20.6 Energia em Campo Magnético

A força contra eletromotriz é $-L\frac{dI}{dt}$

O trabalho que uma fonte faz por unidade de tempo (potência é)

$$dW = -\mathcal{E}\, dq \Rightarrow \frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}\frac{dq}{dt} = -\mathcal{E} I$$

escrevemos $-\mathcal{E}$ pois o trabalho da fonte é feito sobre a força contra-eletromotriz

Agora $\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt} = L I \frac{dI}{dt} \qquad \int_0^W dW' = L\int_0^I I' dI'$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} L I^2}$$

Lembremos que $\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$

$\frac{d\Phi}{dt} = L\frac{dI}{dt}$, ou seja $\Phi = L I$

(JÁ HAVÍAMOS VISTO ISTO $\Phi_1 = M_{12} I_2$
$\Phi = L I$)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\Phi I$$

Ocorre que $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a}$

$= \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$ x usamos o teorema de Green.

Vemos então que

$$W = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} I \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \oint \vec{A} \cdot \vec{I} \, dl$$

$$\vec{I} = I d\vec{l}$$

Isto pode ser escrito para correntes superficiais ou volumétricas:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{A} \cdot \vec{J}) \, d\tau \qquad (1)$$

então a densidade de energia magnética parece estar na corrente e é dada por $\frac{\vec{A} \cdot \vec{J}}{2}$

Lembramos que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) + \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (2)$$

Agora (1) pode ser escrito como

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \, d\tau \quad , \text{pois } \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Usando (2)

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\left[\int_V \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})\,d\tau - \int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\,d\tau\right]$$

$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$ e podemos usar o teorema do divergente no segundo termo.

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\left[\int_V B^2\,d\tau - \int_S (\vec{A}\times\vec{B})\cdot d\vec{a}\right]$$

Fazendo o volume em todo infinito, não altera a primeira integral pois o valor será igual p/ qualquer volume que englobe as regiões que $\vec{B}$ é diferente de zero. A segunda integral deve ser calculada numa casca no infinito onde $\vec{A}\times\vec{B} \to 0$. Portanto:

$$\boxed{W = \frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2\,d\tau}$$

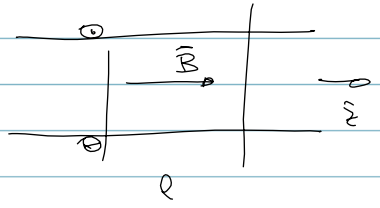
A densidade de energia magnética é $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$

a energia está no campo. ~~como~~ Esta questão é parecida com aquela das cargas.

Vejam o exemplo 7.6 do livro

Ex. 20.6.1 Problema 7.26

energia armazenada numa seção de comprimento l de um solenoide longo (R, corrente I, n voltas por unidade de comprimento)



$\bar{B} = \mu_0 n I \hat{z}$, uniforme

$$\rho_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0^{\cancel{2}} n^2 I^2}{2\,\cancel{\mu_0}}$$

$$W = \pi R^2 l \rho_B = \frac{\pi R^2 \mu_0 n^2 I^2}{2} l$$

Lembramos que $\frac{W}{l} = \frac{1}{2}\frac{L}{l} I^2$, então, podemos obter $\frac{L}{l} \rightarrow \frac{L}{l} = \mu_0 \pi R^2 n^2$

conforme obtemos na página 51.

Sug. de Problema: 7.28 Griffiths.

20.7 Equações de pré-Maxwell ~~(até agora~~

(1) $\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \rho/\varepsilon_0$ (3) $\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\partial \bar{B}/\partial t$

(2) $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0$ (4) $\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}$

Há uma inconsistência.

Vejamos $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$

é obtido de (3). O divergente do rotacional é nulo. Mas como (2) diz que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, tudo está certo.

Agora, em (4) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$

O lado esquerdo é nulo, mas o direito, em geral não. Aliás, só é quando a corrente for estacionária (não há acúmulos de carga com tempo)

Se lembrarmos da eq. da continuidade que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

e $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right)$$

Para que o div. da eq. 4 seja nulo p/ qualquer $\vec{J}$, basta somarmos $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right)$ à que equação.

Ou seja (4) fica $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Agora sim $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mu_0 \vec{\nabla} (\vec{J} - \vec{J}) =$

Isto modifica a lei de Ampère que deve levar em consideração a mudança de $\vec{E}$ no tempo.

Ou seja $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ é uma fonte de $\vec{E}$

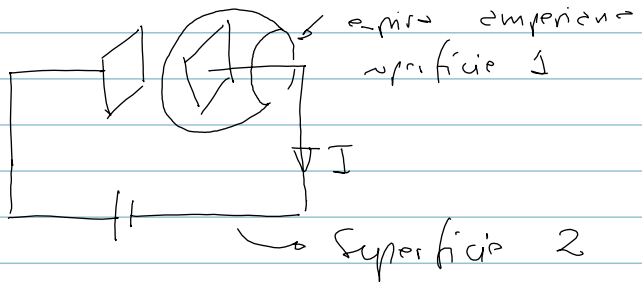
ρ é uma fonte de $\vec{E}$

$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ é uma fonte de $\vec{B}$

$\vec{J}$ é uma fonte de $\vec{B}$

~~Este~~ Esta modificação fica óbvia quando tentamos aplicar a lei de Ampère onde há ~~variar~~ acumulo de carga no tempo.

Por exemplo no capacitor



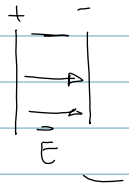
Usando a espira amperiana acima, obteremos resultados distintos se aplicarmos a lei de Ampère antiga na sup. 1 ou 2

sup. (1) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

!

Sup. (2) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$

Notem que no capacitor começa surgir carga positiva do lado esquerdo e negativa do lado direito. Isto cria um campo somente entre as placas (vamos ~~fazer~~ considerar as placas bem próximas.



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{I}{A\epsilon_0}$$

$$\int \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{a} = \mu_0 \frac{\epsilon_0 I}{A \epsilon_0} A = \mu_0 I$$

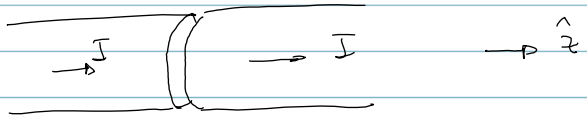
Portanto, agora usando a nova lei de Ampère:

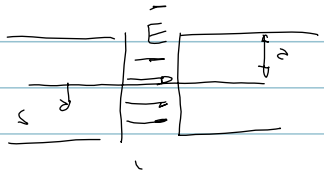
sup (1) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \int \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{a}}_{=0}$

sup (2) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\cancel{\mu_0 I}}_{=0} + \mu_0 \epsilon_0 \int \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{a} = \mu_0 I$

Ex. 20.6.7 Prob. 7.31 do Griffith

Campo magnético no intervalo entre dois fios cilíndricos, próximo ao ~~eixo~~ centro





$$\bar{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}\hat{z}$$

$$\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \mu_0 \cancel{\epsilon_0} \frac{Q}{\cancel{\epsilon_0} A}\frac{\partial Q}{\partial t}\hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0}{A} I \hat{z}$$

$I = 0$

$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I_{env} + \mu_0\epsilon_0 \int \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\cdot d\bar{a}$$

$I_{env} = 0$

Como $\bar{E} \parallel \hat{z}$ e $\partial\bar{E}/\partial t \parallel \hat{z}$ é como se tivéssemos uma corrente (chamada de corrente de deslocamento) axial. Este problema sugere que $\bar{B} = B(s)\,\hat{\varphi}$. Usando uma sup. amperiana de raio s, temos:

$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = 2\pi s B(s) = \mu_0 \frac{I}{A} \times \pi s^2 \quad ; \quad A = \pi a^2$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\frac{\pi s^2}{\pi a^2} \qquad \boxed{\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} s\,\hat{\varphi}}$$

As equações de Maxwell ficam:

(1) $\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \rho/\epsilon_0$ (3) $\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\partial \bar{B}/\partial t$

(2) $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0$ (4) $\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \bar{E}/\partial t$

que completam a eletrodinâmica com a força de Lorentz $\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$

Agora, o que ocorre quando o meio não é o vácuo e sim um certo material? Tópico da próxima aula.

Problema sugerido 7.34 Griffiths