NOTA SOBRE FUNÇÃO DELTA DIRAC

Notem que se desejássemos fazer a integral no volume da página 5:

$$\cancel{\oint_S f(\vec{r})\,\vec{E}\cdot d\vec{a}} \quad \int_V \left[\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right] f(\vec{r})\, d\tau =$$

$$= \int_{\substack{V_{\text{rest}} \\ \text{em torno de } \vec{r}=0}} \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) f(\vec{r})\, d\tau$$

Fazendo-se $\delta R \to 0$, restringe $f(\vec{r})$ a um único valor $f(0)$, ou seja

$$\lim_{\delta R \to 0} \int_{V_{\text{rest}}} \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) f(\vec{r})\, d\tau = f(0) \int_{\substack{V_{\text{rest}} \\ r \to 0}} \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) d\tau$$

$$= f(0)\, 4\pi$$

Portanto $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 4\pi\,\delta^3(\vec{r})$ delta de Dirac

$$\int_{\substack{\text{Volume} \\ \text{infinito}}} f(\vec{r})\,\delta^3(\vec{r}) = f(0)$$

Lembramos que $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta^3(\vec{r})$$

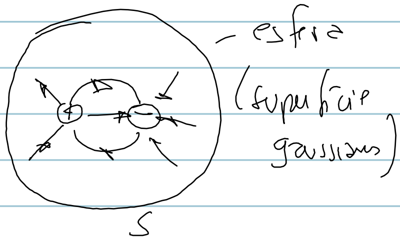
+ Exemplos de aplicação na Lei de Gauss.

Simetrias esférica, cilíndrica, plana.

casca, uniformemente carregada

(Estes exemplos são exaustivamente apresentados nos livros textos, portanto os apresentarei em classe, mas não incluirei nas notas de aula)

+ Um erro comum que se comete é achar que se o fluxo de $\vec{E}$ é nulo, $\vec{E}$ é nulo. Em alguns casos ñ simétricos isto ñ é verdade. Por exemplo



$Q_{env} = 0$

$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0$, mas,

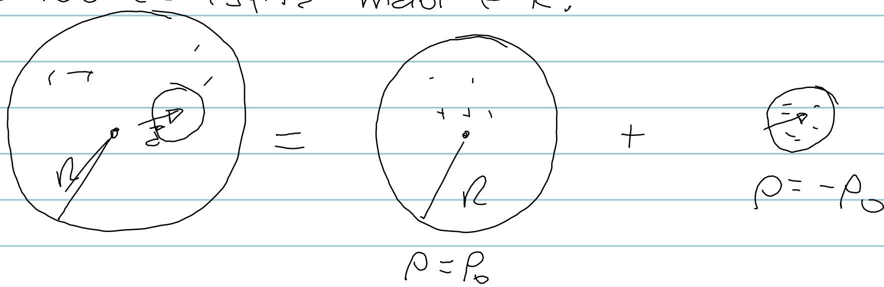
certamente o campo não é nulo dentro da esfera.

+ Outra questão importante é a superposição dos campos. Pode ocorrer que dois objetos simétricos ~~entre si, que~~ (Por exemplo: uma esfera e um cilindro) quando dispostos juntos não têm a simetria. De toda forma, se um não muda as características do outro e serem colocados juntos, pode-se obter o campo total usando a lei de Gauss separadamente.

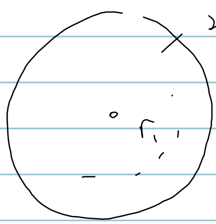
+ Por fim, a superposição pode ser usada para criar-se objetos com buracos.

Veremos exemplos destes ~~tópicos~~ observações

Ex. 8.1 Campo no interior de um buraco esférico dentro de uma esfera uniformemente carregada. O buraco está centrado em $\vec{r} = \vec{a}$. O raio da esfera maior é R.



A região no buraco é interna à esfera pequena e à esfera grande.
Campo no interior de uma esfera uniformemente carregada:



superfície gaussiana

$Q_{env} = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \rho_0$

$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{env}}{\epsilon_0} \Rightarrow$

$\vec{E} = E(r)\hat{r} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r_1)\int dA = 4\pi r_1^2 E(r_1)$

$d\vec{A} = dA\,\hat{r}$

$\cancel{4\pi r_1^2}\, E(r_1) = \frac{\cancel{4}}{3}\pi r_1^{\cancel{3}} \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$

$$\bar{E}_1(\bar{r}) = \frac{\rho_0 r \hat{r}}{3\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\vec{r}$$

Se fizéssemos para a esfera com $-\rho_0$ centrada em $\vec{r} = \vec{a}$

$$\bar{E}_2(\vec{r} - \vec{a}) = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}(\vec{r} - \vec{a})$$

Portanto o campo total no interior do buraco é:

$$\bar{E}_T(\bar{r}) = \bar{E}_1(\bar{r}) + \bar{E}_2(\bar{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\vec{a} \quad \text{(uniforme)}$$

9. Potencial elétrico

$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$; Vejamos o rotacional de $\bar{E}$:

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla} \times \left(\frac{\bar{r}}{r^3}\right)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\bar{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\underbrace{\bar{\nabla} \times \vec{r}}_{=0} + \bar{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right) \times \vec{r}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3\vec{r}}{r^5} \qquad = -\frac{3}{r^5}\bar{r} \times \vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\nabla} \times \bar{E} = 0} \quad \text{(p/ campos criados por cargas)}$$