

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\sum_{s=0}^{\infty} P_{2s+1}(\cos\theta) \left(\frac{a}{r}\right)^{2s+1} \right]$$

$$s=0 \quad \cancel{P_1} \quad \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r} P_1(\cos\theta) \frac{a}{r} =$$

$$= \frac{2aq P_1(\cos\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{(\vec{p}) \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} \quad \leftarrow \text{momento do dipolo } \vec{p} = 2aq \vec{d}$$

Os termos vão se complicando sucessivamente e vemos que sua contribuição é cada vez menor p/ $r \gg a$. Notamos que a distribuição complexa de p. 101 resulta num potencial igual ao dipolo ideal. Voltando à contribuição do dipolo conforme escrito na página 101, é interessante calcular o campo elétrico relacionado com este termo

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E} = \nabla\phi - \nabla\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right)$$

$$\text{Agora } \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$$

Seguim $\vec{A} = \vec{p}$ e $\vec{B} = \vec{r}/r^3$, temos

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[(\vec{p} \cdot \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{p} \times \left(\nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right] = 0$$

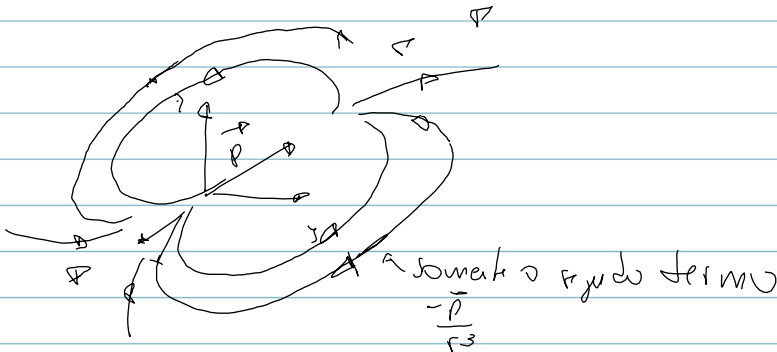
$$\bar{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i p_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\sum_j \hat{x}_j \hat{x}_j}{r^3} \right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i p_i \left[\frac{\hat{x}_i}{r^3} - \frac{3 \sum_j \hat{x}_j \hat{x}_j x_i}{r^5} \right]$$

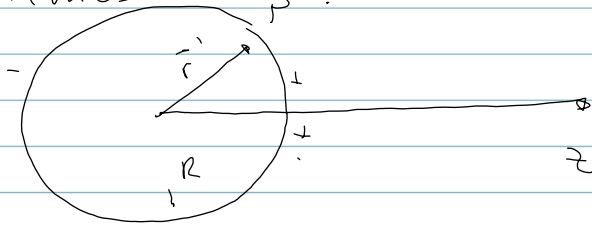
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{3 \sum_i p_i x_i}_{\vec{p} \cdot \vec{r}} \underbrace{\left(\sum_j \hat{x}_j \hat{x}_j \right)}_{\vec{r}^2} - \underbrace{\left(\sum_i p_i \hat{x}_i \right)}_{\vec{p}} \right]$$

$$\boxed{\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]}$$

Temos dois termos: o primeiro que é máximo na direção \vec{r} com componente igual à projeção de \vec{r} em \vec{p} , sendo máximo quando $\vec{p} \parallel \vec{r}$. O segundo constante (relativo com \vec{r}) na direção de \vec{p} e negativo.



Ex 16.9 Seja $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ (esfera) com forma no problema da esfera num campo uniforme. Encontremos



$$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV'$$

Neste caso temos somente uma carga esférica. A integral é na superfície.

$$\vec{p} = \int_S \sigma(\vec{r}') \vec{r}' dV' = \sigma_0 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\cos\theta(\vec{r}')) R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} = R \sin\theta \cos\varphi \hat{x} + R \sin\theta \sin\varphi \hat{y} + R \cos\theta \hat{z}$$

$$\vec{p} = R \sigma_0 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[R \sin\theta \cos\varphi \hat{x} + R \sin\theta \sin\varphi \hat{y} + R \cos\theta \hat{z} \right] \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\vec{p} = 12 \sigma_0 2\pi \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta \quad \xi \equiv \cos\theta$$

$$\vec{p} = \hat{z} R^3 \sigma_0 2\pi \int_{-1}^1 \xi^2 d\xi = \hat{z} R^3 \sigma_0 2\pi \left. \frac{\xi^3}{3} \right|_{-1}^1$$

$$\vec{p} = \frac{4\pi\sigma_0 R^3}{3} \hat{z} M$$

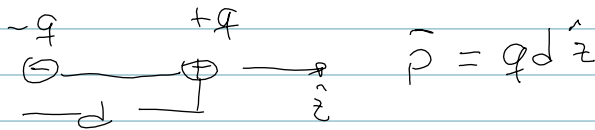
17 Campos elétricos na matéria.

Vimos que sob efeito de um campo uma distribuição de cargas pode resultar como ocorre na esfera condutora sob um campo uniforme na direção z .

Aquela distribuição de cargas (mesmo ~~em~~ quanto a carga líquida total) é ~~uma~~ leve um potencial distante

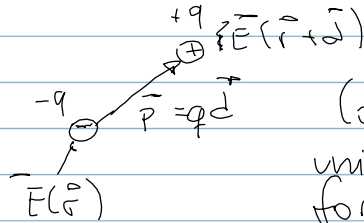
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}, \quad \vec{p} \equiv \int_V \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV'$$

Muitas vezes simplificamos e utilizamos \vec{p} com aquele de um dipolo ideal, como vimos na página 104.



Um material pode ter partes condutoras (cargas livres) e cargas ligadas (como os elétrons nos átomos ou moléculas ou elétrons num sólido). Nesses casos a carga não é ~~em~~ livre, mas a aplicação de um campo causa uma distorção (e deslocamento) entre cargas positivas

e negativas, gerando dipolos locais.
 Além deste deslocamento pode haver alinhamento dos dipolos



O dipolo se mantém unido devido outras forças microscópicas não consideradas aqui

A força total sobre o dipolo é

$$\vec{F} = q \vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) - q \vec{E}(\vec{r})$$

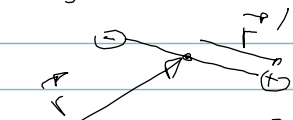
Se d é muito pequeno $\vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) = E_x(\vec{r} + \vec{d}) \hat{x} + E_y(\vec{r} + \vec{d}) \hat{y} + E_z(\vec{r} + \vec{d}) \hat{z}$

$$E_x(\vec{r} + \vec{d}) = d \cdot \nabla E_x + E_x(\vec{r})$$

o mesmo vale para as outras

$$\text{Então } \vec{F} = q(\vec{d} \cdot \nabla) \vec{E} \Rightarrow \vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}$$

O torque total é igual ao torque de \vec{F} sobre o centro de massa do dipolo mais o torque com respeito ao centro do dipolo.



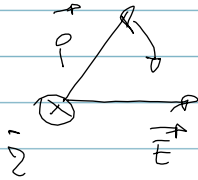
$$CM: \vec{\tau}_{cm} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}' \times [E(\vec{r} + \vec{d})q - E(\vec{r})q]$$

$$\vec{E}(\vec{r}) + \vec{d} \cdot \nabla) \vec{E}$$

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= q \vec{r}' \times \vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) - q (-\vec{r}') \times \vec{E}(\vec{r}) \\ &= \cancel{2q} \vec{r}' \times \vec{E}(\vec{r}) + q \vec{r}' \times (\vec{d} \cdot \nabla) \vec{E} \\ &= \vec{p} \times \vec{E} + \vec{r}' \times \vec{F} \end{aligned}$$

~~(desprezando a
variação de \vec{E})~~



torque para dentro
tentar girar \vec{p} no
sentido horário para
alinhá-lo o dipolo
com o campo.

De forma geral, com aplicação de um campo,
formam-se dipolos na matéria dados por

$$\vec{p} = \sigma \vec{E}, \text{ sendo } \sigma \text{ um tensor}$$

de polarização. Ou seja \vec{p} não é necessariamente
paralelo a \vec{E} .

Também, a matéria pode ter ^{dipolos} ~~campos~~ ^{formas}
neutras que não se "apagam" quando \vec{E} vá
a zero \rightarrow ferroeletricidade
Por fim podem haver situações com \vec{E}
muito altas que efeitos não lineares (
dependência com a amplitude das componentes
do campo). Nos restringiremos aos casos
lineares.

17.2 Polarização

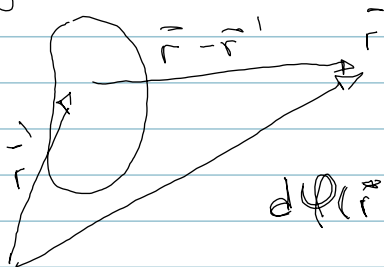
Se fizermos uma média num volume pequeno o suficiente para utilizarmos cálculo diferencial e grande o suficiente para não incluir a detalhes microscópicos da distribuição de carga, podemos obter uma polarização média por unidade de volume

$$\vec{P} = \frac{1}{V'} \int \vec{p}(\vec{r}') dV' \quad \text{com } V' \rightarrow 0$$

$$\text{Ou seja } d\vec{p} = \vec{P} dV$$

\vec{P} é o momento de dipolo total num certo ponto, por unidade de volume.

Dado um certo volume da matéria que tem uma polarização $\vec{P}(\vec{r}')$, o potencial gerado para $\vec{r} \gg$ dimensões da distribuição é



O potencial em \vec{r} devido a um dipolo $\vec{P}(\vec{r}') dV'$ é

$$\begin{aligned} d\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{P}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{r^3} \end{aligned}$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}(\vec{r}') dV'}{r^3}$$

Lembramos que $\nabla' \frac{1}{r} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ (p. 30 e p. 31)

$$\vec{P} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{P} \cdot \left(\nabla' \frac{1}{r} \right)$$

$$\text{Logo} \Rightarrow \nabla' \cdot (f \vec{F}) = f \nabla' \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla' f$$

Seja $\vec{F} \equiv \vec{P}$ e $f = 1/r$

$$\nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) = \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{P} + \vec{P} \cdot \left(\nabla' \frac{1}{r} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{P} \cdot \left(\nabla' \frac{1}{r} \right) = \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) - \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{P}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) dV' + \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{r} dV' \right]$$

Usando o teorema do divergente no primeiro termo:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_S \frac{\vec{P} \cdot \hat{n}}{r} dA' + \int_V \left(-\frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{r} \right) dV' \right]$$

O potencial em \vec{r} é idêntico àquele dado por uma densidade superficial de carga e volumétrica de carga dadas por:

$$Q_p \equiv \vec{P} \cdot \hat{n} = P_n \quad \text{e} \quad \rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Ex. 17.2.1 Campo de uma esfera (R) polarizada uniformemente (fora da esfera) com $\vec{P}_0 = P_0 \hat{z}$ (\vec{r}' calculado na origem $\vec{r} = \vec{r}' = \vec{r}$)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_0 = 0 \Rightarrow \text{carga zero}$$

O problema é o de calcular o potencial de uma esfera com carga nula no interior e carga $P_0 \cos \theta$ na superfície. Isso foi feito na página 92 - 93

$$A_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_0^\pi \frac{P_0(\theta) P_e(\cos\theta) \sin\theta d\theta}{r^2}$$

$$P_0 = P_0 \cos\theta = P_0 P_1(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow A_e = 0 \quad \text{p/ } l \neq 1$$

$$A_1 = \frac{P_0}{3\epsilon_0} \Rightarrow \text{carga zero}$$

$$B_1 = A_1 R^3 = \frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0} \quad \varphi(\vec{r}) = \frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} \quad r > R$$

Se calculássemos dentro da esfera (apesar de que não é de termos mencionado que \vec{r}' está fora)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos\theta \quad r \leq R$$

$$\text{dentro da esfera } \varphi = \frac{P z}{3\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (\text{uniforme})$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\bar{P} \cdot \vec{r} R^3}{360 r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4\pi R^3 \bar{P}}{3} \right) \cdot \frac{1}{r}$$

\bar{P} é polarização uniforme
então este campo é igual
àquele de um dipolo no eixo z
 $\bar{P} = \text{Vol} \times \bar{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 \bar{P}$
