14.3 Eq. de Laplace em coordenadas esféricas sem dependência azimutal (ϕ)

$\varphi(r,\theta)$ V não depende de ϕ

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) = 0$$

Usando o método de separação de variáveis

$\varphi(r,\theta) = P(\theta)\, Z(r)$, temos

$$\frac{1}{r^2} P(\theta) \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dZ}{dr}\right) + \frac{Z(r)}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{dP}{d\theta}\right) = 0$$

Dividindo por $\varphi = PZ$, temos:

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dZ}{dr}\right) = -\frac{1}{P \operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{dP}{d\theta}\right) = K$$

função só de r função só de θ

K é uma constante de separação.
De fato, as soluções adequadas da eq. em θ entre 0 e π exigem $K = \ell(\ell+1)$ com $\ell = 0, 1, 2, \ldots$

As soluções de $P(\theta)$ são chamadas polinômios de Legendre.

l	$P_l(\theta)$
0	1
1	$\cos\theta$
2	$(1/2)(3\cos^2\theta - 1)$
3	$(1/2)(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

De fato os polinômios de Legendre podem ser obtidos da função geradora

$$F(u) = (1 - 2xu + u^2)^{-1/2} \qquad (x = \cos\theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P_n(x)}\, u^n$$

— os polinômios de Legendre são os coeficientes de u^n na expansão de $F(u)$ em série de Taylor

---

É interessante e importante notar que

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x)\, dx = \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } l \neq l' \\ \dfrac{2}{2l+1}, & \text{se } l' = l \end{cases} = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{ll'}$$

A solução para a equação em Z

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dZ}{dr}\right) = l(l+1)Z$$

é simples.

Vejamos a função $Z(r) = r^s$, substituindo na equação:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 s r^{s-1}\right) = \ell(\ell+1) r^s$$

$$s \frac{d}{dr}\left(r^{s+1}\right) = \ell(\ell+1) r^s$$

$$s(s+1) \cancel{r^s} = \ell(\ell+1) \cancel{r^s}$$

$$s^2 + s - \ell(\ell+1) = 0$$

$$s = -\frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{4} + \ell^2 + \ell\right)^{1/2}$$

$$s = -\frac{1}{2} \pm (\ell + 1/2) \Rightarrow s = \ell \text{ ou } s = -(\ell+1)$$

$$Z(r) = r^\ell \quad \text{ou} \quad Z(r) = r^{-(\ell+1)}$$

A solução geral fica:

$$\boxed{\varphi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right) P_\ell(\cos\theta)}$$

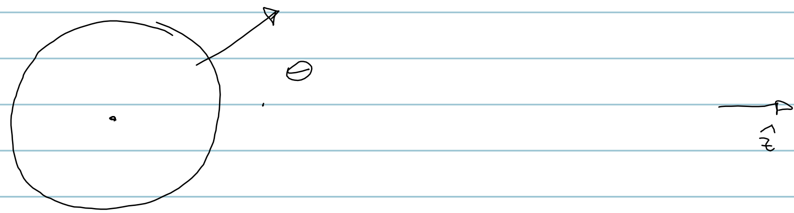
Notem que quando a origem $(r=0)$ está envolvida $B_\ell = 0$ para qualquer ℓ.
Quando $r \to \infty$ está envolvido $A_\ell = 0$, $\ell \neq 0$.
Vejamos alguns problemas.

↳ a menos que existam campos em $r \to \infty$

Ex. 14.3.1

~~14.4~~ Solução por análise das condições de contorno

~~Ex~~ Esfera metálica descarregada ($Q_T = 0$) inserida num campo uniforme inicialmente $\bar{E} = E_0 \hat{z}$



Obter o campo fora da esfera.

No infinito $\vec{E} \to E_0 \hat{z} = -\frac{d\varphi}{dz} \nabla \varphi$

$$\varphi \to -E_0 z + \text{constante} \quad ; \quad z = r\cos\theta$$

$$\varphi \to -E_0 r \cos\theta + \text{constante}$$

Notem que como $Q_T = 0$ não devemos esperar um termo devido a esfera carregada que deveria ser proporcional a ~~Q/r~~ Q/r

A solução geral quando $r \to \infty$ está envolvido é

$$\varphi(r,\theta) = A_0 P_0(\cos\theta) + A_1 P_1(\cos\theta) r + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$$A_0 P_0(\cos\theta) = A_0 \qquad A_1 P_1 \cos\theta = A_1 r \cos\theta$$

Note que mantivemos o termo A_1 pois queremos que no infinito

$$\varphi \to -E_0 r \cos\theta + \text{constante}.$$

Os outros termos levariam a um campo diferente no infinito.

Como a esfera é um condutor na sua superfície $\varphi(R,\theta) = \varphi_0$, ou seja independente de θ.

Como os P_ℓ são ortogonais só resta o termo $\frac{B_1}{r^2}\cos\theta$ no somatório em ℓ.

Sendo assim:

$$\varphi(r,\theta) = A_0 + A_1 r\cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta$$

$$\varphi(r\to\infty,\theta) = \text{const.} - E_0 r\cos\theta$$

Então $A_1 = -E_0$

Em $r = R$ $\quad \varphi(R,\theta) = A_0 - E_0 R\cos\theta + \frac{B_1\cos\theta}{R^2} = \varphi_0$

$$\Rightarrow A_0 = \varphi_0 \quad \text{e} \quad \frac{B_1}{R^2} = E_0 R \Rightarrow B_1 = E_0 R^3$$

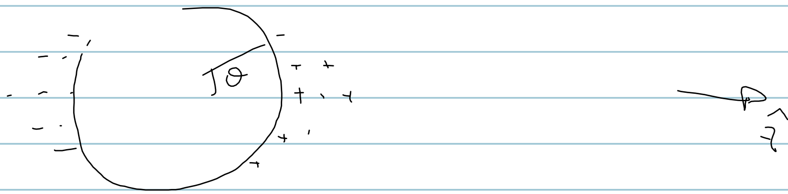
$$\varphi(r,\theta) = \varphi_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 R^3\cos\theta}{r^2}$$

$$\varphi(r,\theta) = \varphi_0 - E_0 r\cos\theta\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = E_0\cos\theta\left(1 + \frac{2R^3}{r^3}\right) \\ E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -E_0\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\sin\theta \end{aligned}\right\} r \geq R$$

A densidade de carga na esfera é

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_r\Big|_{r=R} = 3\epsilon_0 E_0\cos\theta$$



O campo induz a carga e uma uma separação de Q_T em $\oplus$ e $\ominus$ nos lados opostos da esfera.

Se quisermos calcular $\varphi(r,\theta)$ dentro da esfera teríamos $B_\ell = 0$. Como $\varphi(R,\theta) = \varphi_0$ $A_\ell = 0$ p/ $\ell > 0$. Então $\varphi(r,\theta) = A_0$
Como $\varphi(R,\theta) = A_0 = \varphi_0 \Rightarrow \varphi(r,\theta) = \varphi_0$

(Resolver este mesmo problema se há uma carga total na esfera $Q_T \neq 0$)

Ex. 14.3.2 Potencial dado numa superfície

(Ex. 3.6 Griffiths)

Esfera oca e $\varphi(R,\theta) = V_0(\theta)$
Encontrar o potencial dentro e fora da esfera.

Dentro: $B_\ell = 0$ $\varphi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta)$

Em $r = R$

$$\varphi(R,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell R^\ell P_\ell(\cos\theta) = V_0(\theta)$$

$$\sum_{\ell=0} A_\ell R^\ell \int_0^\pi P_{\ell'}(\cos\theta) P_\ell(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \int_0^\pi V_0(\theta) P_{\ell'}(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$\sum_{\ell=0} A_\ell R^\ell \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} = \int_0^\pi V_0(\theta) P_{\ell'}(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$\boxed{A_{\ell'} = \frac{2\ell'+1}{R^{\ell'}} \int_0^\pi V_0(\theta) P_{\ell'}(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta}$$

Fora $A_\ell = 0$ (considerando que $\varphi(r \to \infty) \to 0$)

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{\ell=0} \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) \quad \text{(Analogamente)}$$

$$\Rightarrow B_\ell = \frac{2\ell+1}{2} R^{\ell+1} \int_0^\pi V_0(\theta) P_\ell(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

Sugestão problemas 3.18 e 3.19

Ex. 14.3.3

Exemplo 3.9 Griffiths

Densidade superficial $\sigma_0(\theta)$ dada numa casca esférica.

dentro $\varphi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$

fora $\varphi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$

em $r=R$ φ é contínuo

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

Como os P_l são ortogonais $A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}}$

$$\Rightarrow B_l = A_l R^{2l+1}$$

Agora $\left.\frac{\partial V_{fora}}{\partial r} - \frac{\partial V_{dentro}}{\partial r}\right|_{r=R} = -\frac{\sigma_0(\theta)}{\epsilon_0}$

$\sum l A_l R^{l-1}$ $= A_l R^{2l+1}$

$$-\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\frac{B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos\theta) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos\theta) = -\frac{\sigma_0(\theta)}{\epsilon_0}$$

$$-\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\frac{A_l R^{2l+1}}{R^{l+2}}P_l(\cos\theta) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos\theta) = -\sigma_0(\theta)/\epsilon_0$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} R^{l-1}\Big[\overbrace{l+1+l}^{2l+1}\Big]A_l P_l(\cos\theta) = \sigma_0(\theta)/\epsilon_0$$

Multiplicando-se por $P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta$ e integrando de 0 a π temos

$$\frac{2}{\cancel{2l'+1}}R^{l'-1}(\cancel{2l'+1})A_{l'} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^{\pi}\sigma_0(\theta)P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{A_l = \cancel{\frac{1}{(2l+1)}}\frac{1}{R^{l-1}}\frac{1}{2\epsilon_0}\int_0^{\pi}\sigma_0(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta}$$

Sugestão de problema 3.22 Griffiths
3.23 é bom p/ entender todo o procedimento. (usem o Reitz Milford como referência)

No caso de $\sigma_0(\theta) = k\cos\theta = kP_1(\cos\theta)$, $A_l = B_l = 0 \quad l \neq 1$

$$A_1 = \frac{1}{3\epsilon_0}k$$

$$B_1 = A_1 R^3 \text{ (p. 92)} = \frac{kR^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow \varphi_D = \frac{k}{3\epsilon_0}r\cos\theta$$

$$\varphi_F = \frac{kR^3}{3\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}$$