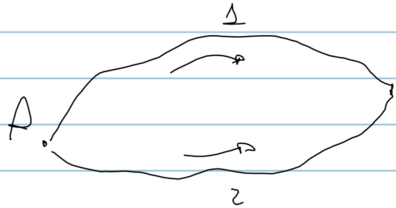
É interessante notar que num circuito fechado

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int (\bar{\nabla} \times \bar{E}) \cdot d\bar{A} = 0$$

Imaginemos dois pontos e dois ~~circuito~~ caminhos entre eles




$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} =$$

$$\cancel{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}} \underbrace{\int_{A}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{1} + \underbrace{\int_{B}^{A} \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{2} = 0$$

$$\underbrace{\int_{A}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{1} - \underbrace{\int_{A}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{2} = 0$$

Ou seja $\int_{A}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ independe do caminho e só depende dos pontos finais.

Podemos definir a diferença de potencial entre os pontos A e B, como:

$$V(b) - V(a) = -\int_{a}^{b} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$ (por qualquer caminho)

A razão do sinal $(-)$ fica claro quando multiplicamos a equação por uma ~~q~~ carga de prova:

$\cancel{q}\,\cancel{V_b}$

$$\cancel{q}\left(V(b) - V(a)\right) = -\int_A^B q\bar{E}\cdot d\vec{l}$$

Agora a força elétrica é $\bar{F} = q\vec{E}$
↳ sobre a carga

Portanto $q[V(b) - V(a)]$ é o trabalho que temos que fazer sobre a carga para contrapor a força elétrica (ou seja aplicamos uma força ~~que~~ com mesma magnitude e sentido oposto com a partícula andando com velocidade uniforme.

O potencial elétrico num ponto $\vec{r}$ é

$$V(\bar{r}) = -\int_{ref}^{\bar{r}} \bar{E}\cdot d\vec{l}$$

Entre dois pontos $\vec{r}$ e $\vec{r} + \Delta\bar{r}$

$$V(\bar{r}+\Delta\bar{r}) - V(\bar{r}) = -\int_{ref}^{\vec{r}+\Delta\bar{r}} \bar{E}\cdot d\bar{l} + \int_{ref}^{\bar{r}} \bar{E}\cdot d\bar{l}$$

$$= -\int_{\vec{r}}^{\bar{r}+\Delta\bar{r}} \bar{E}\cdot d\bar{l} \qquad \Delta\bar{r} \to 0$$

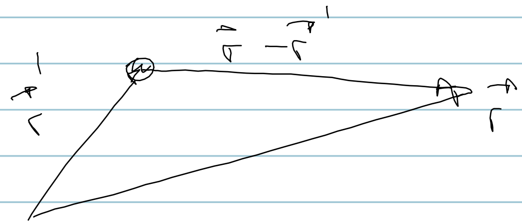
$$dV(\bar{r}) = +\bar{\nabla}V\cdot d\bar{l} = -\bar{E}\cdot d\bar{l} \Rightarrow \boxed{\bar{E} = -\nabla V(\bar{r})}$$

Unidade $\vec{E}$ é N/C

Unidade de V é $\frac{Nm}{C}$ = VOLT

A referência em geral escolhida num ponto bem distante das cargas $r \to \infty$.
Nos casos de distribuições de cargas que vão até o infinito, esta escolha não é boa.
(por exemplo — plano infinito).

Potencial de uma carga num ponto $\vec{r}'$




Como podemos escolher o caminho, faremos um caminho ao longo de $\vec{r} - \vec{r}'$ indo para ~~$\vec{r}$ de ∞~~ $\infty \to \vec{r}$. de

$$V(\vec{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{\vec{\mathscr{r}}' \cdot d\vec{\mathscr{r}}'}{\mathscr{r}'^3} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{r} \frac{d\mathscr{r}'}{\mathscr{r}'^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \mathscr{r}'}\Big|_{\infty}^{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\mathscr{r}} \qquad (\mathscr{r} \equiv \vec{r} - \vec{r}')$$

O potencial também obedece o princípio de superposição. Da mesma forma que fizemos p/ o campo, o potencial pode ser obtido para várias cargas ou para uma distribuição de cargas.

$$V(\bar r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i q_i(\bar r_i)\frac{1}{r_i}$$

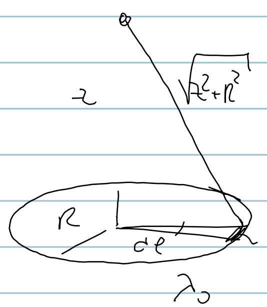
$$V(\bar r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{vol}\frac{\rho(\bar r')\,dv'}{r}$$

(ref. $\to \infty$)

(similar p/ superfície ou linha)

Ou seja, o potencial pode ser obtido a partir do campo ou diretamente pela distribuição de cargas. A vantagem é que o potencial é um escalar e a soma é de parcelas escalares.

Ex. 9.1 Anel uniformemente carregado num ponto z




$dq = \lambda R\, d\varphi$

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda R\, d\varphi}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

$$V(z) = \frac{\lambda_0 R}{2\epsilon_0}\frac{1}{(z^2+R^2)^{1/2}}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\lambda_0 R\,(-1/2)\,2z}{2\epsilon_0\,(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\lambda_0 R z}{2\epsilon_0\,(z^2+R^2)^{3/2}}$$

(Veja pp. 46-47)

Ex 9.2 Qual é o trabalho para levar uma carga Q de $z = L$ a $z = 0$

$$W_{L\to 0} = Q\left[V(0) - V(L)\right] = Q\left[\frac{\lambda_0 R}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{L^2+R^2}}\right)\right]$$

10. Trabalho e Energia p/ a criação de uma distribuição localizada de carga.

Trazemos uma carga $q_1$ para o ponto $r_1$

~~Para tr~~ Esta carga cria um potencial

$$V(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_1} \qquad r_1 \equiv |\vec{r} - \vec{r}_1|$$

Para trazer uma carga $q_2$ do infinito até a posição $\vec{r}_2$ temos que:

$$W = q_2\left[V(\vec{r}_2) - V(\infty)\right] = V(\vec{r}_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

$$E_{\text{duas cargas}} = W \qquad r_{12} \equiv |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$$

Se $q_1$ tem mesmo sinal de $q_2$ temos uma energia positiva. Do contrário, é negativa

Pensando em n cargas, é fácil ver que

$$E = W = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

p/ não contar um par duas vezes

Isto pode ser reescrito como

$$E = W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \left( \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}}}_{} \right)$$

potencial criado por todas as outras cargas exceto $q_i$

se esquecermos deste detalhe $= V(\vec{r}_i)$ sem contar o potencial de $q_i$ sobre si mesmo, o que vimos fazendo normalmente

Então $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V(\vec{r}_i)$

Se tivermos uma distribuição contínua de carga

volume : $W = (1/2) \int \rho V d\tau$

superfície : $W = (1/2) \int \sigma V da$

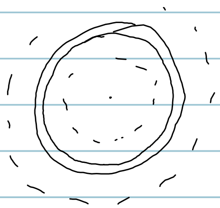
linha : $W = (1/2) \int \lambda V dl$

Voltemos ao caso do volume. A energia por unidade de volume é $\frac{\rho V}{2}$

10.1 Energia devido a uma casca esférica uniformemente carregada com carga total q, (raio = R)

$\sigma = q / 4\pi R^2$

Cálculo do potencial: façamos através do campo



$\bar{E}_d = 0$ (Lei de Gauss)

$\bar{E}_f = E(r)\,\hat{r}$

$\oint \bar{E}_f \cdot d\bar{A} = 4\pi r^2 E(r) = q/\epsilon_0$

$\bar{E}_f = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$

$r \geq R$

$V(r) = -\int_\infty^r \cancel{\frac{q}{4\pi r^3}} \frac{q\,\vec{r}}{4\pi r^3} \cdot d\vec{r} = -\int_\infty^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$

$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ $\quad V(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

dentro da esfera $V(r<R) - V(R) = -\int_R^r \bar{E}_d \cdot d\bar{r} = 0$

$\Rightarrow V(r<R) = V(R)$ (equipotencial)

Densidade de energia constante igual a

$\frac{1}{2} \frac{q}{4\pi R^2} \times \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ na casca

Dentro e fora da casca a densidade de energia é nula pois a carga é zero.

Então $W$ = densidade $\times$ $4\pi r^2$

$$\boxed{W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{R}}$$

— // —

Voltando à p. 63, temos

$$W = \frac{1}{2}\int_{volume} \rho V \, d\tau \quad \text{para um volume} \qquad \text{III}$$

Agora $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} \Rightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2}\int V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, d\tau$

$$\int_{volume} \vec{\nabla}\cdot(V\vec{E})\, d\tau = \int_V \left[(V\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) + \vec{\nabla}V\cdot\vec{E}\right] d\tau$$

$\vec{E} = -\nabla V$

$$= \cancel{\int V\nabla\cdot} \; \frac{2W}{\epsilon_0} - \int_V E^2 \, d\tau$$

Segundo a lei de Gauss (divergente)

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot(V\vec{E})\, d\tau = \oint_S V\vec{E}\cdot d\vec{A} \quad ; \quad \text{Então:}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\int_V E^2\, d\tau + \oint_S V\vec{E}\cdot d\vec{A}\right)$$

Se fizermos a integral em todo espaço pensando que $\rho = \rho(\bar{r})$ dentro do volume
$\rho = 0$ fora do volume
nosso problema não se altera.
No entanto a integral de $E^2$ só aumenta com o volume pois o integrando é sempre positivo. Para que $W$ continue o mesmo o segundo termo deve diminuir. De fato, como a integral é na superfície que aumenta com $r^2$ e o integrando diminui com $\frac{1}{r^3}$, o resultado deve diminuir com $\frac{1}{r}$

Se a superfície é infinita, então este termo é nulo.

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\substack{\text{todo} \\ \text{espaço}}} E^2 \, d\tau$$

A densidade de energia no campo em todo espaço por unidade de volume é $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$

(Discussão sobre auto-energia) $\rightarrow$ $W$ de 1 carga diverge!

10.2 Cálculo com campo

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{4\pi r^2}{r^4} \, dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$\boxed{W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}}$$

Sugestão de problemas até este ponto:
(Baseados no Griffth)
2.9; 2.10; 2.14; 2.21; 2.26; 2.32 (c)

11. Condutores
O livro texto trata bem desta questão. Não repetirei aqui.
Propriedades principais de condutores ideais

11.1 $\vec{E} = 0$ no interior (de outra forma, cargas se movem)
as cargas se movem até chegar à superfície onde não podem mais sair

11.2 $\rho = 0$ dentro do condutor (não ~~...~~ em um buraco...)
decorre de 11.2 pois em cada ponto $\nabla \cdot E = \rho$
$\Rightarrow \rho = 0$

11.3 As cargas estão na superfície (JÁ COMENTAMOS ACIMA)

11.4 O campo é perpendicular à superfície.
Sim, pois $E_{tang} \neq 0$ causaria movimento nas cargas