Então $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ = combinação linear de $\vec{B}$ e $\vec{C}$

De fato $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}\,(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}\,(\vec{A} \cdot \vec{B})$

bac − cab

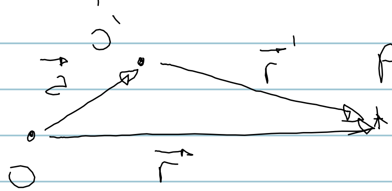
Notem que $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = -\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B})$

$$= -\vec{A}\,(\vec{C} \times \vec{B}) + \vec{B}\,(\vec{C} \cdot \vec{B})$$

4. Rotação de coordenadas funções vetoriais e funções escalares

Consideremos uma propriedade que depende da posição. Esta posição pode ser dada por um vetor $\vec{r}$ ~~ex.~~ (Em geral a função pode depender também de constantes)

$\varphi(\vec{r})$; $\vec{r}$ para ser definido depende da origem mas sempre tem que indicar o mesmo ponto no espaço



ponto P com propriedade $\varphi(\vec{r})$

A propriedade de P não deve depender da escolha da origem. Se houvéssemos escolhido O', P é indicado por $\vec{r}'$. Para que esta independência ocorre, a nova função

$$\varphi'(\vec{r}\,') = \varphi(\vec{r}\,' + \vec{a}) = \varphi(\vec{r}) \qquad \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{a}$$

Esta ~~dependência~~ relação vale para qualquer ~~refer~~ origem, portanto vale para $\vec{a} = 0$
$\vec{r} = \vec{r}\,'$

$\Rightarrow \varphi'(\vec{r}) = \varphi(\vec{r})$. Ou seja, a dependência de φ' com $\vec{r}\,'$ deve ser igual à dependência de φ com $\vec{r}$.

* Moral: A translação é razoavelmente simples de compreender. O problema é quando pensarmos na decomposição das componentes em um certo referencial e fizermos uma rotação de coordenadas.

Da mesma forma que falamos de uma função escalar (a propriedade do ponto) poderíamos ter uma propriedade vetorial que depende da posição, neste caso temos:

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_1(\vec{r})\,\hat{x}_1 + A_2(\vec{r})\,\hat{x}_2 + A_3(\vec{r})\,\hat{x}_3$$

Se escolhermos uma nova origem, teremos

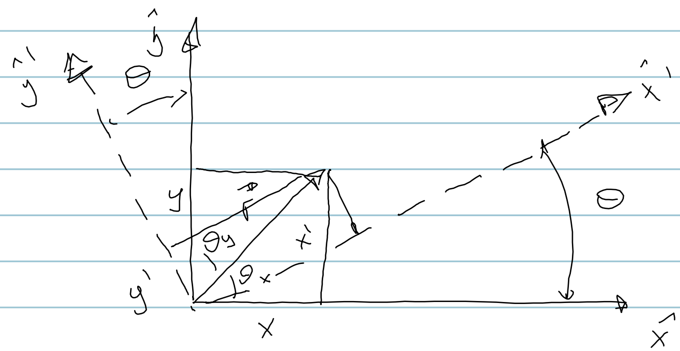
$\vec{A}\,'(\vec{r}\,')$ e, da mesma forma esperamos que nossa escolha de coordenada não altere as propriedades das coisas

Então $\vec{A}'(\vec{r}') = \vec{A}(\vec{r}' + \vec{a})$

Ou seja $\vec{A}'$ depende de $\vec{r}'$ da mesma forma que $\vec{A}$ depende de $\vec{r}$. Se isto não ocorrer a função $\vec{A}(\vec{r})$ inicial não faz sentido, do ponto de vista da física.

* (Parágrafo da página 9)

Em termos de coordenadas, é interessante estudarmos o vetor posição e a rotação de coordenadas (2D para simplificar)



$\theta_x + \theta_y = 90°$ $\qquad |\vec{r}| = l \qquad \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$

Qual é o valor de x', y' p/ representar o mesmo vetor $\vec{r}$

$x = l \cos\theta_x$

$x' = l\cos(\theta_x - \theta)$

$x' = l(\cos\theta_x \cos\theta + \sin\theta_x \sin\theta)$

$y = l\cos\theta_y = l \sin\theta_x$

$y' = l\cos(\theta_y + \theta)$

$y' = l(\cos\theta_y \cos\theta - \sin\theta_y \sin\theta)$

$$x' = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$y' = y\cos\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Em forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Se por esta transformação $x\,y \to x'\,y'$ o vetor continua apontando para a mesma direção e no mesmo ponto do espaço, esperamos que qualquer função vetorial deve seguir a mesma transformação. De outra forma não mantem a invariância

Dado a função vetorial ou o vetor $\vec{A}$

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

Agora $\quad A_x(x,y) \qquad A_y(x,y)$

$\qquad A'_x(x',y') \qquad A'_y(x',y')$

Para que ~~o seu~~ as propriedades independam do referencial

$$\vec{A}'(x',y') = \vec{A}(x,y)$$

Da mesma forma que comentamos atrás

$\vec{A}'$ deve depender de x' da mesma forma que $\vec{A}$ depende de x

Ex. 4.1 ~~cos considere a função vetorial~~ verifique se a ~~f~~ $(-y, x)$ é uma função vetorial e $(x, -y)$ não é.

a) $(-y, x)$ $\qquad A_x = -y \; ; A_y = +x$

$$A_x' = \cos\theta(-y) + \sin\theta(x) = x\sin\theta - y\cos\theta = -y'$$
$$A_y' = -\sin\theta(-y) + \cos\theta(x) = x\cos\theta + y\sin\theta = x'$$

$A_x' = -y'$ e $A_y' = x'$ $\Rightarrow$ é função vetorial

(b) $(x, -y)$ $\qquad A_x = x \; ; \; A_y = -y$

$$A_x' = \cos\theta\, x + \sin\theta(-y) \neq x'$$
$$A_y' = -\sin\theta\, x + \cos\theta(-y) \neq -y'$$ $\Rightarrow$ não é função vetorial

De forma geral, chamando $x \to x_1$
$y \to x_2$

$a_{11} = \cos\theta \; ; \; a_{12} \; \sin\theta$
$a_{21} = -\sin\theta \; ; \; a_{22} = \cos\theta$

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

a_{ij} é o cosseno do ângulo entre x_i' e x_j

Para mais dimensões

$$x'_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, x_j$$

a_{ij} são os cossenos diretores entre

x'_i e x_j $\qquad a_{ij} = \dfrac{\partial x'_i}{\partial x_j}$

~~Obviamente a_{ji} é o cosseno entre x_j e x_i que deve ser igual ao cosseno entre x'_i e x_j~~

Agora o cosseno entre x'_i e x_j é igual ao cosseno entre x_j e x'_i

$$\Rightarrow a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$$

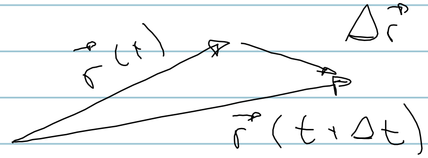
Isto leva à condição ortogonalidade

$$\sum_i a_{ij}\, a_{ik} = \sum_i \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial x}$$

$$= \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk}$$

5. Diferenciação de vetores (por escalar)

~~5.I~~ 5.1 Derivada por um escalar (tempo)



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \qquad \Delta\vec{r} \to d\vec{r} \text{ quando } \Delta t \to dt \to 0$$

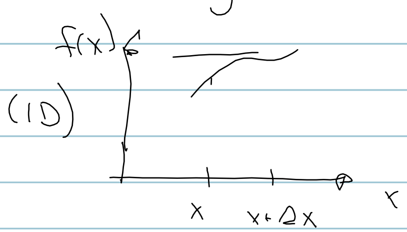
Em termos de coordenadas

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (v_1, v_2, v_3)$$

$$v_i = dx_i/dt \quad ; \quad d\vec{r} = \vec{v}\, dt$$

(Notem que t não pode depender das coordenadas)

5.2 O gradiente



$$\Delta f \sim \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \Delta x$$

$$\Delta x \to dx \to 0 \qquad \Delta f \to df$$

$$df = \frac{df}{dx} dx$$

Em 3 (ou mais) dimensões,

$f(x,y,z) - f(\vec{r})$ $\quad df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

$$d\vec{r} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$$

Se definimos $\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

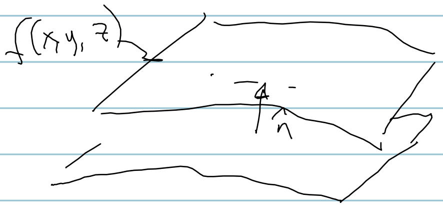
$$df = \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Como $df = |\vec{\nabla}(\vec{r})|\,|d\vec{r}| \cos$ (ângulo entre $d\vec{r}$ e $\vec{\nabla} f$)

df é máximo quando $d\vec{r} \parallel \vec{\nabla} f$

ou seja $\vec{\nabla} f$ aponta para a máxima variação de f.

Não vamos mostrar aqui, mas o gradiente é um vetor.

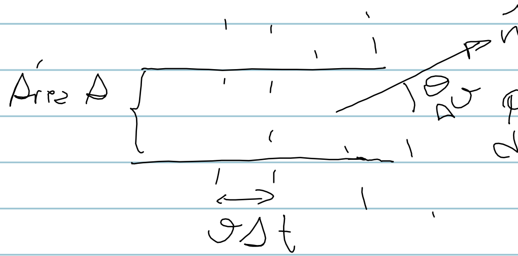


o vetor (unitário) na direção de máxima variação de uma função é $\hat{n} = \frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|}$

5.3 Divergente

Considere um tubo c/ líquido incompressível fluindo com velocidade v, paralela ao tubo. O fluxo de massa que atravessa o tubo é:

$$\phi = \frac{\Delta m}{\Delta t}$$



ρ é a densidade

$$\Delta m = \rho \Delta Vol = \rho \Delta v \Delta t A \Rightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t} = \phi = \rho v A$$

Se tivéssemos escolhido p/ calcular o fluxo uma seção não transversal inclinada com a velocidade $\frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \cos\theta$

O cálculo do fluxo acima utilizaria um área A' maior que A; $A' = \frac{A}{\cos\theta}$

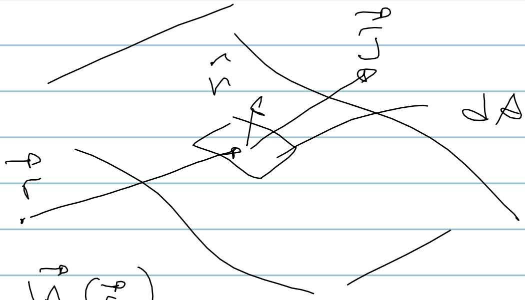
Portanto, devemos corrigir a área usando o ângulo entre a normal da superfície e a velocidade

$$\phi = \rho v A' \cos\theta \Rightarrow \phi = \rho A' \vec{v} \cdot \hat{n}$$

Definindo $\vec{A'} = A'\hat{n}$ $\qquad \phi = \vec{J} \cdot \vec{A'}$

e $\vec{J}$ a densidade de corrente $= \rho \vec{v}$

Se tivermos um campo vetorial descrevendo ~~o fluxo~~ a corrente de algo ($\vec{J}$), podemos obter o fluxo infinitesimal numa área infinitesimal $d\vec{A}$



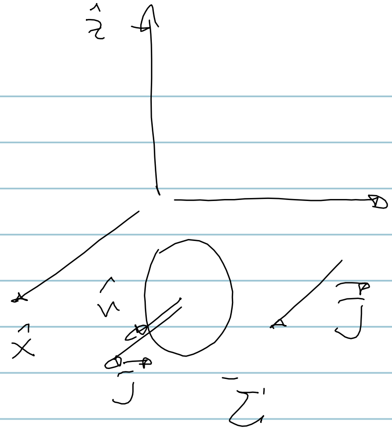
$$d\phi = \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}(\vec{r})$$

Se desejarmos obter o fluxo total numa superfície Σ, temos que somar todos os $d\vec{A}$'s até cobrir toda a superfície $\longrightarrow$ integral de superfície

$$\phi = \int_{\Sigma} \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}(\vec{r})$$

Ex. 5.3.1

$\vec{J} = J_0 \hat{x}$; calcular o fluxo num círculo de raio a num plano com normal // $\hat{x}$



J_0 = constante

$$\vec{J}\cdot d\vec{A} = J_0\, dA$$

$$\phi = \int_{\Sigma} \vec{J}(\vec{r})\cdot d\vec{A} =$$

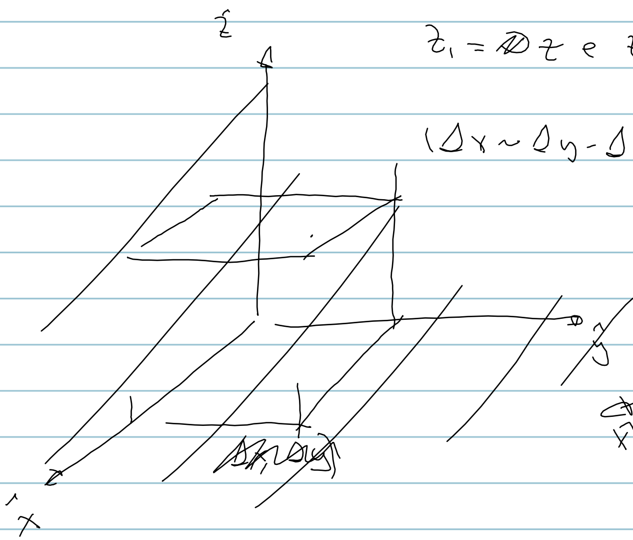
$$= J_0 \int_{\Sigma} dA = J_0 \pi a^2$$

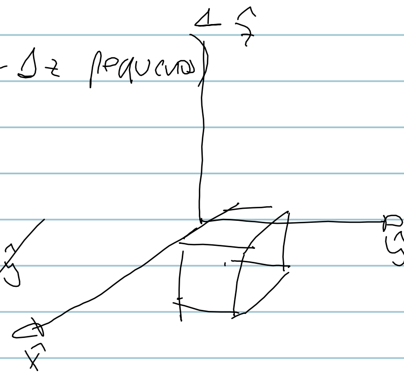
Consideremos o fluxo total de um $\vec{J}(\vec{r})$ qualquer numa superfície cúbica com vértices em $x_1 = \cancel{\Delta} x$ e $x_2 = \Delta x + x$

$y_1 = \cancel{\Delta} y$ e $y_2 = \Delta y + y$

$z_1 = \cancel{\Delta} z$ e $z_2 = \Delta z + z$

($\Delta x \sim \Delta y - \Delta z$ pequeno)





Temos

$$\Phi_s = \left[J_x(x+\Delta x, \bar{y}, \bar{z}) - J_x(x, \bar{y}, \bar{z}) \right] \Delta y \Delta z$$
$$+ \left[J_y(\bar{x}, y+\Delta y, \bar{z}) - J_y(\bar{x}, y, \bar{z}) \right] \Delta x \Delta z$$
$$+ \left[J_z(\bar{x}, \bar{y}, z+\Delta z) - J_z(\bar{x}, \bar{y}, z) \right] \Delta x \Delta y$$

Dividindo pelo volume:

$$\frac{\Phi_s}{\Delta V} = \frac{\Phi_s}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

E fazendo $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$ temos

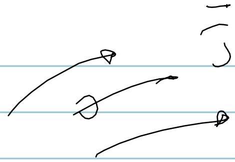
$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Phi_s}{\Delta V} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$$

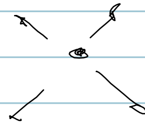
A esse fluxo total ~~m~~ por unidade de volume num certo ponto chamamos de divergente.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = (\vec{\nabla}) \cdot (\bar{J}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot$$

$$J_x \hat{x} + J_y \hat{y} + J_z \hat{z}$$

Notem que $\bar{\nabla} \cdot \bar{J}$ é nulo quando não está sobre fontes





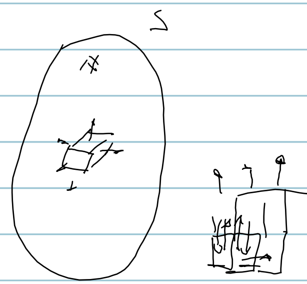
$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ $\qquad$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} \neq 0$

Considere uma superfície fechada S

Se quisermos obter o fluxo total em S podemos integrar $(\vec{\nabla}\cdot\vec{J})dV$ em todo o volume. Como os fluxos se cancelam internamente obtemos

$$\int_S \vec{J}\cdot d\vec{A} = \int_{Vol} (\vec{\nabla}\cdot\vec{J})\, dV$$

(Teorema de Gauss)



Exemplo 5.3.2 $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{r} = ?$

$$\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

5.4 Integral de linha

Dada uma curva no espaço, queremos somar vetores ou escalares nesta linha