

O potencial vetor parece ter dois termos,

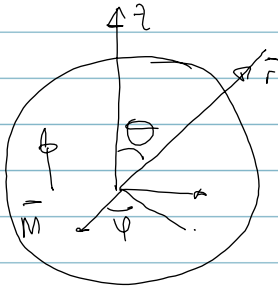
um de corrente volumétrica \vec{J}_M e outro de corrente superficial da qual por:

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$$

$$\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n}$$

Os sejs, se soubermos \vec{M} podemos obter o potencial vetor e o campo magnético usando as correntes volumétricas e superficiais de magnetização

Ex. 19.4.1 (ex. 6.1 do Griffiths)



correntes de magnetização:

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = 0$$

$$\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{r} \Big|_{\text{superfície}} = M \sin\theta \hat{\phi}$$

O ex. 5.11 do Griffiths mostra que o campo de uma casca esférica carregada girando é um binômio pl um $\vec{K} = \sigma \omega R \sin\theta \hat{\phi}$

O resultado é igual ao daquele exemplo se ~~trocar~~ trocarmos $\sigma \omega R$ por M

No exemplo $\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma \omega R$; então aqui $\vec{B}_d = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$

Tora da esfera $\vec{B}_f = \frac{4}{3} \pi R^3 \times M$

É interessante estudarmos o campo $\forall r > R$ da carga esférica ~~em~~ girando com ω na direção \hat{z}

No Griffiths, temos que $\vec{A} = \frac{\mu_0 R^4 \omega \sin\theta}{3 r^2} \hat{\phi}$; $r > R$

Se substituirmos $\rho \omega R \rightarrow M$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 R^3 M \sin\theta}{3 r^2} \hat{\phi}, \text{ que pode}$$

ser escrito como:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 4\pi R^3 M}{4\pi 3} \frac{\hat{z} \times \hat{r}}{r^2}; \text{ Agora o momento de}$$

dipolo total da esfera é $\vec{m} = M \hat{z}$, $\text{Vol} = \frac{4\pi R^3}{3}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}}$$

Ou seja, externamente o campo é o mesmo de um dipolo perfeito.

Isso fica mais claro se resolvermos o problema 5.36 que sugeri

Ex 19.4.2 Prob. 5.36 Griffiths

Momento de dipolo de uma carga esférica girando com $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ e mostrar

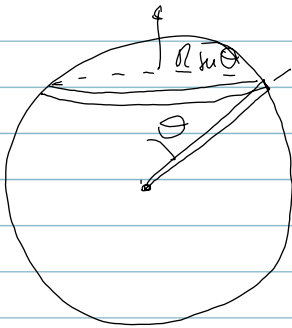
que o campo é de um dipolo perfeito

Do exemplo 5.11 (Griffiths) o potencial vetor calculado p/ este caso é:

$$\vec{A}(r, \theta, \varphi) = \frac{\mu_0 R^4 \omega r \sin \theta}{3 r^2} \hat{\varphi}, \quad r > R$$

$$= \frac{\mu_0 R^4 \omega r}{3} \frac{\hat{z} \times \hat{r}}{r^2} (I)$$

O momento do dipolo é obtido somando espiras de raio $R \sin \theta$ e lado $r d\theta$



$$dQ = 2\pi R \sin \theta R d\theta \sigma$$

$$dI = \frac{dQ}{T} = \frac{dQ}{2\pi/w} = w R^2 \sigma \sin \theta d\theta$$

$$d\vec{m} = dI \times \Delta(\vec{r}) = \pi w R^4 \sigma \sin^3 \theta d\theta \hat{z}$$

$$\vec{m}_T = \pi w \sigma R^4 \hat{z} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \pi w \sigma R^4 \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta$$

$$= \pi w \sigma R^4 \int_1^{-1} (1 - \xi^2) d\xi, \quad \xi = \cos \theta$$

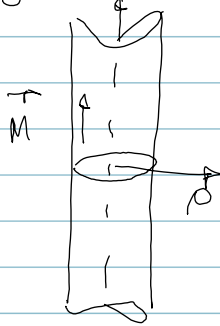
$$= \pi w \sigma R^4 \hat{z} \left(\xi - \frac{\xi^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4\pi}{3} w \sigma R^4 \hat{z}$$

O potencial vetor de um dipolo perfeito é

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}; \text{ Notem que } (I) \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_T \times \hat{r}}{r^2}$$

Outro exemplo importante que nos ajuda finalmente entender a relação entre campo magnético e ímãs é quando resolvemos o problema 6.7.

Ex. 19.4.3 Cilindro circular infinitamente longo com magnetização uniforme \vec{M} ao longo do eixo.



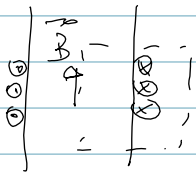
$$\vec{M} = M \hat{z}$$

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = 0$$

$$\vec{K}_m = \vec{M} \times \hat{\rho} \Big|_{\text{superfície}} = M \hat{z} \times \hat{\rho}$$

$$\vec{K}_m = M \hat{\phi}$$

Esta situação é o caso ideal do solenoide onde mostramos que o campo é uniforme dentro e nulo fora $\vec{B} \parallel \hat{z}$



$$BL = \mu_0 \frac{N I L}{L} = \mu_0 N I$$

$$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z} = \mu_0 n I$$

$$n I \hat{\phi} = \vec{K}$$

Portanto no cilindro $\vec{B} = \mu_0 K_m \hat{z} = \mu_0 M \hat{z} \quad \rho < R$
 $\vec{B} = 0 \quad \rho > R$

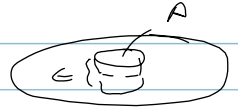
Tal como o solenoide, o campo muda próximo às extremidades.

Isso pode ser visto aqui se o cilindro fosse finito



Na junção, notamos que

M_n é descontínuo.



$$\int_S \vec{M} \cdot d\vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{M} \Big|_{\text{bre}} - \vec{A} \cdot \vec{M} \Big|_{\text{dentro}} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{M} \neq 0$$

$\epsilon \rightarrow 0$

ou seja, parece haver algum problema quando $\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \neq 0$.
Veremos isso melhor mais adiante.

~~19.5~~ → Leiação 6.2.2 de Griffiths — na aula comentarei sobre conceitos de magnetização.

19.5 O campo \vec{H}

Vimos que
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

No vácuo, \vec{J} envolve o fluxo de cargas e chamamos \vec{J}_e .

No material temos também corrente de magnetização

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_e + \vec{J}_m) = \mu_0 (\vec{J}_e + \vec{\nabla} \times \vec{M})$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_e$$

Se definirmos o campo $\vec{H} \equiv \vec{B} - \mu_0 \vec{M}$,
temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_e$$

e a lei de Ampère na forma integral fica:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_e \text{ enc.}$$

Muito bem \rightarrow em casos de simetria podemos resolver os problemas, basicamente esquecendo da matéria. Se não houver \vec{J}_e , não há \vec{H} e $\vec{B} = \mu_0 \vec{M}$.

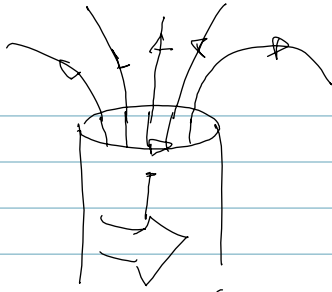
No entanto temos que tomar cuidado pois não sabemos o $\vec{\nabla} \cdot \vec{H}$. De fato

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} - \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

Ou seja além das correntes "reais" \vec{H} tem como fonte o $\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$ (tal como \vec{B} tinha como fonte o $\vec{\nabla} \times \vec{J}$).

Portanto, no exemplo 19.4.3, quando colocamos a tampa no cilindro, apesar de não termos nenhuma corrente, haverá \vec{H} e \vec{B} e $\vec{B} \neq 0$ fora do cilindro.

Na borda, é como se tivéssemos uma espira



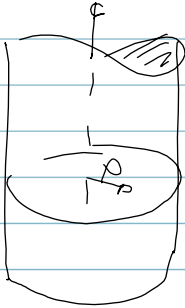
De todas formas, muitos problemas podem ser resolvidos.

Ex. 19.5.1 (Problema 6.12 - Griffiths)

Cilindro infinitamente longo

$$\vec{M} = k\rho \hat{z}$$

$$\vec{M} = M_z(\rho) \hat{z}$$



(\Rightarrow) Correntes induzidas de magnetização \vec{J}_m

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M_\rho & \rho M_\phi & M_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_z \end{vmatrix} = -k \hat{\phi}$$

$$\vec{K}_m = \vec{M} \times \hat{\rho} \Big|_{\text{sup}} = kR \hat{\phi}$$

Por simetria e o evitar divergências no infinito, \vec{j}' vimos que $\vec{B} = 0$ $\rho > R$. $\vec{B} = B(\rho) \hat{z}$

curvas amperianas $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{env}}$

A hand-drawn diagram of a rectangular Amperian loop. The length of the loop is L and its radius is ρ . The loop is oriented such that it encloses the cylinder.

$$BL = \mu_0 [k\rho L - k(R-\rho)L]$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 k \rho \hat{z} \quad \rho \leq R$$

$$\vec{B} = 0 \quad \rho > R$$

(b) Usando a lei de Ampère p/ \vec{H}

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enc}}, \quad \because I_e = 0$$

$$\Rightarrow \vec{H} = 0 = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{M}$$

$$\text{dentro } \vec{M} \rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{M}$$

$$\text{fora } \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{B} = 0$$

Sug. de problema: 6.13 e 6.15

19.6 Meios Lineares

Nos casos de $\mu \neq 1$ o diamagnetismo, \vec{M} , só existe enquanto \vec{B} está aplicado. Além disso para casos ~~permeáveis e materiais~~ permeáveis e materiais

$$\vec{M} = \chi \vec{H}, \quad \text{ou seja existe uma dependência linear de } \vec{M} \text{ com } \vec{H}$$

Em casos isotrópicos χ_m é uma constante.

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Notar que aqui \vec{M} é obtido em função de \vec{H} . Isto se deve ao fato que \vec{H} depende de correntes aplicadas que podemos medir facilmente.

χ_m e' a suscetibilidade magnética.

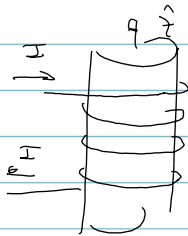
$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}}$$

μ e' a permeabilidade magnética do material
 paramagnéticos $\chi_m > 0$ diamagnéticos $\chi_m < 0$
 No vácuo $\chi_m = 0$ e $\mu = \mu_0$

Ex. 19.6.1 Ex. 6.3 do Griffiths

Solenóide com material magnético. corrente I



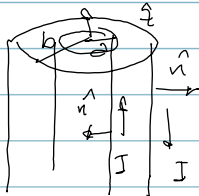
$$\vec{H} = n \vec{I} \hat{z}$$

$$\vec{B} ? \quad \vec{B} = \mu n \vec{I} \hat{z} = (1 + \chi_m) \mu_0 n \vec{I} \hat{z}$$

paramagnético $\chi_m > 0$ $\vec{M} \parallel \vec{B}$ $\vec{K}_M \propto \hat{\varphi}$
 na mesma direção da corrente

diamagnético $\chi_m < 0$ $\vec{M} \parallel -\vec{B}$ $\vec{K}_M \propto -\hat{\varphi}$
 oposta a I .

Ex. 19.6.2 Prob. 6.16



Usando a lei de Ampere entre os cilindros:

$$\vec{H} = H(\rho) \hat{\varphi} \quad 2\pi\rho H = I$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\varphi}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \frac{\mu I}{2\pi\rho} \hat{\varphi} = \frac{\mu_0 (1 + \chi_M)}{2\pi\rho} \hat{\varphi}$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \chi_M \vec{H} = \frac{\chi_M I}{2\pi\rho} \hat{\varphi}$$

Componentes da magnetização:

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\varphi} & \hat{z} \\ \partial/\partial\rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho \partial/\partial\rho & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{\chi_M I}{2\pi\rho} \right) \hat{z} = 0$$

$$\begin{aligned} \chi_M \Big|_z &= \vec{M} \times \hat{n} = \vec{M} \times (-\hat{\rho}) = \frac{\chi_M I}{2\pi\rho} \hat{\varphi} \times (-\hat{\rho}) \\ &= \frac{\chi_M I}{2\pi\rho} \hat{z} \end{aligned}$$

Portanto, se quisermos calcular \vec{B} com o correto fator utilizamos $(I + \frac{\chi_M I}{2\pi\rho})$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 (1 + \chi_M)}{2\pi\rho} I$$

Prob. anterior 6.17 (o problema 6.18 é irrelevante)