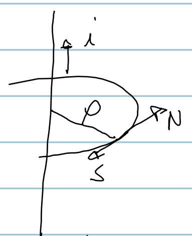
# 18 - Magnetostática

Não é claro inicialmente, a relação do que vemos com correntes e o que chamamos de campos magnéticos, com imãs e bússolas. Espero que mais adiante isto seja esclarecido. Vamos ter como pressuposto que imãs se alinham com o que chamamos de campo magnético, da mesma forma que dipolos elétricos se alinham com o campo elétrico.

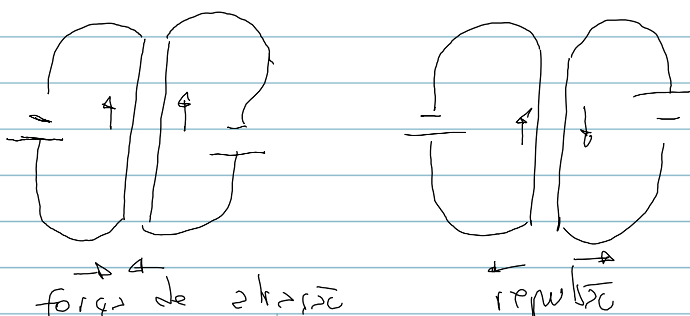
Dois experimentos interessantes:

- Fio passando corrente e o alinhamento da bússola




a agulha circunda o fio sendo sempre perpendicular a $\hat{\rho}$. (Direção $\hat{\rho}$)

- Força entre dois fios conduzindo uma corrente.



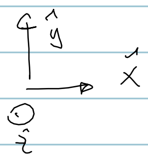
Parece que a corrente produz campo magnético e, também parece que a corrente (ou a carga em movimento no condutor) é afetada pelo campo magnético. É isto que queremos entender.

## 18.1 Forças magnéticas (como as cargas em mov.)

$$\vec{F}_{mag} = Q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Força de um campo magnético $\vec{B}$ sobre uma carga $Q$ com velocidade $\vec{v}$.

Ex 18.1.1




partícula de carga $q$ entra em $(x,y,z)=(0,0,0)$ numa região com $\vec{B} = B\hat{z}$ e velocidade inicial $\vec{v} = v_{0x}\hat{x} + v_{0z}\hat{z}$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\,\vec{v}\times\vec{B} = q\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = q(v_y\hat{x} - v_x\hat{y})B$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m}v_y \ (I); \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m}v_x \ (II); \quad \frac{dv_z}{dt} = 0$$

A última equação nos leva a $v_z(t) = v_{0z}$

$z(t) = v_{0z}\,t$

Em $x$ e $y$ derivemos I) com respeito ao tempo e substituímos II).

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m}\left(-\frac{qB}{m}\right)v_x = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x \ ;$$

Fazendo o mesmo em I

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y$$

Então $v_x = C_1 + A \cos\omega t + B \sin\omega t$

$v_y = C_2 + A_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t$

com $\omega \equiv \frac{qB}{m}$

Substituindo em (I):

$-A\omega \sin\omega t + B\omega \cos\omega t = \omega\left(C_2 + A_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t\right)$

$\Rightarrow C_2 = 0;\ A = -B_1;\ B = A_1$

Substituindo em (II)

$-A_1 \omega \sin\omega t + \omega B_1 \cos\omega t = -\omega\left(C_1 + A\cos\omega t + B \sin\omega t\right)$

$\Rightarrow C_1 = 0,\ A_1 = B,\ B_1 = -A$

Temos então:

$v_x = A \cos\omega t + B \sin\omega t$

$v_y = B \cos\omega t - A \sin\omega t$

$v_x(0) = v_{x0} \Rightarrow A = v_{x0}$

$v_y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$v_x = v_{x0} \cos\omega t$ $\qquad v_x^2 + v_y^2 = v_{x0}^2$

$v_y = -v_{x0} \sin\omega t$ $\qquad E_c = (v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2)\frac{m}{2} = c^{te}$

Não há variação de $E_c \Rightarrow W = 0$!

$$x(t) = C_3 + \frac{v_{x0}}{\omega} \sin \omega t$$

$$y(t) = C_4 + \frac{v_{x0}}{\omega} \cos \omega t$$

$x(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

$y(0) = 0 \Rightarrow C_4 = -v_{x0}/\omega$

Então:

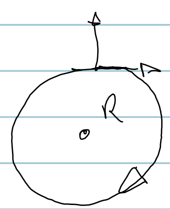
$$x(t) = (v_{x0}/\omega) \sin \omega t$$

$$y(t) = -v_{x0}/\omega + (v_{x0}/\omega) \cos \omega t$$

$$x^2 + (y + v_{x0}/\omega)^2 = (v_{x0}/\omega)^2$$

Circunferência de raio $R = \frac{v_{x0}}{\omega} = \frac{v_{x0}\, m}{qB}$

centrada em $x = 0$; $y = -v_{x0}/\omega$




a partícula gira com raio $R = \frac{v_{x0} m}{qB}$

com frequência $\omega = \frac{qB}{m}$

em torno de $(0, -v_{x0}/\omega, v_{0z} t)$

Movimento helicoidal.

O Griffiths dá um exemplo interessante que vale a pena ser lido (Ex. 5.2)

Sugestão de problema (5.3)

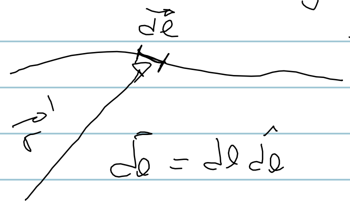
## 18.2 Trabalho da força magnética

$$dW = \vec{F}_{mag} \cdot d\vec{\ell} = q\underbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}}_{=0}\, dt = 0$$

## 18.3 Corrente elétrica

Quantidade de carga por unidade de tempo
$\rightarrow$ C/s = Ampere.

Numa dimensão: Se temos uma densidade linear de carga $\lambda$




$$\vec{I} = \frac{dq(\vec{r}')}{dt}\hat{d\ell} = \lambda\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \lambda\vec{v}(\vec{r}')$$

$d\vec{\ell} = d\ell\, \hat{d\ell}$

(unidade $\frac{C}{m}\frac{m}{s} = A$)

A força magnética sobre o pequeno trecho de $\vec{\ell}$:

$$d\vec{F} = dq\, \vec{v} \times \vec{B} = \cancel{I(\vec{r}')\lambda(\vec{r}')}$$
$$= \lambda d\ell\, \vec{v} \times \vec{B} = d\ell\,(\lambda\vec{v} \times \vec{B})$$
$$= d\ell\, \vec{I} \times \vec{B}$$

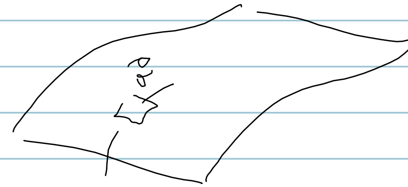
$$\vec{F} = \int_{\text{na linha}} d\ell\,(\vec{I} \times \vec{B}) = \int I\,(d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

$\rightarrow$ calculados a cada ponto da trajetória

Se a corrente é constante $\vec{I} = I\,\hat{d\ell}$

$$\Rightarrow \vec{F} = I\int d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Numa superfície, se tivermos uma densidade superficial de cargas $\sigma$, a corrente superficial é



$$\vec{K} = \sigma \vec{v}$$

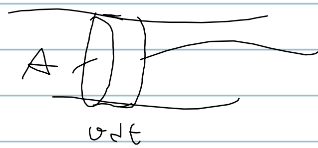
(unidade $\frac{C}{m^2} \frac{m}{s} = \frac{A}{m}$

$$d\vec{F}_{mag} = dq\, \vec{v} \times \vec{B} = \qquad dq = \sigma\, dA$$

$$= \sigma\, dA\, \vec{v} \times \vec{B} = dA\, \vec{K} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_{mag} = \int_{sup.} (\vec{K} \times \vec{B})\, dA$$

No caso volumétrico (densidade de carga por volume $\rho$)




$$\frac{dq}{\cancel{dt}} = \rho A v\, dt$$

Em geral $dq = \rho (\vec{v} \cdot \underbrace{\vec{A}}_{= A\hat{n}})\, dt$

$\vec{J} = \rho \vec{v}$ é o fluxo de carga por unidade de tempo, por unidade de área

(unidade $\frac{C}{m^3} \frac{m}{s} = \frac{A}{m^2}$)

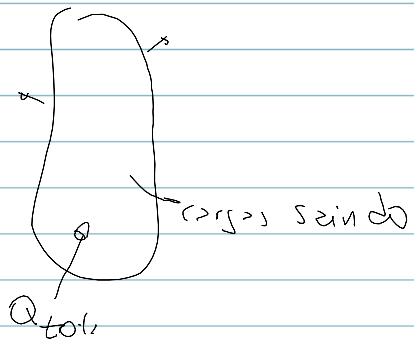
$$\frac{1}{A}\frac{dq}{dt} = \rho v \qquad dF_{mag} = dq\,(\vec{v} \times \vec{B}) = \rho\, dV (\vec{v} \times \vec{B})$$
$$= (\vec{J} \times \vec{B})\, dV$$

$$F_{mag} = \int_{volume} (\vec{J} \times \vec{B})\, dV$$

Notem que a corrente que atravessa uma certa área ( C/t ) é

$$I = \int_{sup.} \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Consideremos um volume onde tenhamos cargas, em princípio, saindo ou entrando:




A carga total que sai por unidade de tempo é

$\oint \vec{J} \cdot d\vec{A}$ e deve ser igual à diminuição da carga total)

$$Q_{total} = \int_V \rho \, dV \quad \Rightarrow \oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV$$

Se o volume não varia $\Rightarrow \frac{d}{dt} \int \rho \, dV = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$

E usando o teorema de Gauss

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J})\, dv$$

Então

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J})\, dv = -\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dv$$ para qualquer volume

Ou seja $$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$ equação da continuidade