18.8 Potencial Vetor Magnético

Sabemos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

como o $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$, podemos

obter $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ (isto pode ser mostrado)

$\vec{A}$ não é uma função vetorial única. De fato, como o $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \lambda) = 0$, podemos somar o gradiente de um escalar sem modificar $\vec{B}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A}_0)$$

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{\nabla} \lambda \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_0 + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \lambda)$$
$$= \vec{\nabla} \times \vec{A}_0 = \vec{B}$$

Podemos encontrar uma função λ que nos auxilie em problemas envolvendo $\vec{B}$.

Por exemplo, sabemos que $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Se escolhermos λ convenientemente, podemos fazer $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ e simplificar o problema acima.

Para tal $\quad \bar{\nabla}\cdot\bar{A} = \bar{\nabla}\cdot\vec{A_0} + \bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\lambda)$
$$= \bar{\nabla}\cdot\bar{A_0} + \nabla^2\lambda = 0$$

Portanto, dado um $\vec{A_0}$, basta obtermos λ que satisfaz:

$$\nabla^2\lambda = -\bar{\nabla}\cdot\bar{A_0}$$

$$\lambda = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\bar{\nabla}\cdot\bar{A_0}\, d\tau'}{r}$$

Portanto a menos que a integral acima divirja podemos fato $\bar{\nabla}\cdot\bar{A} = 0$

Notem que esta é a eq de Poison. Lembremos $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$, nos levava a

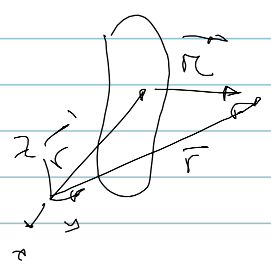
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r}\, d\tau'$$

Nesta situação, vemos que: $\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$

Ou seja
$$\nabla^2\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = -\mu_0\begin{pmatrix} \bar{J}_x \\ \bar{J}_y \\ \bar{J}_z \end{pmatrix}$$

Mais uma vez surge a eq. de Poison. ~~de~~ De fato, temos 3 equações onde as componentes de $\vec{J}$ são as "fontes" de $\vec{A}$

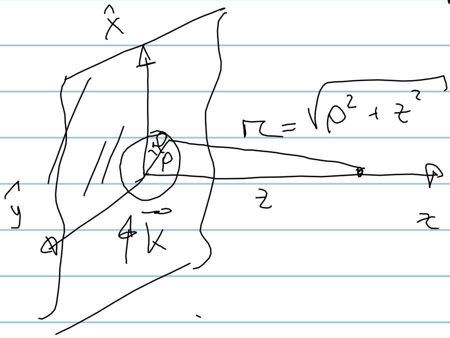
Obviamente $\quad \bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\bar{J}(\bar{r}')\, d\tau'}{r}$



Se a distribuição for linear ou superficial, temos:

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\bar{I}\, dl'}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{dl'}{r} \; ; \; \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\bar{K}\, da'}{r}$$

Exemplo 18.8.1 Potencial vetor plano infinito com corrente superficial $\vec{K}$



$$\bar{K} = K\hat{x}$$

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} K \hat{x} \int \frac{\rho\, d\varphi\, d\rho}{r}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} K \hat{x}\, 2\pi \int \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{2} K \hat{x}\, \frac{1}{2}\int \xi^{-1/2} d\xi \; ; \; \xi \equiv \rho^2 + z^2$$

Para um círculo de raio R – pois como a corrente se estende ao infinito! Veremos mais adiante como obter $\bar{A}$

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 K}{2}\hat{x}\left[\sqrt{R^2+z^2} - z\right] = f(z)\,\hat{x}$$

Para calcular $\bar{B}$ neste ponto exatamente acima da origem

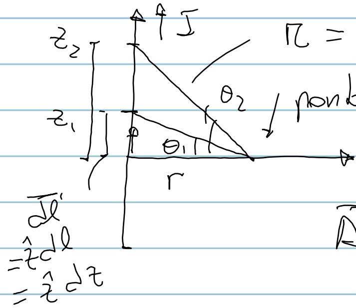
$$\bar{B}\Big|_z = \bar{\nabla}\times\bar{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial f(z)}{\partial z}\hat{y}$$

$$= \frac{\mu_0 K}{2}\left[\frac{2z}{(R^2+z^2)^{1/2}} - 1\right] ;$$

$R \to \infty \Rightarrow \boxed{\bar{B} = -\frac{\mu_0 K}{2}\hat{y}}$ e vale p/ $\forall$ ponto z

Ex. 18.8.2 (Prob. 5.22 Griffiths)

Potencial vetor magnético de um segmento de fio reto com corrente I. Verificar $\vec{B}$.



$\mathscr{r} = \sqrt{z^2 + r^2}$

ponto a ser calculado $\bar{A}$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \int \frac{dl'}{\mathscr{r}}$$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

$\frac{z}{r} = tg\theta$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sec\theta \, d\theta$$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \ln |\sec\theta + \tan\theta| \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$\sec\theta = \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{r}$ $\quad |\sec\theta + \tan\theta| = \frac{\sqrt{r^2+z^2} + z}{r}$

$\tan\theta = \frac{z}{r}$

$$\boxed{\bar{A} = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \ln\left[\frac{\sqrt{r^2+z_2^2} + z_2}{\sqrt{r^2+z_1^2} + z_1}\right]} = A(r)\hat{z}$$

Em coordenadas cilíndricas $\vec{\nabla} \times \bar{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & A(r) \end{vmatrix}$

$$= -\frac{\partial A(r)}{\partial r}\hat{\varphi}$$

$$\frac{4\pi}{\mu_0 J}\frac{\partial A(r)}{\partial r} = \frac{d}{dr}\left[\ln\left(\sqrt{r^2+z_2^2}+z_2\right) - \ln\left(\sqrt{r^2+z_1^2}+z_1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r^2+z_2^2}+z_2}\,\frac{r}{\sqrt{r^2+z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+z_1^2}+z_1}\,\frac{r}{\sqrt{r^2+z_1^2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{r^2+z_2^2}-z_2\right)r}{\left[\left(r^2+z_2^2\right)-z_2^2\right]\sqrt{r^2+z_2^2}} - \frac{\left(r^2+z_1^2\right)-z_1}{\left[\left(r^2+z_1^2\right)-z_1^2\right]}\frac{r}{\sqrt{r^2+z_1^2}} =$$

$$= \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{z_2}{\sqrt{r^2+z_2^2}} - 1 + \frac{z_1}{\sqrt{r^2+z_1^2}}\right\}$$

$$\frac{z_2}{\sqrt{r^2+z_2^2}} = \sin\theta_2 \quad ; \quad \frac{z_1}{\sqrt{r^2+z_1^2}} = \sin\theta_1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A(r)}{\partial r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\sin\theta_1 - \sin\theta_2\right)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = -\frac{\partial A}{\partial r}\hat{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)$$

que é o resultado que obtemos na p. 149 livro J.

Prob. 5.24 e 5.26