

# 15 Carga Imagem (Vejam Iertz Milford)

Dado que a solução da equação de Laplace sujeita a condições de contorno de Dirichlet na fronteira é única, se encontramos tal solução, o problema está resolvido.

O método da carga imagem é muito conveniente quando superfícies condutoras aparecem no problema.

Vamos supor que o potencial de um problema posto ser escrito como :

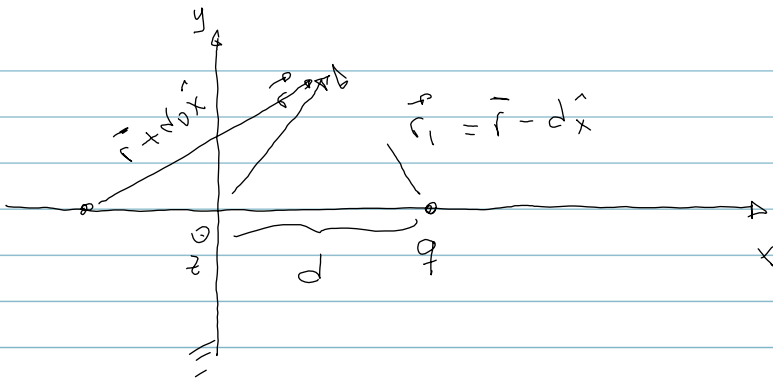
$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_1(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') d\vec{a}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

↙  
potencial facilmente calculável

↘  
potencial advindo das distribuições superficiais de carga nos condutores do problema.

Se pudermos substituir o termo completo da integral por um conjunto de cargas ~~no inte~~ (virtuais) dentro do condutor de tal forma que as equipotenciais das superfícies sejam satisfeitas, resolvemos o problema e podemos inclusive obter a distribuição  $\sigma$  nas mesmas.

Ex. 15.1 Carga  $q$  situada próxima a um plano condutor de dimensão infinita.



↳ plano condutor  $\rightarrow yz$

O potencial no condutor dev ser uma constante (equipotencial)  $\rightarrow \phi_0$

Campo devido a  $q$   $\rightarrow \phi_1(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - d\hat{x}|}$

$$\Rightarrow \phi_1(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 [(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}}$$

Se colocarmos uma carga virtual  $q_v$  em  $x = -d_v$ , o campo dela  $(\text{em } \vec{r})$   $\rightarrow \phi_v$

$$\phi_v(\vec{r}) = \frac{q_v}{4\pi\epsilon_0 [(x+d_v)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}}$$

Em  $x=0$ , onde está o plano, temos o campo total

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(d^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{q_2}{(d_2^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right]$$

Para que  $\varphi(0, y, z) = \varphi_0 = 0$ , basta fazer

$$q_2 = -q \quad \text{e} \quad d_2 = -d$$

Portanto, para o lado direito do problema ( $x > 0$ )

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right]$$

Podemos obter  $\vec{E} = -\nabla\varphi$  p/  $x > 0$ .

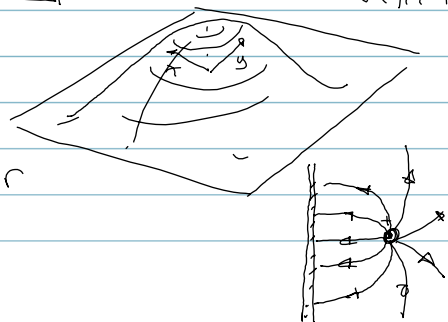
Com  $\vec{E}$ , podemos obter a densidade de carga  $\sigma(y, z)$  no plano condutor

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} \Big|_{x=0} = \epsilon_0 E_x \Big|_{x=0} = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

$$\sigma(y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-(x-d)}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{(x+d)}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right\} \Big|_{x=0}$$

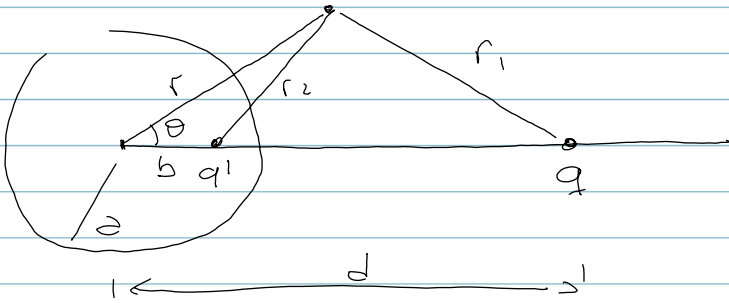
$$\boxed{\sigma(y, z) = -\frac{q d}{2\pi\epsilon_0 (d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}}$$

Máximo da carga negativa induzida na linha perpendicular que om  $q$  ao plano.



Ex. 15.2

Esfera aterrada ( $V=0$ ) e carga  $q$  colocada distante  $d$  do centro da esfera ( $R$  do da esfera =  $a$ )



Lei do cosseno

$$r_1^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta$$

$$r_2^2 = r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta$$

O ~~campo~~ potencial devido a  $q$  em  $\hat{r}$  é

$$\phi_1(r, \theta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}}$$

Uma carga imagem  $q'$  em  $b$  resultaria em  $r$  num potencial

$$\phi_2(r, \theta, \varphi) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta)^{1/2}}$$

Em  $r = a$   $\phi = 0 = \phi_1 + \phi_2$   $r > a$   $\forall \theta$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{1/2}} + \frac{q'}{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)^{1/2}} \right]$$

Notelem que  $q'$  deve ter o sinal oposto a  $q$ .

Também  $\frac{q}{r_1} = -\frac{q'}{r_2}$  p/ que se completam

$$-\frac{q'}{q} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)^{1/2}}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{1/2}}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = \frac{a^2}{d^2} \left( d^2 + \frac{b^2 d^2}{a^2} - 2a \frac{b d^2}{a^2} \cos \theta \right)$$

$$\Rightarrow -\frac{q'}{q} = \frac{a}{d} \frac{\left[ d^2 + \frac{b^2 d^2}{a^2} - 2a \left( \frac{b d^2}{a^2} \right) \cos \theta \right]^{1/2}}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{1/2}}$$

Esta relação fica independente de  $\theta$  se

$$\frac{b^2 d^2}{a^2} = \frac{b d^2}{a^2} = d \Rightarrow \boxed{bd = a^2}$$

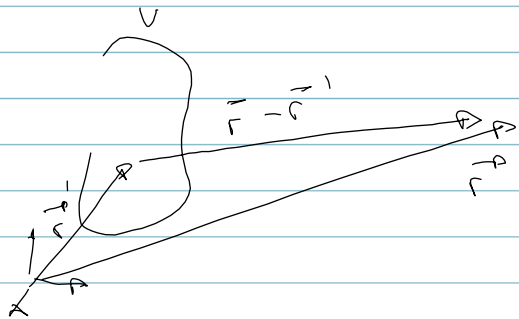
$$-\frac{q'}{q} = -\frac{a}{d} \quad \text{pois } \frac{b^2 d^2}{a^2} = a^2$$

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)} - \frac{a/d}{(r^2 + \frac{a^2}{d^2} - 2r \frac{a^2}{d} \cos \theta)} \right]$$

Sugestão de problemas 3.8 e 3.10  
Gr. Física

## 16. Expansão Multipolar

Dada uma distribuição de cargas em  $\vec{r}'$  com uma densidade  $\rho(\vec{r}')$



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \equiv r \quad [15.1]$$

É interessante calcular o potencial em pontos  $\vec{r}$  distantes da distribuição, de tal forma que  $r \gg r'$  ~~em~~ p/ qualquer  $r'$  da distribuição.

Podemos expandir  $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  em potências de  $r'/r$

Lembramos que (série de Taylor)

$$(1 + \xi)^n = 1 + n(1 + \xi)^{n-1} \Big|_{\xi=0} \xi + \frac{n(n-1)(1 + \xi)^{n-2}}{2!} \xi^2 + \dots$$

$$= 1 + n\xi + \frac{n(n-1)}{2} \xi^2 + \dots \mathcal{O}(\xi^3)$$

Para  $n = -1/2$ , temos:

$$\begin{aligned}
 (1 + \xi)^{-1/2} &= 1 - \frac{\xi}{2} + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2} \xi^2 + \dots \\
 &= 1 - \frac{\xi}{2} + \frac{3}{8} \xi^2 + \dots \quad [16.2]
 \end{aligned}$$

Notem que  $\frac{1}{r} = (r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}')^{1/2}$

$$= \frac{1}{r} (1 + \xi)^{1/2}$$

sendo  $\xi = \frac{r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2}$

Substituindo em [16.2]

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left\{ 1 - \left[ \frac{r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{2r^2} \right] + \frac{3}{8} \left[ \frac{r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right]^2 + \dots \right.$$

Coletando etc termos  $\sim r'^2$

$$\frac{1}{r} \sim \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{3\vec{r} \cdot \vec{r}'^2 - r'^2}{r^2} \right] + \dots \right.$$

Então, voltando a [16.1]

$$\varphi(\vec{r}) \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \left[ \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r'^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \right] + \dots \right.$$

$\rho(\vec{r}') dV'$

O primeiro termo dá:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \rho(\vec{r}') dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} Q_T$$

que é o potencial que obteríamos se toda a carga estivesse na origem. Se  $Q_T = 0$  ->

O segundo termo:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int_V \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV'$$

A média ponderada da carga com a posição é o que aparece na integral. Chamamos de momento de dipolo

$$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV'$$

Se a distribuição não tiver nenhuma "polarização"

$\vec{p}$  é nulo.



O terceiro termo é mais complicado e temos que decompor  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$  nas coordenadas  $x_i$  e  $x'_i$   $x_1 = x$  ;  $x_2 = y$  ;  $x_3 = z$



$$|\vec{r} \cdot \vec{r}'|^2 = (x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3')^2 = \left( \sum_{i=1}^3 x_i x_i' \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j x_i' x_j'$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} \int_V (3 x_i x_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\vec{r}') dV$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Que pode ser escrito como

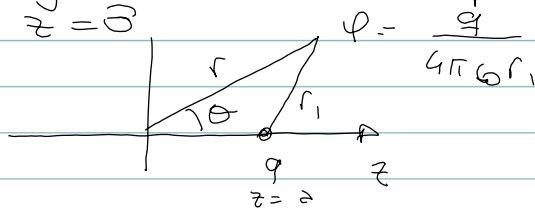
$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij}$$

$Q_{ij}$  é o tensor momento de quadrupolo.

A expansão pode continuar e chegaremos a termo, cada vez mais complexos que refletem detalhes da distribuição de cargas. Notem também que os termos decrescem cada vez mais rápido com  $r$ .

Problema sugerido 3.28 Griffiths

É interessante observar o potencial de duas ~~carregas~~ uma carga cobrada num ponto do eixo  $z$  em  $z = a$



$$r_1 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta$$

$$\varphi_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta)^{-1/2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ 1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{r}\right) \cos \theta \right]^{-1/2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n$$

usei a  
função geradora  
dos pol. nômios  
de Legendre  
de p. 86

pol. nômios de  
Legendre

Se tirarmos uma carga  $-q$  em  $z = -a$

$$\varphi_- = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) (-1)^n \left(\frac{a}{r}\right)^n$$

O potencial total será  $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) + (-1)^{n+1} [1 + (-1)^{n+1}] \left(\frac{a}{r}\right)^n \right]$$

$$1 + (-1)^{n+1} = 0 \text{ se } n = 2s \text{ par } \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

$$2 \text{ se } n = 2s+1 \text{ ímpar}$$

$$\Rightarrow \psi(\vec{r}) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \sum_{s=0}^{\infty} P_{2s+1}(\cos\theta) \left(\frac{a}{r}\right)^{2s+1} \right]$$

$$s=0 \quad \cancel{P_{2s+1}} \quad \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r} P_1(\cos\theta) \frac{a}{r} =$$

$$= \frac{2aq P_1(\cos\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

→ momento de dipolo  $p = 2aq$

Os termos vão se somando sucessivamente e vemos que sua contribuição é cada vez menor  $p/r \gg a$ .