ (notem que o parênteses é necessário)

$\vec B\times\vec C$ é um vetor perpendicular ao plano formado por $\vec B$ e $\vec C$



$\vec A\times(\vec B\times\vec C)$ é $\perp$ ao plano r formado por $\vec A$ e $(\vec B\times\vec C)$ e $\in$ ao plano p