

Voltemos ao exemplo 17.3.2

Obtivemos que $\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi\rho} \hat{\rho}$ em todo espaço

Se o meio for linear (não tensorial) $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\rho\epsilon} \hat{\rho} \quad \text{e} \quad \vec{P} = \frac{\lambda\epsilon_0\chi_e}{2\pi\rho\epsilon} \hat{\rho}$$

Nos casos longe das interfaces, considerando o caso linear, vemos que dado um campo \vec{E} $\vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}$

Sabemos que em eletrostática $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{P} = \epsilon_0\chi_e \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Neste caso $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e$ e $\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0$

$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ e o campo elétrico de uma carga q em \vec{r}' é

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} \quad \vec{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{q \hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q \hat{r}}{r^2}$$

As cargas livres são "blindadas" pelos dipolos induzidos e o campo é reduzido por $\frac{\epsilon_0}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon_r}$

No caso de capacitores com dielétricos inseridos entre as placas condutoras, o campo é reduzido por um fator ϵ_r

$$\text{Como } V = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

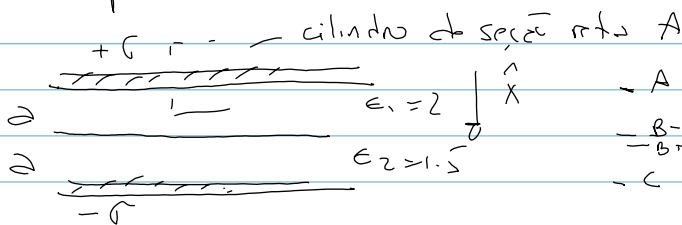
$$V_{\text{DIELETRICO}} = \frac{V_{\text{VACUO}}}{\epsilon_r}$$

Como $C = \frac{Q}{V}$; a mesma quantidade de carga resulta num V menor

$$C_{\text{VACUO}} \quad C_{\text{DIELETRICO}} = \frac{Q}{V_{\text{DIELETRICO}}} = \frac{Q}{\frac{V_{\text{VACUO}}}{\epsilon_r}} = \epsilon_r C_{\text{VACUO}}$$

$$\Rightarrow C_{\text{DIEL}} = C_{\text{VACUO}} \epsilon_r$$

Ex. problema 4.18 (Griffiths)



(2) Usando a lei de Gauss p/ \vec{D}

$$\vec{D} = D \hat{x}; \text{ no cilindro } \oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = DA = \sigma A$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \sigma \hat{x}$$

$$(b) \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} \quad (1) \vec{E}_1 = \frac{\sigma \hat{x}}{\epsilon_1 \epsilon_0} = \frac{\sigma \hat{x}}{2 \epsilon_0}$$

$$(2) \vec{E}_2 = \frac{\sigma \hat{x}}{\epsilon_2 \epsilon_0} = \frac{\sigma \hat{x}}{1.5 \epsilon_0}$$

(c) Duas maneiras:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0) \vec{E}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0) \frac{\sigma \hat{x}}{\epsilon_i}$$

$$\vec{D} = \epsilon_i \vec{E}_i \quad \vec{P}_i = (1 - \epsilon_0/\epsilon_i) \sigma$$

$$(1) \vec{P} = (1 - \epsilon_0/\epsilon_1) \sigma \hat{x} = (\sigma/2) \hat{x}$$

$$(2) \vec{P} = (1 - \epsilon_0/\epsilon_2) \sigma \hat{x} = (\sigma/3) \hat{x}$$

(A outra via $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$, sendo $\chi_e = (\epsilon/\epsilon_0 - 1)$)

$$(d) V = \vec{E}_1 a + \vec{E}_2 b = a (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = a \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{2\sigma}{3} \right)$$

$$V = \frac{2\sigma}{6} (3+4) \Rightarrow V = \frac{7}{6} a \sigma$$

$$(e) A \rightarrow \sigma_A = \sigma (1) \hat{x} \cdot (-\hat{x}) = -\sigma/2$$

$$B_- \rightarrow \sigma_{B_-} = \sigma/2$$

$$B_+ \rightarrow \sigma_{B_+} = -\frac{2\sigma}{3} \quad \left. \vphantom{\sigma_{B_+}} \right\} \sigma_B = +\sigma/6$$

$$C \rightarrow \sigma_C = 2\sigma/3$$

$$(f) x de A \rightarrow \sigma_T = \sigma - \sigma/2 = \sigma/2$$

$$\vec{E} = (\sigma/2\epsilon_0) \hat{x}$$

$$x de B \rightarrow 2a \quad \sigma_T = \sigma - \sigma/2 + \sigma/6 = 2\sigma/3$$

$$\vec{E} = (\sigma/1.5\epsilon_0) \hat{x}$$

Problemas sugeridos 4.19 e 4.21

17.6 Problemas de contorno

No caso de dielétricos lineares, podemos obter as cargas ligadas a partir das livres

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \quad ; \quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad ; \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{D}$$

$$\rho_p = -\frac{\epsilon_0 \chi_e}{\epsilon} \nabla \cdot \vec{D} \quad ; \quad \text{Mas} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_e$$

$$\rho_p = -\frac{\epsilon_0 \chi_e}{\epsilon} \rho_e = -\frac{\epsilon_0 \chi_e}{\epsilon_0 (1 + \chi_e)} \rho_e = -\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \rho_e$$

(Lembramos que $\nabla \times \vec{P} = 0$). Portanto, é menos que haja cargas livres no material (interior)

$\rho_p = 0$ e $\rho_e = 0$. Ou seja só haverá

cargas ligadas nas superfícies. No interior $\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla^2 V = 0$

Dentro destes materiais a eq. de Laplace é válida p/ obtermos V . Nas interfaces agora

$$\vec{D}_{acima} - \vec{D}_{abaixo} \cdot \hat{n} = \sigma_e$$

$$(\epsilon_{acima} \vec{E}_{acima} - \epsilon_{abaixo} \vec{E}_{abaixo}) \cdot \hat{n} = \sigma_e$$

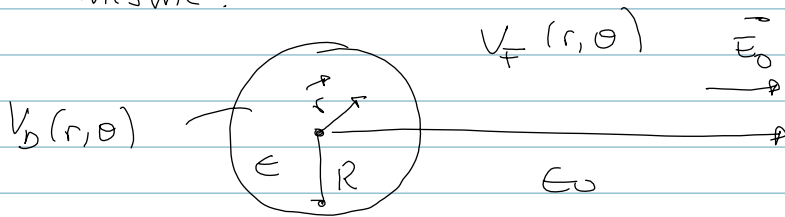
$$\boxed{\epsilon_{acima} \frac{\partial V_{acima}}{\partial n} - \epsilon_{abaixo} \frac{\partial V_{abaixo}}{\partial n} = -\sigma_e}$$

$$\text{e } \boxed{V_{acima} = V_{abaixo}}$$

17.6.1 (Exemplo 4.7 Griffiths)

Esfera de material dielétrico linear inserida em um campo elétrico uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$ (sem cargas livres). (Raio R)

Temos que resolver a eq. de Laplace dentro e fora da esfera μ que diferentemente do caso de esfera condutora, $\vec{E} \neq 0$ no interior da mesma.



Condições de contorno

$$(1) \quad V_D(R, \theta) = V_F(R, \theta)$$

$$(2) \quad \epsilon \left. \frac{\partial V_D}{\partial r} \right|_R = \epsilon_0 \left. \frac{\partial V_F}{\partial r} \right|_R$$

$$(3) \quad V_F \rightarrow -E_0 r \cos \theta \quad (r \gg R) \quad - \vec{E} = E_0 \hat{z}$$

$$V_D = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

$$V_F = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

termos $va \rightarrow 0$ $pl r \gg R$
por isto temos

ou seja, é uma implicação de (3)

A condição de contorno (1) dá:

$$\sum A_l R^l P_l(\cos\theta) = -E_0 R \cos\theta + \sum \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$$l=1 \quad A_1 R = -E_0 R + \frac{B_1}{R^2}$$

$$l \neq 1 \quad A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}} \Rightarrow B_l = A_l R^{2l+1}$$

A condição (2) dá:

$$\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} \sum A_l l R^{l-1} P_l(\cos\theta) = -E_0 \cos\theta - \sum \frac{(l+1) B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos\theta)$$

$= \epsilon_r$

$$l=1 \quad \epsilon_r A_1 = -E_0 - \frac{2B_1}{R^3}$$

$$l \neq 1 \quad A_l l R^{l-1} = \frac{-(l+1) B_l}{R^{l+2}} \Rightarrow B_l = -\frac{A_l l}{l+1} R^{2l+1}$$

As condições para $l \neq 1$ só são satisfeitas se $A_l = B_l = 0$ pois de outra forma $-l = l+1$!

$$\text{Para } l=1, \text{ temos } \begin{cases} A_1 R = -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} \\ \epsilon_r A_1 = -E_0 - \frac{2B_1}{R^3} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $A_1 = \frac{-3}{\epsilon_r + 2} E_0$

$$B_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 E_0$$

$$V_{\text{dentro}} = - \frac{3E_0 r \cos\theta}{\epsilon_r + 2} = - \frac{3E_0 z}{\epsilon_r + 2}$$

→ campo uniforme $\vec{E} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0$ (uniforme)

$$V_F = -E_0 r \cos\theta + \frac{B_1}{r} \cos\theta$$

$$= \left[-E_0 r + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{R^3 E_0}{r^2} \right] \cos\theta$$

$$= \left[\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{R^3}{r^3} - 1 \right] E_0 z$$

A polarização da esfera é $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$

$$\chi_e = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) = (\epsilon_r - 1)$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{3}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0$$

Finalmente $\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{D}_{\text{dentro}} = \frac{\epsilon 3}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0$

Problema sugerido 4.24

Figura do exemplo 17.6.1

