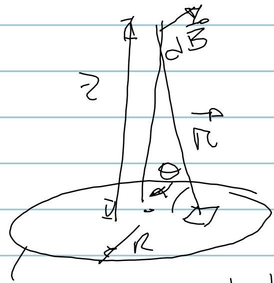
Ex. 18.4.#3 Campo magnético de um disco uniformemente carregado em seu centro
Disco girando com velocidade angular ω.



Conforme visto na p. 146

$$\vec{K} = \sigma \omega \rho \hat{\varphi}$$

$$dA = \rho \, d\rho \, d\varphi$$

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sigma \omega \rho}{r^2} \hat{\varphi} \times \hat{r} \, dA$$

$\vec{B}$ só tem componente em z; $|\hat{\varphi} \times \hat{r}| = 1$

$$\Rightarrow dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sigma \omega \rho \cos\theta}{r^2} \rho \, d\rho \, d\varphi$$

$$\cos\theta = \frac{\rho}{r}$$

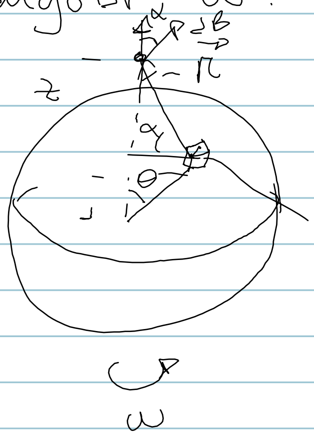
$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sigma \omega \rho^3}{r^3} d\rho \, d\varphi$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega \int_0^R \frac{\rho^3}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} d\rho$$

No centro, $z = 0$ $\quad B_z = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R d\rho = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$

$$B_z = \frac{\mu_0 \omega}{2} \frac{Q}{\pi R^{\cancel{2}}} \cancel{R} \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 \omega}{2\pi} \frac{Q}{R}$$

Ex. 18.4.4 Campo no centro de uma esfera uniformemente carregada girando em torno do eixo z com velocidade angular ω.



$$\vec{J} = \rho \omega r \sin\theta \, \hat{\varphi}$$
(p. 146)

$$\mathscr{r}^2 = r^2 \sin^2\theta + (z - r\cos\theta)^2 =$$
$$= z^2 + r^2 - 2zr\cos\theta$$

$$dV = r \sin\theta \, \cancel{d\theta} \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$\vec{B}$ só tem componente em z

$$\cos\alpha = r\sin\theta / \mathscr{r}$$

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \rho \omega r \sin\theta \frac{r\sin\theta}{\mathscr{r}^3} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \rho \omega \frac{\sin^3\theta \, r^4}{\mathscr{r}^3} , \quad \mathscr{r}^2 = z^2 + r^2$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} \rho \omega \int_0^{\pi} \int_0^{R} \frac{\sin^3\theta \, r^4}{\cancel{(z^2 + r^2)^{3/2}} \, (z^2 + r^2 - 2zr\cos\theta)^{3/2}} dr \, d\theta$$

No centro, $z = 0 \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0}{2} \rho \omega \int_0^{\pi} \int_0^{R} \sin^3\theta \, r \, dr \, d\theta$

$$\Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 \rho \omega}{2} \frac{R^2}{2} \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\theta) \sin\theta \, d\theta =$$

$$\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta - \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta =$$

$\xi = \cos\theta$

$d\xi = -\sin\theta\, d\theta$

$\int \xi^2 d\xi = \frac{\xi^3}{3}$

$$= -\cos\theta \Big|_0^\pi + \frac{\cos^3\theta}{3} \Big|_0^\pi =$$

$$= +1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 \rho \omega R^2}{3} = \frac{\mu_0}{\cancel{3}} \frac{Q\, \cancel{3} \omega R^2}{4\pi R^{\cancel{3}}}$$

$$\boxed{B_z = \frac{\mu_0 Q \omega}{4\pi R}}$$

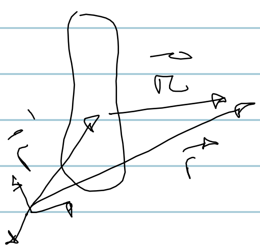
Sugestão de problemas

(1) Campo magnético a uma distância z de um plano de corrente uniforme.

(2) Campo magnético no centro de uma casca esférica carregada girando com velocidade angular ω.

18.5 Divergente e rotacional de $\vec{B}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\, dv'$$



$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} \right] dv'$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{J}(\vec{r}')\right] - \vec{J}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\frac{\hat{r}}{r^2}\right)\right.$$

$\vec{\nabla}\times\vec{J}(\vec{r}') = 0$ pois $\vec{J}$ não depende de $\vec{r}$

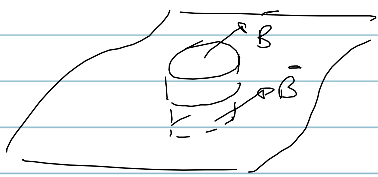
$$\vec{\nabla}\times\frac{\hat{r}}{r^2} = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ Não há ~~\[illegible\]~~ linhas de $\vec{B}$ convergindo ou divergindo em pontos.

Seja um volume qualquer $\int \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dV =$

$$= \oint_{sup.} \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$$

Condição de contorno



$B_\perp^{acima} A - B_\perp^{abaixo} A = 0$

$B_\perp$ é contínuo

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\nabla}\times\left(\vec{J}\times\frac{\hat{r}}{r^2}\right) dV'$$

Eliminando termos que envolvam derivadas em $\vec{r}$ de $\vec{J}(\vec{r}')$:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{J}\times\frac{\hat{r}}{r^2}\right)=\vec{J}\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}\right)-\frac{\hat{r}}{r^2}\underbrace{\cancel{(\vec{\nabla}\cdot\vec{J})}}_{\text{zero}}+\underbrace{\cancel{\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{J}}}_{\text{zero}}$$

$$-\left(\vec{J}\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{\hat{r}}{r^2}$$

Como $\frac{\hat{r}}{r^2}=\nabla\frac{1}{r}$; o primeiro termo fica

$$\vec{J}(\vec{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=4\pi\delta^3(\vec{r})$$

$$\int\vec{J}(\vec{r}')\,4\pi\delta^3(\vec{r})\,dv'=4\pi\vec{J}(r=0)=4\pi\vec{J}(\vec{r})$$

O termo $-(\vec{J}\cdot\vec{\nabla})\frac{\hat{r}}{r^2}=(\vec{J}\cdot\vec{\nabla}')\frac{\hat{r}}{r^2}=(\vec{J}\cdot\vec{\nabla}')\frac{\vec{r}}{r^3}$

$$=\sum_i(\vec{J}\cdot\vec{\nabla}')\frac{(x_i-x_i')}{r^3}\hat{x}_i=\sum_i\left\{\vec{\nabla}'\cdot\left[\frac{(x_i-x_i')}{r^3}\vec{J}\right]\hat{x}_i\right.$$

$$-\frac{x_i-x_i'}{r^3}\underbrace{(\vec{\nabla}'\cdot\vec{J})}_{=0\text{ para correntes estacionárias}}\hat{x}_i$$

Então

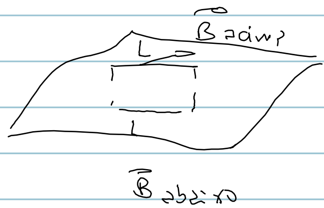
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{4\pi\vec{J}(\vec{r})+\sum_i\int\vec{\nabla}'\cdot\left[\frac{(x_i-x_i')}{r^3}\vec{J}\right]dv'\right\}$$

$$=\cancel{\mu_0\vec{J}(\vec{r})}$$

$$=\mu_0\vec{J}(\vec{r})+\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_i\oint\frac{(x_i-x_i')}{r^3}\vec{J}\cdot d\vec{A}'$$

como sempre integramos de forma a conter no volume todos os $\vec{J}(\vec{r}')$, não há $\vec{J}$ na superfície, a integral $=0$

Então $\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$



$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \int \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$= \mu_0 I$$

Se houver uma corrente superficial $\vec{K}$

$$B_{\parallel}^{acima} \cancel{L} - B_{\parallel}^{abaixo} L = \mu_0 K \cancel{L}$$

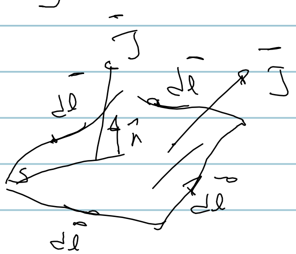
De forma geral

$$\vec{B}_{acima} - \vec{B}_{abaixo} = \mu_0 (\vec{K} \times \hat{n})$$

Notem que $\vec{K} \times \hat{n}$ só tem componentes paralelas à interface.

18.6 Lei de Ampère $\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

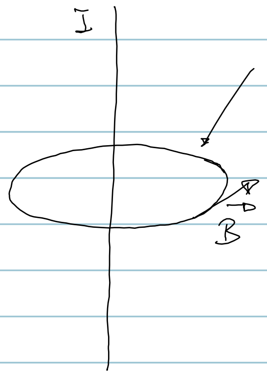


$= \mu_0 \cancel{I_{total}}\ I$ TOTAL QUE ATRAVESSA A SUPERFÍCIE

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Ex. 18.5.1

Voltemos ao problema do fio longo



Superfície amperiana ~~de~~ circular de raio s

Por simetria $\vec{B} = B(s)\,\hat{\varphi}$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi s\, B(s) = \mu_0 I$$

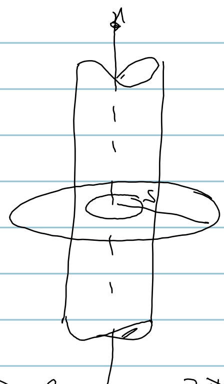
$$\Rightarrow B(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{\varphi}}$$

(Vejam resultado da página 149)

Ex. 18.5.2

Campo magnético dentro e fora de um condutor com corrente estacionária J. (Raio R)

$J = I/\pi R^2$



Superfícies amperianas $s > R$

$s < R$

Por simetria $\vec{B} = B(s)\,\hat{\varphi}$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi s\, B(s) = \mu_0 I_{env}$$

$s > R$ $\quad 2\pi s\, B(s) = \mu_0 J \pi R^2 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{\varphi}$

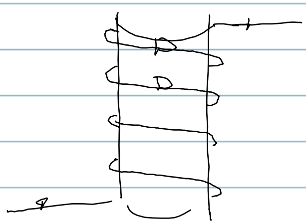
$s < R$ $\quad 2\pi s\, B(s) = \mu_0 J \pi s^2 \Rightarrow B(s) = \frac{\mu_0 s J}{2}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\, s\,\hat{\varphi}$$

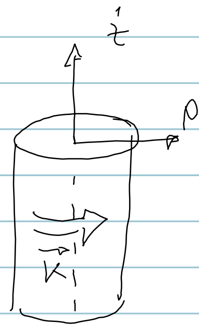
Sugestão de problemas Problema 5.13, 5.16
5.12

Fazer também
Anel de raio R, densidade λ girando no eixo z com velocidade ω. comparar c/ resultado da página 151.

18.6 Solenoide

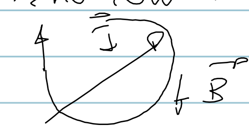


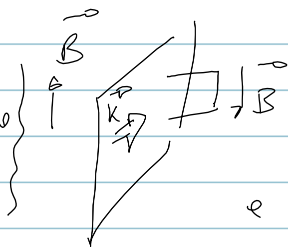
é equivalente a



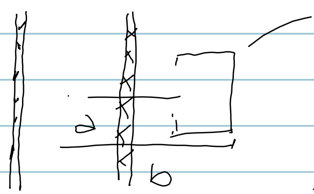
$\vec{K} \parallel \hat{\varphi}$

Plano com $\vec{K}$ uniforme





$\vec{B} \parallel \hat{z}$
e só depende de ρ
e $\vec{B} \to 0$ no infinito



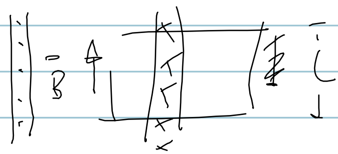
lei de Ampere

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = [B(a) - B(b)]\,L = \mu_0 I_{enc} = 0$$

$$B(a) = B(b)$$

como deve ir a zero o campo é nulo fora do solenoide

Agora num circuito que passa por dentro do solenoide:



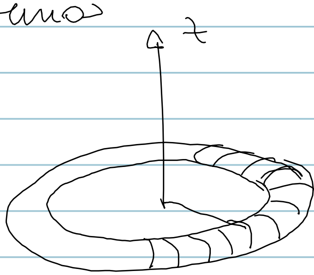
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL = \mu_0 n I L$$

onde n é o número de espiras por unidade de comprimento.

Portanto $\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}$, uniforme dentro do solenoide

18.7 Toroide

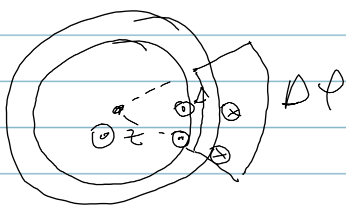
Fechando-se o solenoide sobre si mesmo, temos



O exemplo 5.10 mostra por argumentos simples ~~de~~ que o campo $\vec{B} \parallel \hat{\varphi}$

Isto é esperado conforme vimos p/ o solenoide.

Espera-se também que o campo fora do solenoide (toroide) é nulo. Então podemos usar a lei de Ampere:



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(\rho)\rho\Delta\varphi = \frac{\mu_0 N I \Delta\varphi}{2\pi}$$

$$B(\rho) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi\rho} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi\rho}\hat{\varphi} \text{ (dentro)}$$