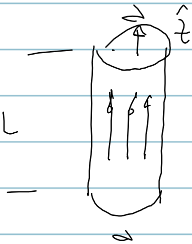
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\bar{P}\cdot\vec{r}\,R^3}{3\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{4\pi R^3\vec{P}}{3}\right)\cdot\vec{r}$$

$\bar{P}$ é polarização uniforme
então este campo é igual
àquele de um dipolo na origem
$\bar{p} = \text{Vol} \times \bar{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \bar{P}$

Sug. problema 4.10
Griffiths

Ex 17.2.2 Eletreto

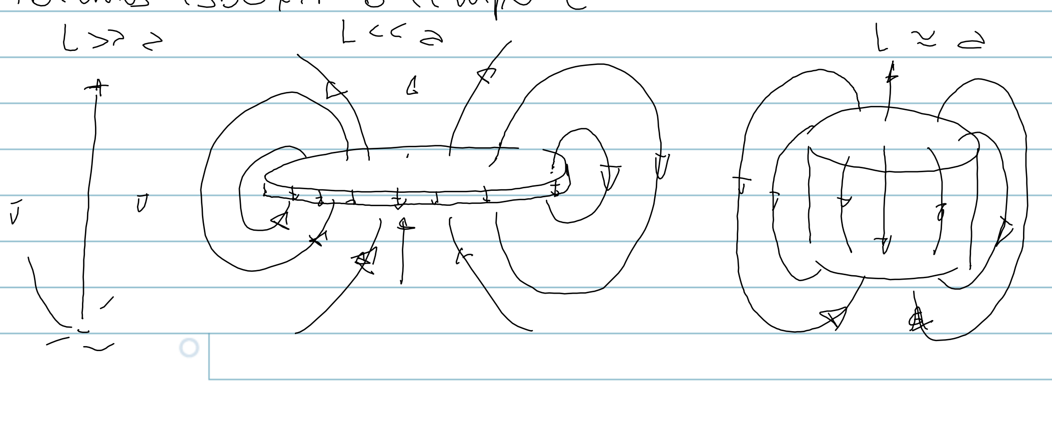


$\vec{P} = P_0\hat{z}$ dentro do cilindro.

$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\bar{P} = 0 \qquad \sigma_p = \bar{P}\cdot\hat{n}$

Teremos σ_p nas duas tampas $\quad \sigma_p = +P_0$ (em cima)
$\sigma_p = -P_0$ (em baixo)

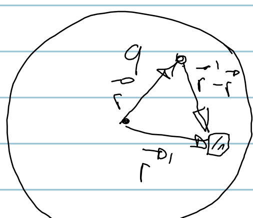
Podemos esboçar o campo $\vec{E}$:



Notem que nos dois exemplos acima usamos as cargas de polarização que, de fato, decorrem de acúmulo no volume quando $\vec{P}$ não é uniforme ou nas superfícies, para calcular $\vec{E}$ mesmo dentro do dielétrico. Isto é válido, mas deve ser examinado com mais detalhe porque não é nem um pouco intuitivo. A seção 4.2.3 do Griffiths trata deste problema que tentarei auxiliar aqui.

Consideremos que queremos calcular $\vec{E}$ (ou φ) num ponto $\vec{r}$, dentro de um dielétrico. Ocorre que dentro deste há uma distribuição de cargas complexa com detalhes microscópicos que talvez não nos interesse. Busquemos uma média de $\vec{E}$ (ou φ) numa esfera em torno de $\vec{r}$. Esta esfera é grande de tal forma que contenha muitas 'moléculas', mas pequena para pensarmos que $\vec{P}$ é razoavelmente uniforme dentro dela.

Consideremos o problema de calcular a média do campo elétrico numa esfera devido a uma carga q colocada num ponto $\vec{r}$ qualquer



$$\vec{E} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \, dv'$$

Se tivéssemos uma densidade de cargas uniforme na esfera, poderíamos calcular o campo elétrico em $\vec{r}$ usando a lei de Gauss.

$$\vec{E}_D = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r} \qquad |\vec{r}| < R$$

$$\vec{E}_F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\rho \frac{4}{3}\pi R^3\right)\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad |\vec{r}| > R$$

Ocorre que poderíamos calcular tanto $\vec{E}_D$ como $\vec{E}_F$ diretamente (sem a lei de Gauss)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\rho\, dv'$$

$$= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, dv'$$

Notem que esta expressão é idêntica a da página 114 se fizermos:

$$\rho = -\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Ou seja, o campo médio de uma carga em $\vec{r}$ numa esfera é:

$$|\vec{r}| < R \qquad \vec{E} = -\frac{q\,\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$|\vec{r}| > R \qquad \vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$

Se pensarmos no campo médio (na esfera) devido a uma distribuição qualquer de cargas, podemos usar o princípio de superposição.
Então, $\vec{E}$ tem duas contribuições:

(1) Cargas dentro da esfera

$$\vec{E} = -\frac{\left(\sum_i q_i \vec{r}\right)_{esfera}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{-\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

$$\left[\, \vec{P} = \vec{p}\,/\,(4\pi R^3/3) \,\right]$$

O campo médio devido a qualquer distribuição de cargas na esfera é igual a $-1/3\epsilon_0$ da polarização uniforme da esfera.

(2) Cargas fora da esfera

$$\vec{E} = -\frac{\sum q_i \vec{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Ou seja o campo médio de todas as cargas fora da esfera é igual ~~ao~~ à soma de todos os campos que elas produzem no centro da esfera.

Voltando ao problema do dielétrico, o campo a ser calculado num ponto $\vec{r}$ terá contribuições de fora da esfera em torno de $\vec{r}$ e de dentro da esfera. Pensemos no potencial:

$$\bar{E} = \bar{E}_{fora} + \bar{E}_{dentro} \quad ; \quad V = V_{fora} + V_{dentro}$$

$$V_{fora} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{fora} \frac{\hat{r} \cdot \bar{P}(\bar{r}')\, d\tau'}{r^2}$$ como já vimos.

~~Dentro da esfera~~ Considerando a contribuição das cargas dentro da esfera, teríamos

$$\bar{E} = -\frac{\bar{P}}{3\epsilon_0}$$

Ocorre que este é exatamente o valor que obtemos para uma esfera com polarização uniforme, usando intrinsicamente a integração

$$V_{dentro} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{dentro} \frac{\hat{r} \cdot \bar{P}(\bar{r}')\, d\tau'}{r^2} \qquad (\text{Ex. } 17.2.1)$$

Portanto, mesmo dentro do dielétrico podemos usar

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{r} \cdot \bar{P}(\bar{r}')\, d\tau'}{r^2}$$ p/ calcular o campo elétrico

17.3 Deslocamento elétrico.

Vimos que a polarização leva às cargas ligadas
$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$ e $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$

Dentro do dielétrico, longe das superfícies, a densidade de cargas será $\rho = \rho_p + \rho_e$

onde ρ_e são as cargas livres sobre as quais temos controle.

A lei de Gauss diz $\epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho = \rho_e + \rho_p = \rho_e - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}$

$$\Rightarrow \cancel{\epsilon_0}\, \vec{\nabla}\cdot\Big(\underbrace{\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}}_{\equiv \vec{D}}\Big) = \rho_e$$

$\equiv \vec{D}$ deslocamento elétrico

A lei de Gauss fica $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_e$

e na forma integral $\oint \vec{D}\cdot d\vec{A} = Q_{e\,enc}$

Apesar da expressão similar $\vec{D}$ é bastante diferente de $\vec{E}$.

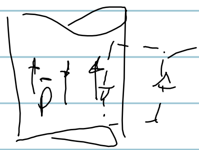
Por exemplo $\vec{\nabla}\times\vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla}\times\vec{E} + \vec{\nabla}\times\vec{P}$

Em eletrostática $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$, mas $\vec{\nabla}\times\vec{D} = \vec{\nabla}\times\vec{P}$
ou seja $\vec{D}$ não pode ser obtido de um potencial escalar e não existe uma lei de Coulomb para $\vec{D}$. Há casos em que $\vec{\nabla}\times\vec{P} = 0$. Nestes casos, o

problema é mais simples. Em geral, temos que lembrar que ρ_L e $\vec{\nabla} \times \vec{P}$ são fontes de $\vec{D}$.

Ex. 17.3.1 Caso do eletreto, não há ~~certo~~ cargas livres, se usássemos a lei de Gauss diretamente poderíamos concluir que $\vec{D} = 0$ em todo espaço. Então dentro do cilindro $\vec{E} = -\epsilon_0 \vec{P}$ e fora $\vec{E} = 0$, mas não é o caso!

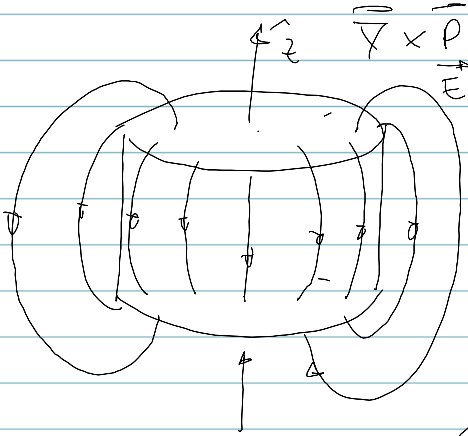
De fato $\vec{\nabla} \times \vec{P}$ não é nulo nos lados do cilindro

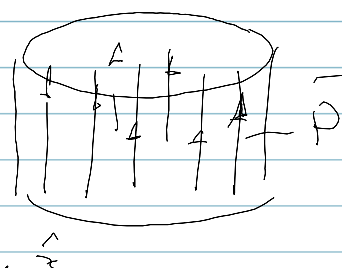


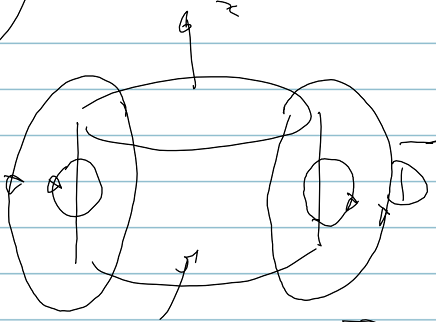
$$\oint \vec{P} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

$$\Rightarrow \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{P}) \cdot d\vec{A} \neq 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{P} \neq 0$$





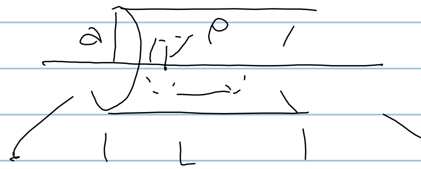


onde $\vec{\nabla} \times \vec{P} = 0$ $\quad \vec{D} = 0$ mas

$\nabla \cdot \ = 0$

Ex. 17.3.2 (exemplo 4.4 Griffiths)

Fio longo



densidade λ uniforme

Sup. Gaussiana

Como o campo do fio é radial, vemos por simetria que a polarização deve ser radial também. Neste caso $\vec{\nabla} \times \vec{P} = 0$

Usando a lei de Gauss temos

$\vec{D} = D(\rho)\,\hat{\rho} \Rightarrow D\,(2\pi\rho L) = \lambda L$

$\vec{D} = \dfrac{\lambda}{2\pi\rho}\,\hat{\rho}$; isto vale para qualquer ρ.

Como obter $\vec{E}$?

$\rho > a$; $\vec{P} = 0 \Rightarrow \epsilon_0 \vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\rho}\,\hat{\rho}$

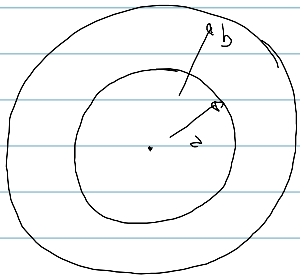
$\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\rho\,\epsilon_0}\,\hat{\rho}$

$\rho < a$; Não sabemos $\vec{P}$, então não podemos obter $\vec{E}$.

Obs: Veremos mais tarde → se $\vec{P} = f(\vec{E})$ poderemos obter $\vec{E}$

Prob. sugerido : 4.15 Griffiths
4.16 (a)

Problema n. 3.1 (4.15)



- $\vec{P}(\vec{r}) = \frac{k}{r}\,\hat{r}$

(radial ; $\vec{\nabla}\times\vec{P} = 0$)

(Não há carga livre)

(a) Cargas

superficiais $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$

Em $r = a$ $\quad \sigma_p = -\frac{k}{a}$

$Q_T = -\frac{k}{\cancel{a}} \cdot 4\pi a^{\cancel{2}}$

Em $r = b$ $\quad \sigma_p = \frac{k}{b}$

$Q_T = \frac{k}{\cancel{b}} \cdot 4\pi b^{\cancel{2}}$

volume $\quad \rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\vec{\nabla}\left(\frac{k\,\vec{r}}{r^2}\right) = -k\left(\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{r}}{r^2} + \vec{r}\,\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)$

$\rho_p = -k\left[\frac{3}{r^2} + \vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\left(\frac{-2}{r^2}\right)\right] = -\frac{k}{r^2}$

$\vec{E} = E(r)\,\hat{r} \Rightarrow \oint_{esfera} \vec{E}\cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 E(r)$

$r < a \quad \vec{E}(\vec{r}) = 0$

$a < r < b \quad 4\pi r^2 E(r)\epsilon_0 = -4\pi k a - \int_a^r \frac{4\pi \cancel{r^2} k}{\cancel{r^2}}\, dr$

$\cancel{4\pi} r^2 E(r)\epsilon_0 = -\cancel{4\pi} k r \Rightarrow \vec{E} = -\frac{k\,\hat{r}}{\epsilon_0\, r}$

$r > b \qquad 4\pi r^2 E(r)\epsilon_0 = -4\pi k a + 4\pi k b + \int_a^b 4\pi r'^2 \left(\frac{-k}{r'^2}\right) dr'$

$= 0$

$\vec{E} = 0$

(b) $q_e = 0 \Rightarrow \vec{D} = 0$ em todo espaço

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$\Rightarrow r < a \qquad \vec{D} = 0;\ \vec{P} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$

$a < r < b \qquad \vec{D} = 0;\ \vec{P} = \frac{k}{r}\hat{r} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{k\hat{r}}{\epsilon_0 r}$

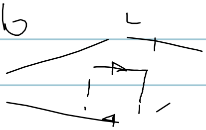
$r > b \qquad \vec{D} = 0;\ \vec{P} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$

17.4 Condições de contorno

Conforme vimos na p. 70, podemos repetir o procedimento aqui, usando a lei de Gauss para $\vec{D}$.

$$(\vec{D}_{acima} - \vec{D}_{abaixo}) \cdot \hat{n} = \sigma_e$$

Paralelo



$$(\vec{D}_{\parallel\, acima} - \vec{D}_{\parallel\, abaixo}) \cdot L =$$

$$= \oint \vec{D} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{D}) \cdot d\vec{A} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{P}) \cdot d\vec{A}$$

$$= \oint \vec{P} \cdot d\vec{l} = \vec{P}_{\parallel\, acima} - \vec{P}_{\parallel\, abaixo}$$

Problema 4.17 (Griffiths)

Lembramos que ainda $(\vec{E}_{acima} - \vec{E}_{abaixo}) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

e $\vec{E}_{\parallel acima} - \vec{E}_{abaixo} = 0$

17.5 Dielétricos lineares

Conforme falamos antes há casos em que a polarização depende linearmente de $\vec{E}$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \bar{\chi}_e \vec{E}$$

$\bar{\chi}_e$ → suscebilidade

→ tensor de polarização

$\vec{P}$ em geral não é paralelo a $\vec{E}$

Como $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 (1 + \bar{\chi}_e) \vec{E}$

No caso de $\bar{\chi}_e \equiv \begin{pmatrix} \chi_e & 0 & 0 \\ 0 & \chi_e & 0 \\ 0 & 0 & \chi_e \end{pmatrix}$ $\quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$, $\vec{P} \parallel \vec{E}$

$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E} \qquad \epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$

$\vec{D}$ é paralelo a $\vec{E}$ e são proporcionais

ϵ é a permissividade do material. No vácuo $\chi_e = 0$

$\Rightarrow \epsilon = \epsilon_0$

Podemos também definir a permissividade relativa

$$\epsilon_r \equiv \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e$$

Voltemos ao exemplo 17.3.2

Obtivemos que $\bar{D} = \dfrac{\lambda}{2\pi\rho}\hat{\rho}$ em todo espaço

Se o meio for linear (não tensorial) $\bar{D} = \epsilon\vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\rho\,\epsilon}\hat{\rho} \quad e \quad \bar{P} = \frac{\lambda\epsilon_0\,\chi_e}{2\pi\rho\,\epsilon}\hat{\rho}$$