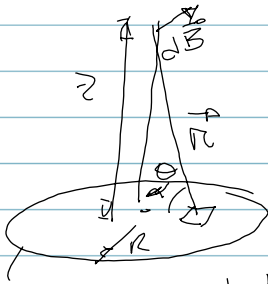


Ex. 18.4. #3 Campo magnético de um disco uniformemente carregado em seu eixo  
 Disco girando com velocidade angular  $\omega$ .



Conforme visto na p. 146

$$\vec{K} = \sigma \omega \rho \hat{\phi}$$

$$dA = \rho d\rho d\phi$$

$$\Gamma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sigma \omega \rho}{R^2} \hat{\phi} \times \hat{r} dA$$

$\vec{B}$  só tem componente em  $z$ ;  $|\hat{\phi} \times \hat{r}| = 1$

$$\Rightarrow dB_z = \frac{\mu_0 \sigma \omega \rho \cos\theta}{4\pi R^2} \rho d\rho d\phi$$

$$\cos\theta = \frac{\rho}{R}$$

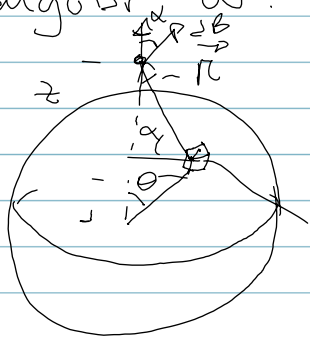
$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sigma \omega \rho^3}{R^3} d\rho d\phi$$

$$B_z = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R \frac{\rho^3}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} d\rho$$

No eixo,  $z=0$   $B_z = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R d\rho = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$

$$B_z = \frac{\mu_0 \omega}{2} \frac{Q}{\pi R^2} R \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R}$$

Ex. 18.4.4 Campo no centro de uma esfera uniformemente carregada girando em torno do eixo  $z$  com velocidade angular  $\omega$ .



$\omega$

$$\vec{J} = \rho \omega r \sin \theta \hat{\phi}$$

(p. 146)

$$r^2 = r^2 \sin^2 \theta + (z - r \cos \theta)^2 = z^2 + r^2 - 2zr \cos \theta$$

$$dV = r \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$\vec{B}$  só tem componente em  $z$

$$\cos \alpha = r \sin \theta / r$$

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \rho \omega r \sin \theta \frac{r \sin \theta}{r^3} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \rho \omega \frac{\sin^3 \theta}{r^3} r^4, \quad r^2 = z^2 + r^2$$

$$B_z = \frac{\mu_0 \rho \omega}{2} \int_0^\pi \int_0^R \frac{\sin^3 \theta r^4}{(z^2 + r^2)^{3/2} (z^2 + r^2 - 2zr \cos \theta)} dr d\theta$$

No centro,  $z = 0 \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 \rho \omega}{2} \int_0^\pi \int_0^R \sin^3 \theta r dr d\theta$

$$\Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 \rho \omega}{2} \frac{R^2}{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta =$$

$$\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta - \int_0^{\pi} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta =$$

$$= -\cos \theta \Big|_0^{\pi} + \cos^3 \theta \Big|_0^{\pi} =$$

$$= +1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\downarrow z = -r \sin \theta d\theta$$

$$\int z^2 dz = \frac{z^3}{3}$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 \rho \omega R^2}{3} = \frac{\mu_0 Q \omega R^2}{3 \cdot 4 \pi R^3}$$

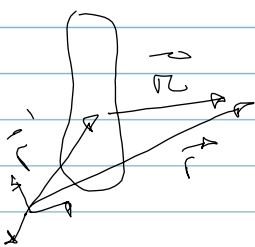
$$B_z = \frac{\mu_0 Q \omega}{4 \pi R}$$

Sugestão de problemas

- (1) Campo magnético a uma distância  $z$  de um plano de corrente uniforme.
- (2) Campo magnético no centro de uma casca esférica carregada girando com velocidade angular  $\omega$ .

18.5 Divergente e rotacional de  $\vec{B}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} dv'$$



$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right] dv'$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}')) \right] - \vec{J} \cdot \left( \vec{\nabla} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}') = 0 \quad \text{pois } \vec{J} \text{ n\~{a}o depende de } \vec{r}$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{\hat{r}}{r^2} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) = 0$$

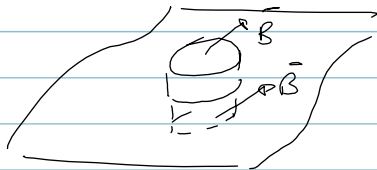
$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{n\~{a}o h\~{a} ~~par~~ linhas de } \vec{B} \text{ convergindo ou divergindo em pontos.}$$

Seja um volume qualquer

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dV =$$

$$= \oint_{\text{sup.}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Condi\~{c}o de  
contorno



$$B_{\perp}^{\text{sup}} A - B_{\perp}^{\text{inf}} A = 0$$

$B_{\perp}$  \u00e9 cont\u00ednuo

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \times \left( \vec{J} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV$$

Eliminando termos que envolvam derivadas em  $\vec{r}$   
de  $\vec{J}(\vec{r}')$ :

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{J} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \vec{J} \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right) - \frac{\hat{r}}{r^2} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right) + \left( \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{J} - (\vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\hat{r}}{r^2}$$

zero      zero

Como  $\frac{\hat{r}}{r^2} = \vec{\nabla} \frac{1}{r}$ ; o primeiro termo fica

$$\vec{J}(\vec{r}') \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r})$$

$$\int \vec{J}(\vec{r}') 4\pi \delta^3(\vec{r}) dV' = 4\pi \vec{J}(\vec{r}) \quad (\vec{r} = 0) = 4\pi \vec{J}(\vec{r})$$

O termo  $-(\vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\hat{r}}{r^2} = (\vec{J} \cdot \vec{\nabla}') \frac{\hat{r}}{r^2} = (\vec{J} \cdot \vec{\nabla}') \frac{\hat{r}}{r^3}$

$$= \sum_i (\vec{J} \cdot \vec{\nabla}') \frac{(x_i - x_i')}{r^3} \hat{x}_i = \sum_i \left\{ \vec{\nabla}' \cdot \left[ \frac{(x_i - x_i')}{r^3} \vec{J} \right] \hat{x}_i \right.$$

$$\left. - \frac{x_i - x_i'}{r^3} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}) \hat{x}_i \right.$$

= 0 por corrente estacionária

Então

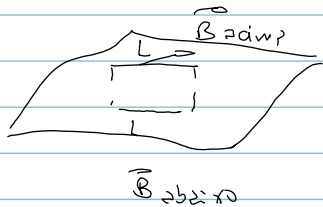
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 4\pi \vec{J}(\vec{r}) + \sum_i \int \vec{\nabla}' \cdot \left[ \frac{(x_i - x_i')}{r^3} \vec{J} \right] dV' \right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 4\pi \vec{J}(\vec{r}) \right\}$$

$$= \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \oint \frac{(x_i - x_i')}{r^3} \vec{J} \cdot d\vec{A}'$$

como sempre integramos de forma a conter no volume todos os  $\vec{J}(\vec{r}')$ , não há  $\vec{J}$  na superfície; a integral = 0

Então  $\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$



$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \int \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

$$= \mu_0 I$$

Se houver uma corrente superficial  $\vec{K}$   
 $B_{||}^{acima} \swarrow - B_{||}^{abaixo} \searrow L = \mu_0 K$

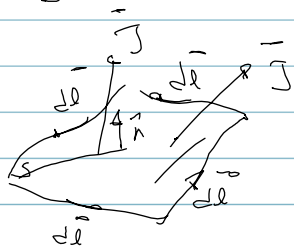
De forma geral

$$\vec{B}_{acima} - \vec{B}_{abaixo} = \mu_0 (\vec{K} \times \hat{n})$$

Nota que  $\vec{K} \times \hat{n}$  só tem componentes paralelos à interface.

18.6 Lei de Ampère  $\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

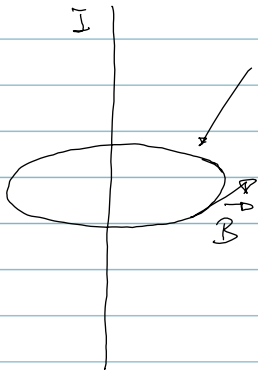


$= \mu_0 \int_{\text{toda}} \vec{J} \cdot d\vec{A}$  que  
atravessa a  
superfície

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Ex. 18.5.1

Voltemos ao problema do fio longo



Superfície amperiana circular de raio  $s$

Por simetria  $\vec{B} = B(s) \hat{\varphi}$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi s B(s) = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow B(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

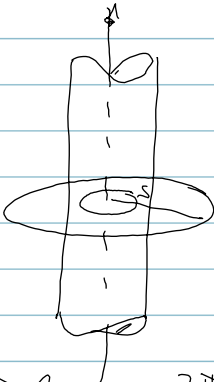
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\varphi}$$

(Vejam resultado da página 149)

Ex. 18.5.2

Campo magnético dentro e fora de um condutor com corrente estacionária  $J$ . (Raio  $R$ )

$$J = I/\pi R^2$$



Superfícies amperianas  $s > R$   
 $s < R$

Por simetria  $\vec{B} = B(s) \hat{\varphi}$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi s B(s) = \mu_0 I_{env}$$

$$s > R \quad 2\pi s B(s) = \mu_0 J \cdot \pi R^2 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 J}{2\pi s} \hat{\varphi}$$

$$s < R \quad 2\pi s B(s) = \mu_0 J \cdot \pi s^2 \Rightarrow B(s) = \frac{\mu_0 s J}{2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} s \hat{\varphi}$$

Sugestões de problemas      Problemas 3.13, 5.16  
5.12

Fazer também

Anel de raio  $R$ , densidade  $\lambda$  girando no eixo  $z$  com velocidade  $\omega$ . comparar o resultado da página 151.