$$\vec{B}_{dip} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{z^3} \hat{z}$$

Do livro Δ p. 151 obtivemos o $\vec{B}$ exato em $\hat{z}$:

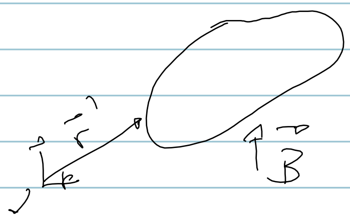
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$\lim_{z>>R} \vec{B} \to \frac{\mu_0 I R^2}{2 z^3} \hat{z} = \vec{B}_{dip}.$$

Sugestão de problema: 5.35 e 5.36

19- Magnetização da Matéria

19.1 Força e torque de um campo uniforme sobre um circuito de corrente



$$\vec{F} = I\oint d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$= I\underbrace{\left(\oint d\vec{l}\right)}_{0} \times \vec{B} = 0$$

Se o campo é uniforme, a força total sobre o circuito é ~~nulo~~ nula.

O torque, no entanto é (torque com respeito à origem) (PROB. 6.2)

$$\vec{\tau} = I\oint \vec{r}' \times (d\vec{l}' \times \vec{B}) = I\oint (\vec{r}' \cdot d\vec{l}')\vec{B} - \oint (\vec{B} \cdot \vec{r}')d$$

$$\vec{\tau} = I\vec{B} \oint \vec{r}\,' \cdot d\vec{l}\,' - I\vec{B} \times \int_S d\vec{a}\,'$$ → veja p. 11 (livro2)

$$\hookrightarrow \int_S \underbrace{(\nabla \times \vec{r}\,')}_{=0} \cdot d\vec{a}\,' = 0$$

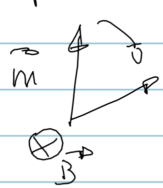
$$\vec{\tau} = -I\vec{B} \times \int_S d\vec{a}\,' = \underbrace{\left(I \int_S d\vec{a}\,'\right)}_{\vec{m}} \times \vec{B}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

O torque sobre o circuito depende do momento de dipolo do mesmo.

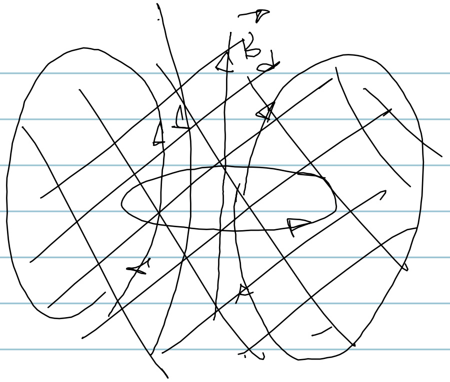
No caso do campo não ser uniforme é o campo de um dipolo perfeito (aquele que só tem na expansão multipolar o termo de dipolo) infinitesimal em $\vec{r}$.

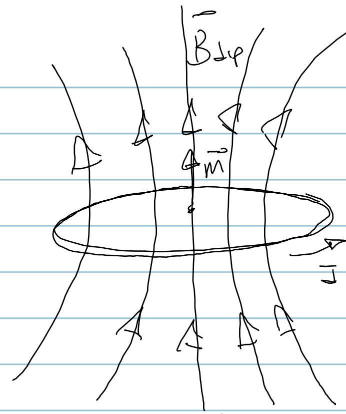
O torque existirá enquanto $\vec{m}$ não for paralelo ou anti-paralelo a $\vec{B}$



torque tende a alinhar com o campo. Portanto, o "circuito" vai girar p/ criar $\vec{m} \parallel \vec{B}$.

~~Ocorre que o campo de dipolo é no centro do dipolo~~ Ocorre que o campo criado por um circuito que tem momento $\vec{m}$ é $\parallel \vec{m}$ no centro do dipolo.





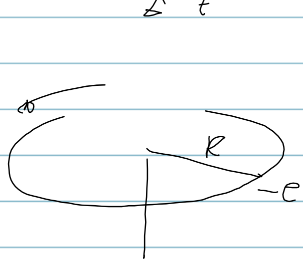
$\vec{B}_{dip} \parallel \vec{m}$
$\angle \parallel \vec{B}$
aplicado

Ou seja no centro do dipolo ~~o torque alinha~~ o campo criado pelo circuito é paralelo àquele do campo — se somam.

Em geral isto é o que acontece com os elétrons aqui tidos como uma pequena esfera girando com um momento de dipolo magnético (spin)

Nos átomos ou moléculas com número ímpar de elétrons, o elétron restante se alinha e cria um campo magnético paralelo ao campo aplicado. ISTO É CHAMADO PARAMAGNETISMO.

19.2
No caso de órbitas atômicas o efeito é distinto



consideremos $I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi R}$

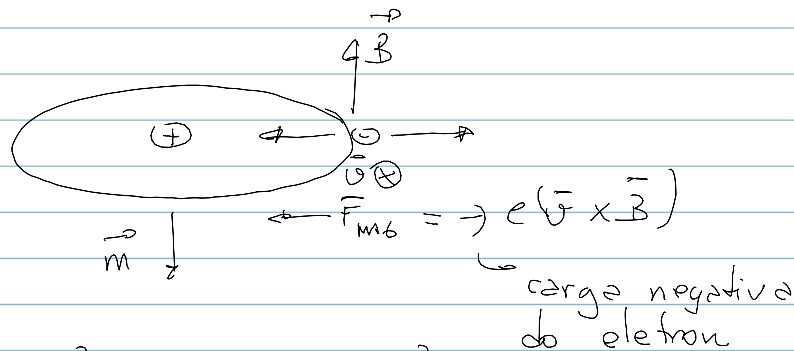
T período de revolução

$$\vec{m} = -\frac{\pi R^2 e v}{2\pi R}\hat{z} = -\frac{1}{2} e v R \hat{z}$$

A órbita circular estável implica em ~~bal~~ balancearmos a força centrífuga com a atração coulombiana:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m_e\frac{v^2}{R}$$

Sob um campo magnético perpendicular à órbita temos:



$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{R^2}}_{= m_e\frac{v^2}{r}} + e\bar{v}B = m_e\frac{\bar{v}^2}{R}$$

$$\Rightarrow e\bar{v}B = \frac{m_e}{r}\left(\bar{v}^2 - v^2\right)$$

$$e\bar{v}B = \frac{m_e}{r}(\bar{v}+v)(\bar{v}-v)$$

$\bar{v} \sim v$

$\Rightarrow \bar{v} + v \sim 2\bar{v}$

$\bar{v} - v \equiv \Delta v$

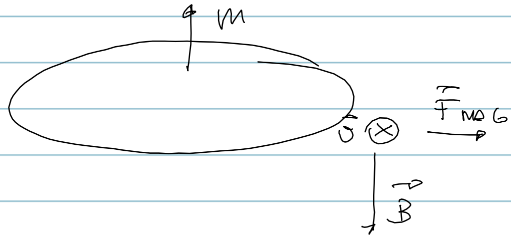
$$e\bar{v}B = \frac{m_e 2\bar{v}\Delta v}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta v = \frac{erB}{2m_e}}$$

$$\Delta \vec{m} = -\frac{1}{2} e \Delta v R \hat{z} = -\frac{e^2 R^2}{4 m_e} \vec{B}$$

Ou seja a presença de $\vec{B}$, diminui $\vec{m}$.

(Notem que se o campo fosse oposto $\vec{B} \parallel -\hat{z}$

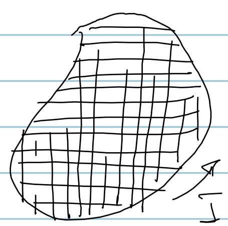


$\Delta v < 0$ e $\vec{m}$ diminuiria também

$\vec{B}$ leva à redução de $\vec{m}$ e portanto uma diminuição do campo magnético criado pela própria órbita. ISTO É CHAMADO DIAMAGNETISMO.

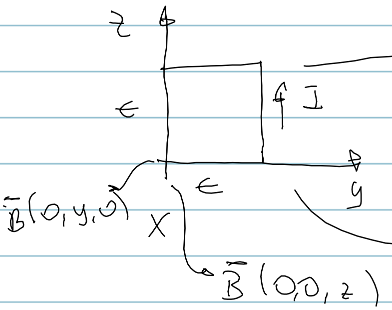
Em geral as órbitas não estão alinhadas com o campo as órbitas se alinham (parcialmente) antiparalelas ao campo, pois só assim são aceleradas. Este efeito é muito menor que o paramagnetismo e é observado no caso de átomos e moléculas com um número par de elétrons (spins cancelados)

19.3 Força num circuito com $\vec{B}$ não uniforme



Podemos fazer um circuito qualquer somando espiras quadradas infinitesimais. (TODAS CORRENTES INTERNAS SE CANCELAM)

Força sobre uma espira quadrada de lado ϵ (prob. 6.4)



$\vec B(0,\cancel{0,z}\ y,0) + \epsilon\dfrac{\partial \vec B}{\partial z}$

$\vec B(0,0,z) + \epsilon\dfrac{\partial \vec B}{\partial y}$

$$\vec F_\square = I\oint d\vec l \times \vec B = I\left[\int_0^\epsilon d\vec z\times\left(\cancel{\vec B(0,0,z)} + \epsilon\frac{\partial \vec B}{\partial y} - \cancel{\vec B(0,0,z)}\right)\right.$$

$$\left. -\int_0^\epsilon d\vec y \times\left(\cancel{\vec B(0,y,0)} + \epsilon\frac{\partial\vec B}{\partial z} - \cancel{\vec B(0,y,0)}\right)\right]$$

$$= I\epsilon^2\left(\hat z\times\frac{\partial\vec B}{\partial y} - \hat y\times\frac{\partial \vec B}{\partial z}\right) =$$

$$= I\epsilon^2\left[\frac{\partial B_x}{\partial y}\hat y + \frac{\partial B_y}{\partial y}(-\hat x) - \frac{\partial B_x}{\partial z}(-\hat z) - \frac{\partial B_z}{\partial z}\hat x\right]$$

$$= I\epsilon^2\left[\cancel{\partial B_x}\ \hat x\underbrace{\left(-\frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\right)}_{} + \frac{\partial B_x}{\partial y}\hat y + \frac{\partial B_x}{\partial z}\hat z\right]$$

$= \dfrac{\partial B_x}{\partial x}$ pois $\vec\nabla\cdot\vec B = 0$

$\Rightarrow \vec F_\square = I\epsilon^2\,\vec\nabla B_x$

Como $\vec m_\square = I\epsilon^2\hat x$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec F = \vec\nabla(\vec m_\square\cdot\vec B)}$

Somando p/ todos os quadrados $\vec F = \vec\nabla(\vec m\cdot\vec B)$

ou seja $\vec F = \sum \vec F_i = \vec\nabla\Big[\Big(\underbrace{\sum_i \vec m_i}_{\vec m}\Big)\cdot\vec B\Big]$

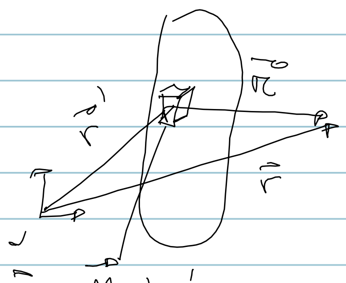
$\Rightarrow \vec F = \vec\nabla(\vec m\cdot\vec B)$

19.4 Correntes de Magnetização

Consideremos que a matéria esteja magnetizada com um momento de dipolo magnético $\vec M$ por unidade de volume. A magnetização pode ser um efeito do para ou diamagnetismo ou ser até permanente como veremos mais adiante.

Sabemos que um dipolo no ponto $\vec r\,'$ cria um potencial vetor em $\vec r$

$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec m \times \hat{r}}{r^2}$$



$$\Rightarrow \vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec M(\vec r\,')\times\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\,d\tau'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \left[\vec M(\vec r\,')\times\left(\vec\nabla'\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\right] d\tau'$$

$\vec m = \vec M\,d\tau'$

Temos que $\vec\nabla'\times\left(\frac{\vec M}{\mathscr{r}}\right) = \frac{1}{\mathscr{r}}\left(\vec\nabla'\times\vec M\right) - \vec M\times\vec\nabla'\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)$

$$\Rightarrow \vec M(\vec r\,')\times\left(\vec\nabla'\frac{1}{\mathscr{r}}\right) = -\vec\nabla'\times\left(\frac{\vec M}{\mathscr{r}}\right) + \frac{1}{\mathscr{r}}\left(\vec\nabla'\times\vec M\right)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int \frac{1}{\mathscr{R}}\left[\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}\,')\right] d\tau' - \int \vec{\nabla}' \times \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{\mathscr{R}}\right] d\tau'\right]$$

Para simplificar a segunda integral, vejamos

Dado a função vetorial $\vec{v} \times \vec{c}$, onde $\vec{c}$ é um vetor constante:

$$\int_{vol} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \times \vec{c})\, d\tau = \oint_S (\vec{v} \times \vec{c}) \cdot d\vec{a} = \oint_S (d\vec{a} \times \vec{v}) \cdot \vec{c}$$

$$= \left[\oint_S d\vec{a} \times \vec{v}\right] \cdot \vec{c}$$

$$\Rightarrow = \int_{vol} \left[\vec{c} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \vec{v} \cdot \underbrace{\cancel{(\vec{\nabla} \times \vec{c})}}_{=0}\right] d\tau = \left[\int_{vol} (\vec{\nabla} \times \vec{v})\, d\tau\right] \cdot \vec{c}$$

como vale para qualquer $\vec{c}$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{vol} (\vec{\nabla} \times \vec{v})\, d\tau = -\oint_S \vec{v} \times d\vec{a}}$$

$$\Rightarrow -\int \vec{\nabla}' \times \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{\mathscr{R}}\right] d\tau' = \oint \frac{\vec{M} \times d\vec{a}\,'}{\mathscr{R}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_{vol} \frac{\left[\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}\,')\right]}{\mathscr{R}} d\tau' + \oint \frac{\vec{M}(\vec{r}\,') \times d\vec{a}\,'}{\mathscr{R}}\right]$$

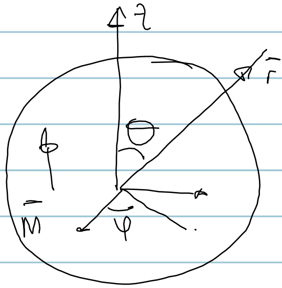
$$\rightarrow = \oint \frac{\left[\vec{M}(\vec{r}\,') \times \hat{n}\right]}{\mathscr{R}} da'$$

O potencial vetor parece ter dois termos, um de corrente volumétrica $\vec{J}_M$ e outro do corrente superficial dados por:

$$\boxed{\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}} \qquad \boxed{\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n}}$$

Ou seja, se soubermos $\vec{M}$ podemos obter o potencial vetor e o campo magnético usando as correntes volumétricas e superficiais de magnetização

Ex. 19.4.1 (ex. 6.1 do Griffiths)



correntes de magnetização:

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0$$

$$\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{r}\Big|_{\text{superfície}} = M \operatorname{sen}\theta\, \hat{\varphi}$$

O ex. 5.11 do Griffiths mostra que o campo de uma casca esférica carregada girando é uniforme p/ um $\vec{K} = \sigma\vec{v} = \sigma\omega R \operatorname{sen}\theta\, \hat{\varphi}$

O resultado é ~~igo~~ igual ao daquele exemplo se ~~fizer~~ trocarmos $\sigma\omega R$ por M

No exemplo $\vec{B} = \frac{2}{3}\mu_0 \sigma\omega R$; então aqui $\boxed{\vec{B}_d = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}}$

Fora da esfera $\boxed{\vec{B}_f = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \vec{M}}$??