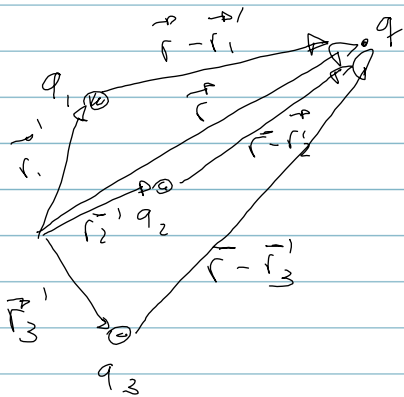


coléica sobre uma  $c > 0 \Rightarrow q$  num ponto  
 $\vec{r}$ , podemos somas  $\Rightarrow$  contribuições



$$\vec{F} = q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} q_i$$

somas de  $n$  fontes que estã em  $\vec{r}_i$ )

Campo elétrico :  $\vec{E}(\vec{r}) \equiv \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$

Dado  $\Rightarrow$  carga de prova  $q$  no ponto  $\vec{r}$ , o campo elétrico é a força elétrica em  $\vec{r}$  por unidade de carga de prova quando a carga de prova tende a zero (esta definição garante que a presença de  $q$  não afeta a distribuição das outras cargas)

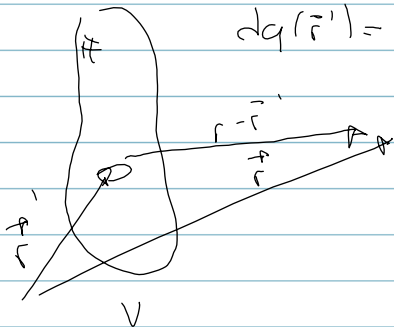
$$\begin{aligned} \text{No caso acima } \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} q_i, \quad \vec{r} \equiv \vec{r} - \vec{r}_i \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2} q_i, \quad \hat{r} \equiv \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

Se considerarmos distribuições contínuas de cargas, temos que definir uma densidade de carga que nos forneça a densidade de carga num certo ponto  $\vec{r}'$  do espaço

$$\rho(\vec{r}') = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r}')}{\Delta V} dz'$$

Portando  $dq(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') dz'$

Podemos pensar que um certo volume  $V$  é composto por cargas  $\rho(\vec{r}') dz'$  em cada  $\vec{r}'$ . Desta forma, o campo fica



$$dq(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') dz'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \hat{n}}{r^2} dz'$$

A integral  $r'$  feita no volume  $V$  todo para incluir a contribuição de todas as cargas.

Nos casos em que as cargas estão distribuídas de forma contínua numa superfície  $S$ . Neste caso, temos que definir uma densidade superficial de cargas em cada ponto  $\vec{r}'$  de superfície.

$$\sigma(\vec{r}') = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r}')}{\Delta S} \quad \cdot d\vec{a}'$$

$dq(\vec{r}') = \sigma(\vec{r}') d\vec{a}'$   
 $\vec{r} - \vec{r}' = \vec{r}$   
 $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') \hat{r} d\vec{a}'}{r^2}$

O integral é feito em toda a superfície

Por fim, temos o caso de uma distribuição ao longo de uma linha  $l$ . Definindo uma densidade linear  $\lambda(\vec{r}')$

( $r$  onde path)  $\lambda(\vec{r}') = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r}')}{\Delta l} \rightarrow d\vec{l}'$

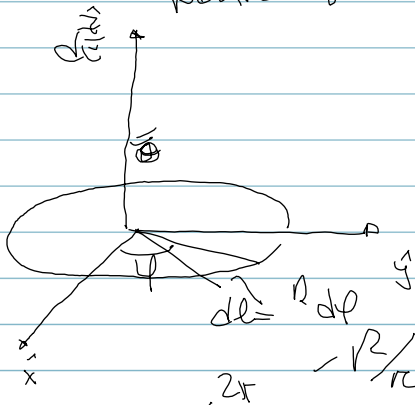
$dq(\vec{r}') = \lambda(\vec{r}') d\vec{l}'$

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda(\vec{r}') \hat{r} d\vec{l}'}{r^2}$

Nosso problema envolve sempre "montar"  $\rightarrow$  integrar as fontes adequadamente e obter expressão para  $\rightarrow$  contribuições de cada elemento de fonte num certo ponto

Isto pode ser feito rapidamente (aproximadamente) quanto se queira (computador resolve seu problema). Em casos de simetria, pode ser muito simples.

Ex. 7.1.1 Anel de raio  $R$  com densidade de carga  $\lambda(\varphi)$ , onde  $\varphi$  é o ângulo azimutal. No final fazer  $\lambda(\varphi) = \lambda_0 = Q/(2\pi R)$ . Calcule no ponto  $z$  conforme mostrado na figura



$$r = (z^2 + R^2)^{1/2}$$

$$\cos \theta = z/r, \quad \sin \theta = R/r$$

$$dl = R d\varphi \rightarrow dq(\varphi) = \lambda(\varphi) R d\varphi$$

$$E_{\perp z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \lambda(\varphi) R d\varphi}{(z^2 + R^2)^{3/2}} (\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y})$$

$(z^2 + R^2)^{3/2} \sim r^3$

$$E_{\perp z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{r^3} \int_0^{2\pi} \lambda(\varphi) (\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y})$$

Se  $\lambda(\varphi) = \lambda_0$   $\vec{E}_{\perp z} = \frac{\lambda_0 R^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} [\sin \varphi - \cos \varphi]_0^{2\pi} = 0$

(por simetria, isto parece óbvio)

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \lambda(\varphi) R d\varphi}{r^2}$$

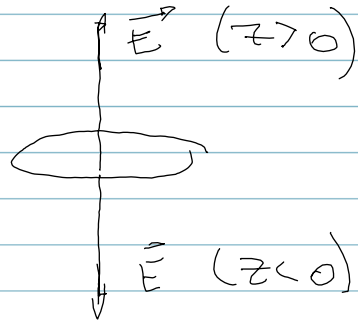
$$\lambda(\varphi) = \lambda_0$$

$$E_z = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{z}{r^3} R \, d\varphi = \frac{\lambda_0 z R}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$E_z = \frac{\lambda_0 z R}{2\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$z=0 \quad E_z \rightarrow 0$$

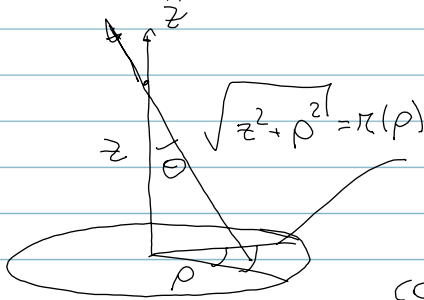
$$z \ll R \quad E_z \rightarrow \frac{\lambda_0 z}{2\epsilon_0 R^2}$$



$$z \gg R \quad E_z \rightarrow \frac{\lambda_0 z R}{2\epsilon_0 z^3} = \frac{(\cancel{2\pi R}) R}{2\epsilon_0 z^2}$$

$$E_z \rightarrow \frac{\odot}{4\pi\epsilon_0 z^2} \perp \quad (\text{campo de uma carga})$$

Ex. 7.1.2 Mesmo problema c/ disco carregado com densidade uniforme  $\sigma = Q / \pi R^2$



$$dq = \sigma \rho \, d\rho \, d\varphi$$

$$\rho : 0 \rightarrow R$$

$$\varphi : 0 \rightarrow 2\pi$$

$$\cos \Theta = \frac{z}{(z^2 + \rho^2)^{1/2}}$$

Por simetria  $\vec{E} \parallel \hat{z}$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma \rho z \, d\rho \, d\phi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho \, d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

$$\xi = z^2 + \rho^2, \quad d\xi = 2\rho \, d\rho$$

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_{z^2}^{z^2 + R^2} \xi^{-3/2} d\xi = -\frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \xi^{-1/2} =$$

$$= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} (z^2 + \rho^2)^{-1/2} \Big|_R^0 = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right]$$

$$z \gg R$$

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z(1 + R^2/z^2)^{1/2}} \right]$$

$$E_z \approx \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} \right) \right]$$

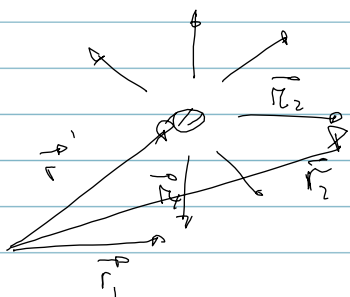
$$E_z \approx \frac{\sigma z R^2}{4\epsilon_0 z^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$

Lei de Gauss

O campo de uma carga  $q$  colocada em  $\vec{r}'$ , conforme medido em  $\vec{r}$  é

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{r} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$$

O campo portanto sai ou entra radialmente em  $\vec{r}'$



Para representarmos os campos usamos as linhas de campo. Estas são desenhadas de tal forma  $\Rightarrow$  mostram a direção e o sentido dos campos pelas linhas e flechas, além de mostrar a magnitude pelo número de linhas por unidade de área.

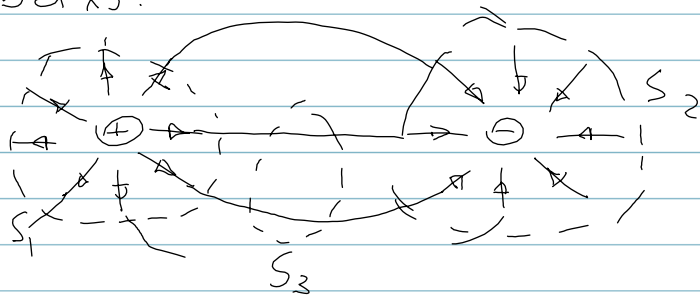
Como o campo é radial e a magnitude cai com  $1/r^2$ , as linhas de campo

são afastam radialmente (esfericamente) de tal forma que o número de linhas que cruzam uma superfície esférica com centro em  $\vec{r}'$  seja constante.

Ou seja, ÁREA varia com  $r^2$ , mesmo número de linhas  $\Rightarrow$  magnitude cai com  $r^2$

(Se o mundo fosse bi-dimensional, possivelmente a lei de Coulomb dependeria de  $1/r$ )

Se quisermos saber o fluxo de  $\vec{E}$  numa superfície, temos que ver o nº de linhas que cruzam a superfície. Vejamos o caso abaixo:



Claramente  $S_1$  tem fluxo positivo,  $S_2$  negativo e  $S_3 = 0$  pois as linhas de campo que entram saem. Parece que somente quando a carga está dentro da superfície o fluxo numa superfície fechada é  $\neq 0$ .

Vejamos isto matematicamente.

Vimos na página 27 que  $\nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$   $\vec{r} \neq 0$

Na página 41, vimos que isto se aplica também ao vetor  $\vec{r}$

$$\nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0 \quad ; \quad \text{Sendo o campo de uma carga } q \text{ em } \vec{r}'$$

$$\vec{r} \neq 0 \quad (\vec{r}' \neq \vec{r}) \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Temos que  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  para  $\vec{r} \neq 0$ , ou  $\vec{r}' \neq \vec{r}$

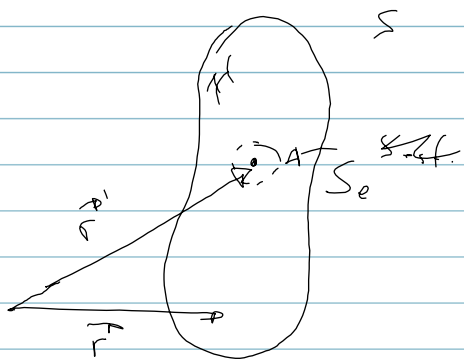


Portanto, podemos calcular o fluxo de  $\vec{E}$  numa superfície fechada qualquer que não contenha o ponto  $\vec{r}'$  e ele será nulo.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\tau = 0$$

(S não contém o ponto  $\vec{r} = \vec{r}'$ )

Agora, se quisermos incluir o ponto  $\vec{r}'$ , temos que buscar o fluxo total, mas como, se  $\vec{E}$  diverge?



Se envolvermos o ponto  $\vec{r}'$  onde está a carga com uma superfície esférica interna de raio  $\epsilon R$  e usando a lei de divergente, podemos calcular o fluxo.

Vejam os

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\tau = \int_{V_1} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\tau + \int_{V_{ext}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau$$

exclui-se a carga
ext

Agora, em  $V_1$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  em todos os pontos porque excluímos a esfera de raio  $\delta R$ , então:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\tau} = \int_{V_{ext}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\tau$$

Usando a lei de Gauss (divergente), temos que

$$\int_{V_{ext}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\tau = \oint_{S_{ext}} \vec{E} \cdot d\vec{\tau} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_{ext}} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{\tau}$$

$d\vec{\tau} \parallel \hat{r}$

A última integral acima foi resolvida na p. 28 (ex. 5.5.2) e mostramos ser  $4\pi$  independentemente do raio da esfera. Podemos então fazer  $\delta R \rightarrow 0$ . Portanto

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\tau} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi$$

Lei de Gauss

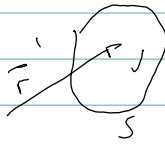
$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\tau} = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

Dado o princípio de superposição dos campos, se fizermos mais cargas envolvidas pelo cmo contribuirá ~~com~~ no lado direito da expressão

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{z} = (q_1 + q_2 + q_3 + \dots)_{\text{env}} \frac{1}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{z} = \frac{Q_{\text{env}}}{\epsilon_0}$$

Se isto vale para qualquer volume e tivermos uma distribuição de cargas  $dq$  por  $\rho(\vec{r}')$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{z} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') d\tau'$$


Usando a lei do divergente:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\tau' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') d\tau'$$

Como isto vale para qualquer volume, temos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

O fluxo total infinitesimal por unidade de volume, do campo elétrico em torno do ponto  $\vec{r}$  é a densidade de carga /  $\epsilon_0$ .