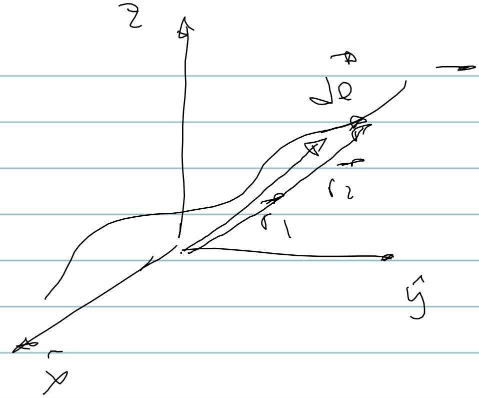


$\vec{d\ell}$ descreve o vetor infinitezimal pelo qual devemos percorrer para obter a integral

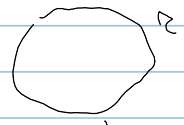
Alguns tipos: (a) $\int_c \varphi(\vec{r})\, d\vec{\ell}(\vec{r})$

(b) $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{\ell}(\vec{r})$ (c) $\int_c \vec{F} \times d\vec{\ell}(\vec{r})$

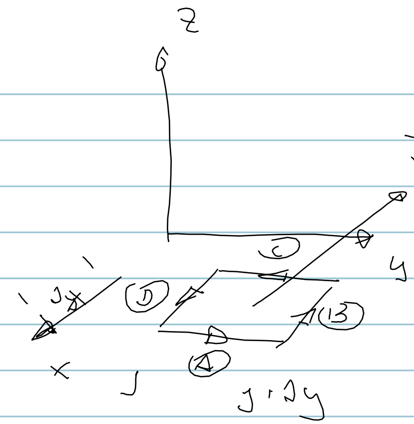
Nos concentramos no caso (b). Note-se que esta integral, se $\vec{F}$ for força, nos dá o trabalho da força no caminho

A integral de linha pode ser realizada num caminho fechado

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$



consideremos a integral fechada num quadrado de lados $x, x+\Delta y$; $y, y+\Delta y$



$$\oint \vec{V}\cdot d\vec{\ell} =$$

$$\overset{A}{V_y(x+\Delta x, \bar{y})\,\Delta y}$$

$$- \overset{B}{V_x(\bar{x}, y+\Delta y)\,\Delta x}$$

$$\overset{C}{-V_y(x,\bar{y})\,\Delta y} + \overset{D}{V_x(\bar{x}, y)}$$

$$\frac{\oint \vec{V}\cdot d\vec{\ell}}{\Delta x \Delta y} = \frac{V_y(x+\Delta x, \bar{y}) - V_y(x,\bar{y})}{\Delta x}$$

$$- \frac{V_x(\bar{x}, y+\Delta y) - V_x(\bar{x}, y)}{\Delta y}$$

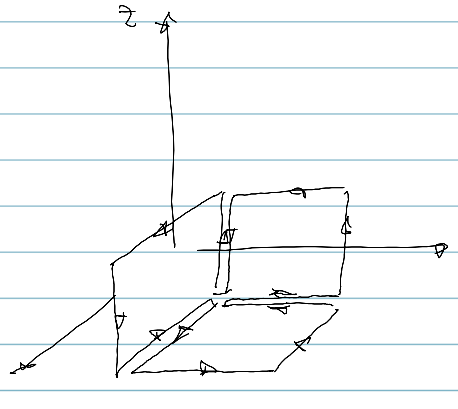
No limite de $\Delta x \Delta y \to 0$

$$\lim_{\Delta x \Delta y \to 0} = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$$

$\Rightarrow$

Ou seja, o ~~fluxo~~ = integral de projeção infinitesimal em torno de um ponto no plano x,y (normal em $\hat{z}$) por unidade de superfície é $\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$

Considere a superfície 3D abaixo e o circuito conforme desenhado



No limite $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$

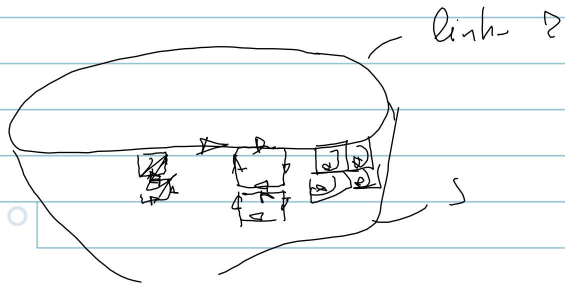
$$d\vec{A} = dy\,dz\,\hat{x} + dx\,dz\,\hat{y} + dx\,dy\,\hat{z}$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint \vec{V}\cdot d\vec{l}}{\Delta A} = \underbrace{\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}}_{\vec{\nabla}\times\vec{V}} \cdot d\vec{A}$$

rotacional de $\vec{V}$ $\longrightarrow$ $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ (de um vetor $\vec{V}$)

O fluxo infinitesimal em torno de um ponto é igual ao produto escalar do rotacional e o elemento infinitesimal de área.

Consideremos a superfície abaixo



A integral de linha de $\vec{V}$ em $\mathcal{C}$ é

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = ?$$

Fazendo a integral em todos os elementos infinitesimais todos os caminhos internos se cancelam restando somente a integral de linha na extremidade ($\mathcal{C}$). Como as integrais de linha, cada uma dá o fluxo em cada elemento de área infinitesimal

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{A}$$

(teorema de stokes

5.5 Alguns casos importantes de aplicações sucessivas dos operadores diferenciais ou em produtos de escalares e ou entre vetores

~~5.5~~ (a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} =$

$=$ Laplaciano

(b) $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$

(c) $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{V}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(fV_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(fV_y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(fV_z)$

$$= f\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) + V_x\frac{\partial f}{\partial x} + V_y\frac{\partial f}{\partial y} + V_z\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{V} + \bar{\nabla} f\cdot\vec{V}$$

(d) Similarmente $\vec{\nabla}\times(f\vec{V}) = f\,\vec{\nabla}\times\vec{V} + \bar{\nabla} f\times\vec{V}$

(e) $$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla} f = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \dots$$

$$\bar{\nabla}\times\vec{\nabla} f = 0$$ rotacional do gradiente é nulo

(f) $$\bar{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = 0$$

divergente do rotacional é nulo

Outras relações existem, algumas ficarão para exercício.

Ex 5.5.1 $\quad \vec{\nabla} \times \vec{r} = ? \quad \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{pois} \quad \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial y} \dots = 0$$

Funções que dependem só de $|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$g(r)$

$$\vec{\nabla} g(r) = \frac{\partial g}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial g}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial g}{\partial z}\hat{z} =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\hat{z} =$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r} \to \frac{dg}{dr}\right) \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} g(r) = \frac{\vec{r}}{r}\frac{dg(r)}{dr} = \hat{r}\frac{dg(r)}{dr}$$

caso especial $\quad g(r) = r \quad \frac{dg}{dr} = 1$

$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$$

(claro o gradiente aponta para a direção do aumento do módulo do vetor $\vec{r}$)

$\cancel{\vec{\nabla}\cdot(g(r)\vec{r})} =$

$$\vec{\nabla}\cdot[g(r)\vec{r}] = \vec{\nabla}g(r)\cdot\vec{r} + g(r)\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{r}}_{3}$$

$$\vec{\nabla}g(r) = \frac{\vec{r}}{r}\frac{dg}{dr}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot[g(r)\vec{r}] = \frac{r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}}\frac{dg(r)}{dr} + 3g(r) \quad \checkmark$$

• No caso de $g(r)\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{\nabla}r$

$g(r) = 1/r$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}r) = r\left(-\frac{1}{r^2}\right) + \frac{3}{r}$$

$$\boxed{\nabla^2 r = \frac{2}{r}} \qquad (r \neq 0)$$

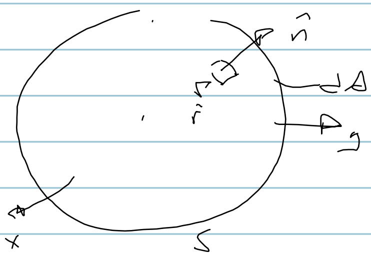
• $g(r) = 1/r^3$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{3r}{r^4} + 3\frac{1}{r^3} = 0 \qquad (r \neq 0)$$

Ex. 5.5.2

Seja uma superfície esférica (de raio R) centrada na origem. Qual é o fluxo total de $\vec{v} = \frac{\vec{r}}{r^3}$

Como $|\vec{v}|$ depende só de r, é uma constante em toda a esfera. $v(R) = 1/R^2$



$$d\vec{A} = dA\,\hat{n} = dA\,\hat{r}$$

$$\Phi = \int_S \vec{v}\cdot d\vec{A} = \int_S v(r)\,dA$$

$$= v(R)\int_S dA = v(R)\,4\pi R^2$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{4\pi \cancel{R^2}}{\cancel{R^2}}$$

Ex 5.5.3

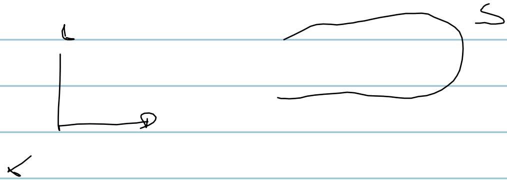
Seja um vetor que é obtido do rotacional de outro: $\vec{v} = \vec{\nabla}\times\vec{F}$.

Qual é o fluxo numa superfície fechada

$$\oint_S \vec{v}\cdot d\vec{A} = \oint_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot d\vec{A} \underset{(\text{Gauss})}{=} \int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})\,dV = 0$$

(divergente do rotacional é nulo)

Ex 5.3.4 Fluxo do vetor $\vec{r}$ numa superfície não incluindo a origem com área S e volume V

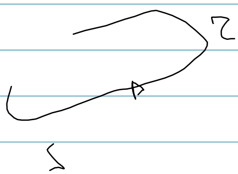


$$\oint_S \vec{r} \cdot d\vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{r})\, dV = 3\int_V dV = 3V$$

(só depende do volume)

Ex. 5.3.5

Dada uma linha ℓ obter $\oint \vec{r} \cdot d\vec{\ell}$



$$\oint \vec{r} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{r}) \cdot d\vec{A} = 0,$$

pois $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$

5.6 Laplaciano de um vetor

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A})}_{BAC} - \underbrace{\vec{A}(\vec{\nabla}\vec{\nabla})}_{CAB}$$

Notem que para fazer sentido os operadores devem ser definidos