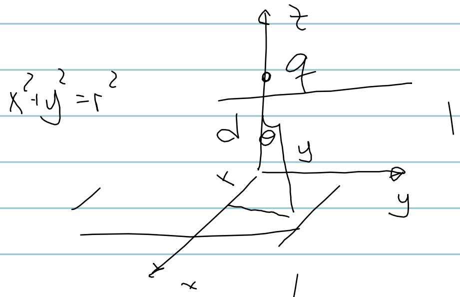
17.6.2

É interessante vermos o exemplo 4.8 do Griffiths.

Uma carga q é colocada a uma distância d de um plano (em x-y)



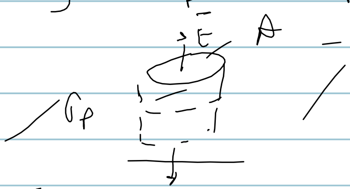
meio dielétrico linear

Como o meio dielétrico é linear, vimos que $\rho_p = 0$ pois $\rho_\ell = 0$

Portanto, a carga ~~pq~~ q induzirá uma carga de polarização $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{z} = P_z = \epsilon_0 \chi_e E_z$

Notem que neste caso na interface $\vec{\nabla}\times\vec{P} \neq 0$. Então temos que ser cautelosos em obter $\vec{E}$. O campo $\vec{E}$ na superfície tem contribuições da carga q e da carga superficial σ_p.

Bem próximo da interface $(z \to 0)$ num certo ponto (x, y) $\sigma_p \sim$ uniforme. Usando a lei de Gauss



$$2AE_z = \sigma_p A/\epsilon_0$$
$$E_z = \sigma_p/2\epsilon_0$$

Se $q>0$, $\sigma_p<0$ (força sobre q é atrativa)

Dentro do dielétrico $(z \sim -\epsilon,\ \epsilon \to 0)$, teremos

$$E_z\Big|_{z=-t} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (r^2+d^2)^2}\cos\theta - \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0}$$

$$\cos\theta = \frac{d}{(x^2+y^2+d^2)^{1/2}} = \frac{d}{(r^2+d^2)^{\cancel{3}1/2}}$$

$$E_z\Big|_{z=-t} = -\frac{q\,d}{4\pi\epsilon_0 (r^2+d^2)^{3/2}} - \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0}$$

Portanto:

$$\sigma_p = \epsilon_0 \chi_e E_z = -\frac{\chi_e\, q\, d}{4\pi (r^2+d^2)^{3/2}} - \frac{\chi_e \sigma_p}{2}$$

$$2\sigma_p + \chi_e\sigma_p = -\frac{\chi_e\, q\, d}{2\pi (r^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\sigma_p = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)\frac{q\,d}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

Com σ_p podemos obter o campo $\bar{E}$ em todo lugar:

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\hat{r}}{r^2}\sigma_p\, da$$

$$\begin{cases} \xi = r^2 + d^2 \\ d\xi = 2r\,dr \end{cases}$$

A carga total induzida é:

$$\int \sigma_p\, da_{plano} = \int_0^\infty \sigma_p\, 2\pi r\, dr = -q\,d\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)\int_0^\infty \frac{r\,dr}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

$$= -q\,d\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)\frac{1}{2}\int_{d^2}^\infty \frac{d\xi}{\xi^{3/2}} = -q\,d\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)\left(-\frac{1}{d}\right)$$

$$= -q\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)$$

Na página 96 obtemos uma expressão semelhante sem o termo $\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)$ para o caso do condutor.

De fato no condutor a carga total induzida é $-q$. No caso do dielétrico,

$$Q_{ind} = -\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right) q$$

. Ou seja é como se o condutor tivesse $\chi_e \to \infty$.

17.6.3
~~17.6.3~~ Carga imagem com dielétricos.

Se tentarmos resolver o problema acima pensando como fizemos para condutores tentaríamos uma solução para $z>0$ ~~onde~~ com q em $z=d$ e q_p em $z=-d$.

$$V_{z+} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{[r^2+(z-d)^2]^{1/2}} + \frac{q_p}{[r^2+(z+d)^2]^{1/2}}\right]$$

Se assim fizermos, em $z=0$ o potencial seria:

$$V(z=0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(q+q_p)}{[r^2+z^2]^{1/2}}$$

Como o potencial é contínuo, deveríamos ter um V para $z<0$ que levasse ao mesmo valor de $V_{z<0}(z=0) = V_{z>0}(z=0)$

Isto seria satisfeito se p/ $z < 0$

$$V_{0-}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q+q_p}{[r^2+(z-d)^2]^{1/2}};$$ ou seja

colocarmos q_p e q em $z=d$.

Se assim fizermos, devemos verificar a descontinuidade de $\partial V/\partial z$ em $z=0$ (pois deveria ser a carga de polarização.)

$$-\epsilon_0\left(\frac{\partial V}{\partial z}\bigg|_{z=0^+} - \frac{\partial V}{\partial z}\bigg|_{z=0^-}\right) = \cancel{\frac{1}{2\pi}}$$

$$-\epsilon_0\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-q(-d)}{(r^2+d^2)^{3/2}} - \frac{q_p d}{(r^2+d^2)^{3/2}} - \frac{(q+q_p)(-d)}{(r^2+d^2)^{3/2}}\right] =$$

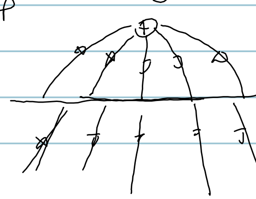
$$= \frac{\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q_p d}{(r^2+d^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\pi}\frac{q_p d}{(r^2+d^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)\frac{qd}{(r^2+d^2)}$$

Agora $q_p = -q\left(\dfrac{\chi_e}{\chi_e+2}\right) \Rightarrow$ que é de fato a densidade superficial de cargas !!

Ou seja V_{0+} e V_{0-} são as soluções do problema

A força sobre q é a força do q_p em $z=-d$ sobre q em $z=d$

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)\frac{q^2}{4d^2}\hat{z}$$



17.7 Energia eletrostática

Lembremos da energia eletrostática de uma distribuição de cargas discutida na p. 66

$$W = \epsilon_0 \int_{\substack{\text{todo} \\ \text{espaço}}} \frac{E^2}{2} \, d\tau$$

Neste caso, tivemos que trazer as cargas livres e as de polarização para sua configuração final.

Imaginemos que tenhamos material dielétrico e trazemos cargas livres do infinito. Qual é a energia acumulada.

Para fazer isto, imaginemos que podemos trazer lentamente, uma fração $\delta\alpha$ da carga final em cada ponto $(0<\alpha<1)$
O potencial (sendo o meio linear) deve aumentar com α também. De tal forma que numa distribuição descrita por $\rho_\ell(\vec{r}\,')$, temos

$$\delta[dW(\vec{r}\,')] = \cancel{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}} \alpha V(\vec{r}\,') \delta\alpha \, \rho_\ell(\vec{r}\,') \, dv'$$

$$\delta W = \int_{\text{volum}} \cancel{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}} V(\vec{r}\,') \rho_\ell(\vec{r}\,') \, dv' \, \alpha \, \delta\alpha$$

$$W = \cancel{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}} \int V(\vec{r}\,') \rho_\ell(\vec{r}\,') \, dv' \int_0^1 \alpha \, \delta\alpha \quad \frac{1}{2}$$

$$W = \cancel{\frac{1}{8}} \cancel{\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}} \frac{1}{2}\int_{vol} V \rho_e \, dv'$$

Ocorre que $\rho_e = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$, então

$$W = \cancel{\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}} \frac{1}{2}\int_{vol} V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \, dv'$$

$$V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (V\vec{D}) - \underbrace{\vec{\nabla} V}_{= \vec{E}} \cdot \vec{D}$$ então

$$W = \frac{1}{2} \cancel{\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}} \left[\int_{vol} \vec{\nabla} \cdot (V\vec{D}) \, dv' + \int_{vol} \vec{E} \cdot \vec{D} \, dv' \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cancel{\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}} \left[\int_{S} V \vec{D} \cdot d\vec{A}' + \int_{vol} \vec{E} \cdot \vec{D} \, dv' \right]$$

Se fizermos o volume ir p/ infinito (considerando um ponto p/ $\vec{r}'$ fora do volume) a primeira integral se anula pois $dA \uparrow r^2$ e VD cai com $1/r^3$. Então:

$$W = \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \int_{vol} \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} \, dv' \qquad \rho_E = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}$$

Sugestão de problema 4.27 Griffiths

17.7.1

Num capacitor a energia é acumulada ao levar-se carga de uma placa a outra.

O trabalho em fazer isto é

$dW = V\,dq$ Agora $q = CV$ $\Rightarrow dq = C\,dV$

$dW = CV\,dV$

$$W_{VAC} = C\int_0^V V\,dV = \frac{CV^2}{2} = C_{vácuo}\frac{V^2}{2}$$

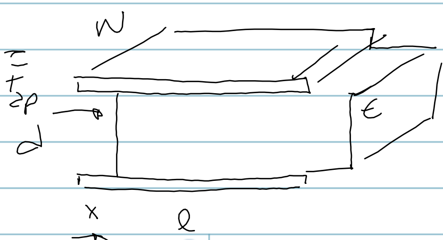
Notem que a inserção de um dielétrico, ~~com a mo~~ com a carga fixa, resultará numa queda de voltagem. Se colocarmos mais cargas tal que V volte ao seu valor antes do dielétrico

$$W_{DIEL} = C_{diel}\frac{V^2}{2}$$

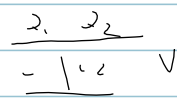
$$\frac{W_{DIEL}}{W_{VÁCUO}} = \frac{C_{diel}}{C_{vácuo}} = \epsilon_r \Rightarrow \boxed{W_{diel} = \epsilon_r W_{vácuo}}$$

Maior acúmulo de energia.

17.8 Força num dielétrico



Capacitância



$Q_1 = C_1 V$
$Q_2 = C_2 V$ $\Rightarrow Q_T = (C_1 + C_2)V$

$C_T = C_1 + C_2$

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 w x}{d} + \frac{\epsilon_r \epsilon_0 (l - x) w}{d}$$

$$= \frac{\epsilon_0 w}{d}\left(x + \epsilon_r l - \epsilon_r x \right)$$

$$= \frac{\epsilon_0 w}{d}\left[\epsilon_r l - x \underbrace{(\epsilon_r - 1)}_{\chi_e} \right] = \frac{\epsilon_0 w}{d}\left(\epsilon_r l - \chi_e x \right)$$

$$dW = F_{ap} \Delta x \qquad F_{die} = -\frac{dW}{dx}$$

$$W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Mantendo as cargas constantes em cada placa

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx}$$

$$\boxed{F = -\frac{\epsilon_0 \chi_e w}{2d} V^2}$$

a força age ~~puxa~~ contra tentarmos mover o dielétrico p/ fora.

(Se quisermos manter o potencial constante, teremos que deixar o capacitor ligado à bateria. Neste caso haverá um trabalho extra $dW = V dQ$ que deve ser levado em consideração se usarmos. Veja comentário no Griffiths.)