

As equações de Maxwell ficam:

$$(1) \nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$$

$$(2) \nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$$

$$(3) \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$(4) \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$$

que completam a eletrodinâmica com  
as forças de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Agora, o que ocorre quando o meio não  
é o vácuo e sim um certo material?  
Tópico da próxima aula.

Problemas sugeridos 7.34 Griffiths

20.7 Equações de Maxwell na matéria

Vimos que na presença de matéria surgem  
dipolos elétricos e magnéticos induzidos cujo  
o efeito pode ser descrito por uma densidade  
de carga de polarização  $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$  e

uma corrente volumétrica de magnetização  $\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$

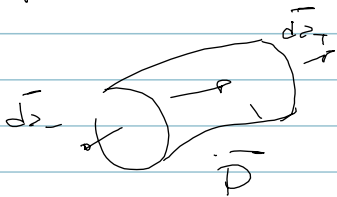
De fato, surgem também densidades superficiais de  
carga e densidades superficiais de corrente. Do por-  
to de vista das eq. de Maxwell em sua forma  
diferencial, estas não interessam explicitamente.

Como não temos cargas magnéticas, não há  
maneira de  $\vec{J}_m$  criar qualquer tipo de campo

de alguma "carga"  $\vec{J}$ . De fato, se mudar  $\vec{M}$  com o tempo  $\vec{J}$  muda com o tempo.

No caso de polarização no eufanto devemos ver se  $\rho_m$  cria algum tipo de corrente.

Se tomarmos um pedaço de matéria cuja polarização varia no tempo, temos



(pedaço bem pequeno de matéria)

$$-\sigma_p \quad \sigma_p \quad \sigma = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$\frac{\Delta P}{\Delta t}$  leva a uma variação de  $\sigma_p$

$$\frac{\Delta(-\sigma_p)}{\Delta t} \rightarrow -\frac{\Delta \vec{P} \cdot d\vec{z}_-}{\Delta t} \quad \Delta t \rightarrow 0 \quad \frac{\partial \vec{P} \cdot d\vec{z}_-}{\partial t}$$

$$\frac{\Delta(+\sigma_p)}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta \vec{P} \cdot d\vec{z}_+}{\Delta t} \quad \frac{\partial \vec{P} \cdot d\vec{z}_+}{\partial t}$$

Os sinais é como se  $\frac{\partial \vec{P} \cdot d\vec{z}}{\partial t}$  fosse do bob negativo ao positivo. Isto configura uma corrente

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (d\vec{J} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot d\vec{z})$$

Notem que isto satisfaz a eq. de continuidade

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_p - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t}$$

Se então usarmos ( dividirmos ) a densidade de carga em :

$$\rho_T = \rho_e + \rho_p = \rho_e - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

e a densidade de corrente

$$\vec{J}_T = \vec{J}_e + \vec{J}_m + \vec{J}_p = \vec{J}_e + \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

as equações (1) e (4) da página 62 ficam modificadas. (as outras não envolvem correntes nem cargas)

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_T}{\epsilon_0} = \left( \rho_e - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \right) \frac{1}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_e \quad \vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e$$

$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_e + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \left[ \underbrace{\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}}_{\vec{H}} \right] = \vec{J}_e + \frac{\partial}{\partial t} \left( \underbrace{\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_e + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

As equações ficam então:

$$(1) \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e$$

$$(3) \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$$

$$(2) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(4) \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_e + \partial \vec{D} / \partial t$$

Nos meios lineares temos as relações constituintes

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

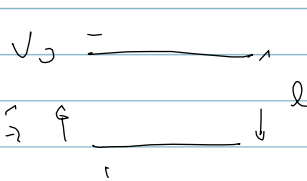
$$\vec{H} = \vec{B} / \mu$$

Ex. 20-7.1 (problem 7.37)

Água do mar  $\epsilon = 81 \epsilon_0$   $\rho = 4 \cdot 10^8 \text{ Hz}$

$$\rho = 0,23 \Omega \cdot \text{m}$$

$\rho > \rho_c$  entre conceitos de condutividade e com o de deslocamento.



$$\vec{D} = D \hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{D}{\epsilon} \hat{z}$$

$$V_0 = \frac{D}{\epsilon} = \epsilon E$$

$$\Rightarrow |\vec{D}| = \frac{\epsilon V_0}{l} = \epsilon V_0 \cos(2\pi \omega t)$$

$$\vec{J}_0 = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\epsilon V_0 2\pi \omega}{l} \sin(2\pi \omega t)$$

$$\vec{J} = \sigma_c \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho} \Rightarrow \vec{J} = \frac{V}{l\rho} = \frac{V_0 \cos(2\pi \omega t)}{l\rho}$$

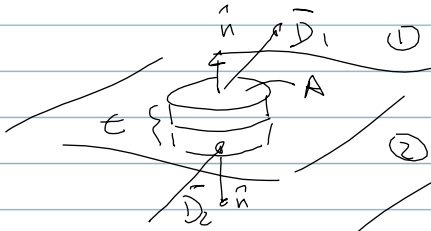
$$\frac{\text{amp}(\vec{J})}{\text{amp}(\vec{J}_0)} = \frac{V/l\rho}{\epsilon V_0 2\pi \omega / l} = \frac{1}{2\pi \omega \epsilon \rho} = \frac{1}{2\pi \times 4 \cdot 10^8 \times 8,8 \cdot 10^{-12} \cdot 0,23} = 2,4 \mu$$

## 2.8 Condições de contorno

Como já fizemos várias vezes, usaremos as equações de Maxwell na forma integral. As que envolvem integrais de superfície, fazemos um cilindro com lado infinitesimal. As que envolvem integrais de linha, fazemos um lado superior ~~em~~ retângulo cujo lado perpendicular à interface é infinitesimal.

Vejamos

$$(1) \nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \Rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_e \text{ env}$$



quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  
não há contribuição  
dos lados.

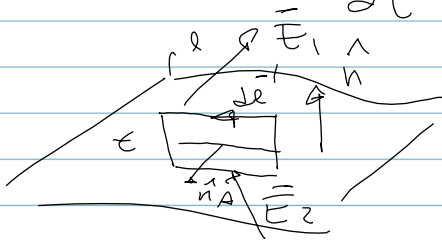
$$A (\vec{D}_1^+ \cdot \hat{n} - \vec{D}_2^+ \cdot \hat{n}) = \sigma_e A \Rightarrow \boxed{\vec{D}_1^+ \cdot \hat{n} - \vec{D}_2^+ \cdot \hat{n} = \sigma_e}$$

O mesmo procedimento para eq. (2)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{leva a} \quad \vec{B}_1^+ \cdot \hat{n} - \vec{B}_2^+ \cdot \hat{n} = 0$$

Ou seja, a descontinuidade de  $\vec{D} \cdot \hat{n}$  é a densidade de carga na superfície e  $\vec{B} \cdot \hat{n} = 0$

$$\text{Eq. (3)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , não há contribuição dos lados

$$E_1'' l - E_2'' l = -\frac{d}{dt} \Phi = -\frac{d}{dt} \vec{B} \cdot A \hat{n} \rightarrow 0$$

$$E_1'' - E_2'' = 0$$

$$A = l\epsilon \rightarrow 0$$

quando  $\epsilon \rightarrow 0$   $\epsilon \rightarrow 0$

Então a componente paralela do campo elétrico é contínua.

Eq (4) Seguindo o mesmo raciocínio

$$H_1'' - H_2'' = K_l$$

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{D} \cdot (l\epsilon) \hat{n} \rightarrow 0$$

$\epsilon \rightarrow 0$

como superfície no espino

$$(H_1'' - H_2'') \cdot \vec{l} = \vec{J}_e \cdot (\vec{l} \times \hat{n}_A)$$

$$\vec{J}_e \cdot \vec{l} \rightarrow K$$

quando  $\epsilon \rightarrow 0$

Se  $\hat{n}$  é um vetor unitário perpendicular à interface

$$\hat{n} \times \vec{l} = l \hat{n}_A$$

$$\hat{n} \times \vec{l} = \hat{n}_A$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{H}_1'' - \mathbf{H}_2'') \cdot \hat{\mathbf{e}} &= \underbrace{\bar{\mathbf{J}}_e}_{\in (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{e}})} \\
 &= \bar{k}_e \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{e}}) \\
 &= \bar{\mathbf{l}} \cdot (\bar{k}_e \times \hat{\mathbf{n}})
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}_1'' - \mathbf{H}_2'' = \bar{k}_e \times \hat{\mathbf{n}}$$

Os componentes de  $\bar{\mathbf{H}}$  paralelos à superfície tem uma descontinuidade dada pela corrente superficial.

Obviamente para meios lineares, podemos ~~fora~~ utilizar as relações constitutivas e ~~as~~ reservar as condições de contorno.

Problemas finais sugeridos :

7.40, 7.45, 7.49 ; 7.51 e 7.56