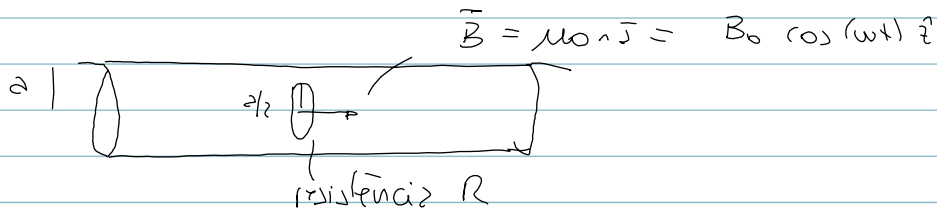


Ex. 20.3.1 (Problema 7.12)



$$\Phi = \frac{\pi a^2}{4} B_0 \cos(\omega t)$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi a^2}{4} \omega B_0 \sin \omega t$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\pi a^2}{4} \frac{\omega B_0 \sin \omega t}{R}$$

20.4 Campo elétrico induzido

Como vimos, mesmo sem ~~monomental~~ circuitos que criam forças magnéticas como fem, temos que ao variar no tempo o campo magnético, criamos campo elétrico. Temos duas fontes de \vec{E}

eletrostática: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$
 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

eletrodinâmica: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$
 (sem cargas) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

Uma vez que sabemos o rotacional e o divergente do campo, podemos determiná-lo.
 É interessante ver o parâmetro de magnetostática:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Portanto $\mu_0 \vec{J}$ cria campo magnético, exatamente da mesma forma que $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Mais ainda, como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, \vec{J} estacionário e $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ é também estacionário $\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = 0$

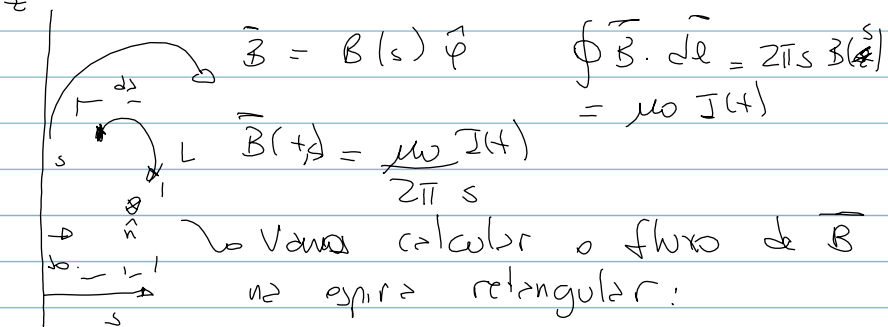
Podemos usar uma "lei de Ampère" para \vec{E} .

No entanto, há um problema misto. A saber, usamos o \vec{B} de magnetostática para calcular $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Quem garante que \vec{B} também não

é afetado por uma variação de \vec{E} (veremos isto depois). O exemplo abaixo trata deste problema:

Exemplo 20.4.1

Campo de um fio longo com corrente que varia com tempo lentamente $I(t)$



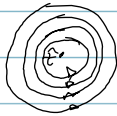
$$\phi = \int_{s_0}^s \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{J(s)}{s} ds = \frac{J(s) L \mu_0}{2\pi} (\ln s - \ln s_0)$$

Agora $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = ?$

Usando a analogia de eletrodinâmica c/ magnetostática, o ~~fluxo está na direção $\hat{\phi}$ e a variação do fluxo ou de o campo \vec{B} está na direção $\hat{\phi}$.~~ $\frac{d\vec{B}}{dt}$ está na direção $\hat{\phi}$.

Então o " \int " para $\nabla \times \vec{E}$ está na direção $\hat{\phi}$

que em magnetostática resultaria num solenoide com ~~camadas~~ múltiplas espiras com corrente que vai com $\hat{\phi}$



Certamente $\vec{E} \parallel \hat{z}$, não necessariamente uniforme como no solenoide de um único andamento

$$\text{Então } \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = L E(s_0) - E(s) L \quad (\text{fazendo com } \hat{z} \text{ normal } \parallel \hat{\phi}, \text{ entendendo na página } \hat{z}.)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi}{dt}$$

~~$$L E(s_0) - E(s) L = - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dJ}{dt} (\ln s - \ln s_0)$$~~

$$E(s) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dJ}{dt} \ln s + \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dJ}{dt} \ln s_0}_{\text{constante } K} + E(s_0)$$

$$\vec{E} = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dJ}{dt} \ln s + K \right) \hat{z}$$

Note que $\ln s \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow \infty$.

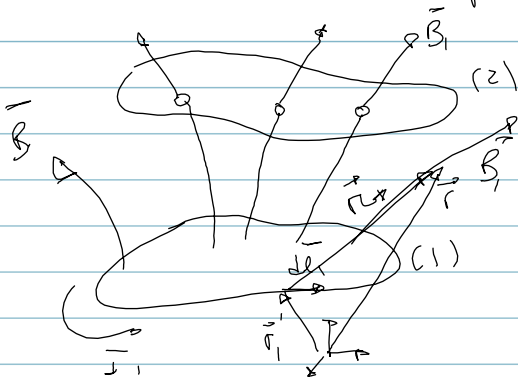
Ocorre que não poderemos dizer que qual é o \vec{B} p/ calcular o fluxo de \vec{B} numa distância para a qual a "informação" da mudança de \vec{I} ainda não chegou.

Ou seja, se \vec{I} muda consideravelmente num tempo τ , $s \ll c\tau$, onde c é a velocidade da luz.

Sugestão de problemas 7.18 e 7.19

20.5 Indutância (o livro está muito bom aqui)

Considere duas espiras arbitrárias



O campo criado por uma corrente estacionária em (1) tem um fluxo na espira (2).

$$\text{Campo de (1)} \quad \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 = M_{21} I_1 \rightarrow \text{proporcional a } I_1$$

M_{21} depende de parâmetros geométricos

$$\text{De fato } \Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 = \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{a}_2 = \oint \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

Agora, o potencial vetor \vec{A}_1 produzido pela espira 1 é:

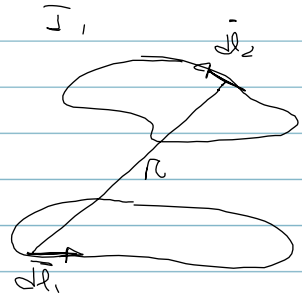
$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}_1}{r}$$

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\vec{l}_1}{r} \right) \cdot d\vec{l}_2$$

(1) Integral feita no circuito da espira 2

(2) Integral feita no circuito da espira 1

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \left[\oint \oint \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r} \right]$$



$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r}$$

Note $M_{21} = M_{12} = M \Rightarrow \Phi_1 = M_{12} I_2 = M_{21} I_2 = M I_2$

Uma vez que temos uma indução eletromagnética, se I_1 variar lentamente por causa da espira 2 próxima o suficiente teremos uma fem em 2 $\Rightarrow \mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}$

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$$

(o mesmo ocorre com o coment em (2) variando e induzindo em (1))

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt}$$

Mais interessante ainda é pensar que a espiral \mathcal{I} quando varia a corrente, induz uma variação de fluxo de \vec{B} , nele mesmo, isto é chamado auto-indução e

$$\mathcal{E} = -L \frac{d\mathcal{I}}{dt}$$

A indutância é medida em henries (H)

$$[H] = \frac{[V][As]}{[A]}$$

Ex 20.5.1 (Problema 7.22)

Auto-indutância de um solenoide de raio R com n voltas por unidade de comprimento.

$$\vec{B} = \mu_0 n \mathcal{I}$$

$$\Phi = \mu_0 n \mathcal{I} \times n \cdot \pi R^2 l$$

numero de espiras em L

$$\Phi = \mu_0 n^2 \mathcal{I} \pi R^2 l$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \mu_0 n^2 \mathcal{I} \pi R^2 \frac{d\mathcal{I}}{dt}$$

\Rightarrow Aparentemente

$$L = \mu_0 n^2 \pi R^2 l$$

por unidade de comprimento

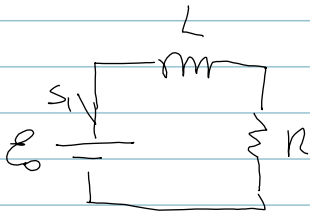
$$L/l = \mu_0 n^2 \pi R^2$$

Sugestão de problemas 7.23 ; 7.21

Como a auto-indutância é sempre > 0

que se cria um fem que se opõe à mudança de corrente, ele é chamado de contra eletromotriz. Ou seja, dado um circuito, quando quisermos passar uma corrente I aplicamos uma fem externa \mathcal{E} e cria-se uma fem contra eletromotriz $-L \frac{dI}{dt}$

Ex. 20.5.2 (Exemplo 7.12)



Obter $I(t)$ no circuito ao lado desprezando-a sub-indutância do circuito e que (a) S_1 é ligado em $t=0$ e (b) S_1 é desligado num tempo $\tau \gg L/R$

$$(a) \quad \mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} = RI \quad I(0) = 0$$

\uparrow fem externa \uparrow contra eletromotriz $\rightarrow L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0$

$$I = I_H + I_{NH} \quad \left\{ \begin{array}{l} I_{NH} = c \cdot A \\ L \frac{dA}{dt} + RA = \mathcal{E}_0 \Rightarrow A = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \end{array} \right.$$

homogênea:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$$

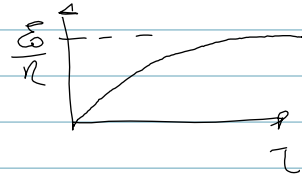
$$\Rightarrow \ln I = -\frac{R}{L} t + C; \quad I = C e^{-\frac{R}{L} t}$$

~~$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + C e^{-\frac{R}{L} t}$$~~

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + C e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$I(0) = 0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + C \Rightarrow C = -\frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right)$$



$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

$$I_{\max} \text{ ocorre em } t = \frac{L}{R}$$

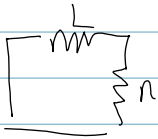
(b) Se abrimos o chave num tempo Σ , teremos

$$\frac{dI}{dt} \sim \frac{\mathcal{E}_0/R}{\Sigma}, \text{ portanto a taxa de indução}$$

será tão alta quanto menor Σ tentando restaurar a corrente. Esta taxa é inversa da rigidez elétrica do ar gerando faíscas.

Em geral se utiliza um capacitor em paralelo com a chave para evitar este problema.

(c) Se retirarmos a fonte externa e colocarmos um curto em um lugar fechado:



$$I(0) = \mathcal{E}_0/R \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I$$

$$I = C e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$I(0) = \mathcal{E}_0/R \Rightarrow C = \mathcal{E}_0/R \Rightarrow I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-\frac{Rt}{L}}$$

