14. Soluções de Problemas em Eletrostática

14.1 Eq de Poison, eq. de Laplace

Vimos que $\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \rho / \epsilon_0$

$\bar{E} = -\nabla \varphi \Rightarrow \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

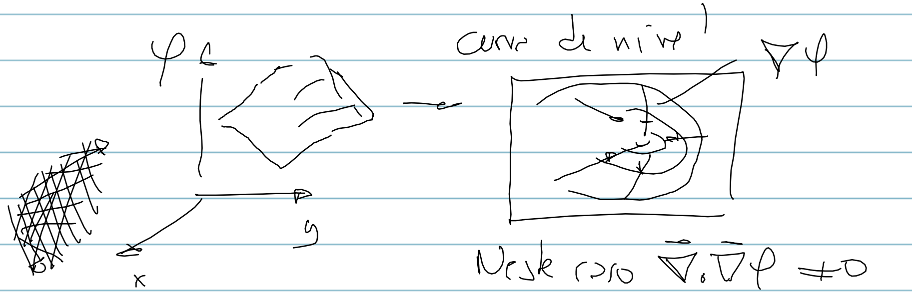
Em coordenadas cartezianas $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

Eq de Laplace $\rightarrow \rho = 0$

$\nabla^2 \varphi = 0 \qquad \bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \varphi) = 0$

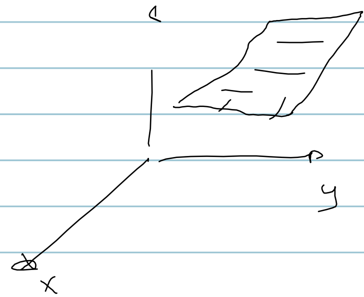
Pensando numa função escalar φ, temos que $\bar{\nabla}\varphi$ aponta sempre perpendicular às curvas de nível ($\varphi = \varphi_0$). Como o divergente do gradiente é nulo estes vetores nunca convergem ou divergem

Vejamos em duas dimensões

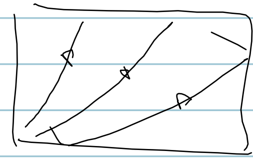


Neste caso $\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \varphi \neq 0$

Portanto φ não pode ter ~~...~~ extremos nas regiões onde $\nabla^2\varphi = 0$



curva de nível



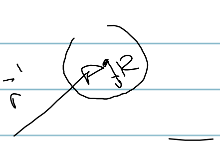
$\vec{\nabla}\varphi$

Neste caso $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi = 0$

Isto pode ser visto matematicamente.

Se $\nabla^2\varphi = 0$ numa região, escolhemos uma esfera em torno de um ponto $\vec{r}\,'$

— a esfera está sempre na região em que $\nabla^2\varphi = 0$



Vejamos: Seja ~~$\vec{F} = \vec{\nabla}(\psi\varphi)$~~

$$\vec{F} = \psi\vec{\nabla}\varphi - \varphi\vec{\nabla}\psi$$

$$\oint_{esf.} \vec{F}\cdot d\vec{A} = \oint \psi\vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{A} - \oint \varphi\vec{\nabla}\psi\cdot d\vec{A}$$

$$= \int_{vol} \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV = \int_{vol} \Big(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi + \underbrace{\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\varphi - \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\varphi}_{=0}\Big)\,dV$$

Se $\nabla^2 \varphi = 0$ e utilizando $\psi = \frac{1}{\mathscr{r}}$

onde $\vec{\nabla}\psi = -\frac{\vec{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^3}$ e $\nabla^2\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) = -4\pi\delta(\vec{\mathscr{r}})$

$\vec{\mathscr{r}} \equiv \vec{r} - \vec{r}\,'$

$$\oint_{esfera} \frac{1}{\mathscr{r}} \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{A} + \oint_{esf} \frac{\varphi}{\mathscr{r}^2} dA = 4\pi \int_{vol} \varphi\,\delta(\vec{\mathscr{r}})\,dV$$

$$\rightarrow \frac{1}{R} \oint \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{A} = \frac{1}{R}\int \overbrace{\nabla^2\varphi}^{=0}\, dV = 0$$

$\vec{\mathscr{r}} = 0$

$$\rightarrow \frac{1}{R^2} \oint \varphi\, dA = \cancel{4\pi\delta}\; 4\pi\,\varphi(\vec{r}\,')$$

Então $\boxed{\varphi(\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi R^2} \oint \varphi\, dA}$

O valor do potencial em $\vec{r}\,'$ é a média ~~sobre qualquer~~ do valor em qualquer esfera na região onde $\nabla^2\varphi = 0$. Ou seja, não há extremos nas regiões onde a equação de Laplace é satisfeita. Sendo mais preciso, se há extremos, são nas bordas da fronteira considerada.

Dois teoremas importantes:

I) Se $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ for solução da equação de Laplace, então:

$$\varphi = \sum_i c_i \varphi_i$$ também é pois

$$\nabla^2 \varphi = \nabla^2 \left(\sum_i c_i \varphi_i \right) =$$

$$= \sum_i c_i \nabla^2 \varphi_i = 0 \; ; \; \varphi \text{ também}$$

Portanto podemos somar soluções p/ satisfazer condições de contorno e obter a solução final.

II) Se φ_1 e φ_2 satisfazem a eq. de Laplace e as condições de contorno nas fronteiras (φ ou $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ especificados na fronteira)

Definimos uma nova função

$$\Phi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad \text{ao (devido a I)} \quad \nabla^2 \Phi = 0$$

cujas condições de contorno serão ~~Φ ao~~ $\Phi = 0$ ou $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ na fronteira.

Imaginemos a função vetorial $\phi \nabla \phi$

$$\int_{vol} \bar{\nabla} \cdot (\phi \bar{\nabla} \phi)\, d\vartheta = \int_{\text{superfícies}} \phi \nabla \phi \cdot n \, da = 0$$

pois ou ϕ ou $\nabla \phi$ se anula nas superfícies limítrofes

Como $\bar{\nabla} \cdot (\phi \bar{\nabla} \phi) = \phi \nabla^2 \phi + (\bar{\nabla} \phi)^2$

$$\int_{vol} \bar{\nabla} \cdot (\phi \bar{\nabla} \phi)\, d\vartheta = \int_{vol} \Big(\underbrace{\cancel{\phi \nabla^2 \phi}}_{=0} + (\nabla \phi)^2 \Big) d\vartheta = 0$$

$$\Rightarrow \int_{vol} (\nabla \phi)^2 \, d\vartheta = 0$$

↳ sempre positivo e então

$\cancel{\nabla^2 \phi} + (\nabla \phi)^2 = 0$ em todos os pontos

$\cancel{(\nabla \phi)^2 = (\nabla \varphi_1 - \nabla \varphi_2)^2}$

Ou seja ϕ não pode variar em ~~todos os p~~ qualquer ponto.

Se a condição de contorno era $\phi = 0$ na borda $\varphi_1 = \varphi_2$

Se a condição de contorno era $\dfrac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ na borda $\varphi_1 = \varphi_2 + c^{te}$ pois $\phi = c^{te}$

Ou seja a solução é única, a menos de uma constante.

14.2 Separação de variáveis e coordenada cartezianas

Dado $\nabla^2 \varphi = 0$

Supomos que $\varphi = X(x)Y(y)Z(z)$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,y,z)}{\partial x^2} = YZ\frac{d^2X}{dx^2}$$
$$\frac{\partial^2 \varphi(x,y,z)}{\partial y^2} = XZ\frac{d^2Y}{dy^2}$$
$$\frac{\partial^2 \varphi(x,y,z)}{\partial z^2} = XY\frac{d^2Z}{dz^2}$$

$$\frac{\nabla^2 \varphi}{XYZ} = \underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{\text{função só do } x} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{\text{função só de } y} + \underbrace{\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}}_{\text{função só de } z} = 0$$

A única possibilidade que as três funções sempre se anulem é que cada uma seja igual a uma constante.

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = C_1 \; ; \; \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = C_2 \; ; \; \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = C_3$$

$$\Rightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

A solução das equações p/ x_i serão sempre:

~~$X = A \sin$~~

$\cancel{X_i = A \sin \sqrt{c_i} x + B \sin \sqrt{c_i}}$

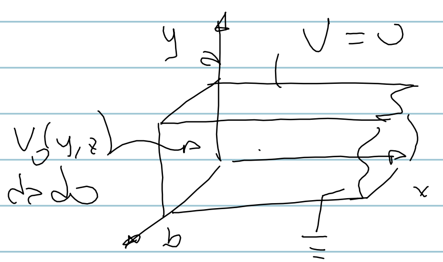
$$X_i = A \sin\left(\sqrt{-c_i}\, x_i\right) + B \cos\left(\sqrt{-c_i}\, x_i\right) \qquad x_i < 0$$

$$X_i = D e^{\sqrt{c_i}\, x_i} + E e^{-\sqrt{c_i}\, x_i} \qquad x_i > 0$$

$x_1 = x \; ; \; x_2 = y \; ; \; x_3 = z$

A escolha das constantes vai depender do problema e das condições de contorno

Exemplo 3.5 do Griffiths



ρ dentro do tubo

Como $x = \infty$ é parte do problema, temos que escolher uma solução que vá a zero no infinito $c_1 > 0$

Como em y e z a solução deve ser nula em dois pontos, escolhemos soluções periódicas. C_2 e $C_3 < 0$

Definimos $\quad C_2 \equiv -k_{\cancel{z}}^2 \qquad C_3 \equiv -l_{\cancel{z}}^2$

Como $\quad C_1 + C_2 + C_3 = 0 \qquad C_1 = k_z^2 + l_z^2 \equiv \gamma^2$

$$X(x) = A e^{\gamma x} + B e^{-\gamma x}.$$

Como $\varphi \to 0 \quad x \to \infty \quad A = 0$

Então $X(x) = B e^{-\gamma x}$

Em y :

$$Y(y) = C \sin hy + D \cos ky$$

$$Y(0) = 0 = D$$

$$Y(a) = 0 = C \sin hya \Rightarrow h_n = \frac{n\pi}{a}$$

~~X(x)~~ $Y(y) = C \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$

Em z :

$$Z(z) = E \sin lz + F \cos lz$$

$$Z(0) = 0 = F$$

$$Z(b) = E \sin lb = 0 \Rightarrow l_m = \frac{m\pi}{b}$$

O potencial fica então

$$\varphi_{nm}(x,y,z) = C_{nm} e^{-\gamma_{n,m} x} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{b}\right)$$

$$\gamma_{n,m}^2 = k_n^2 + l_m^2 = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)$$

A solução mais geral possível é uma combinação linear:

$$\varphi(x,y,z) = \sum_{n,m} C_{nm} e^{-\gamma_{n,m} x} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{b}\right)$$

Como obtemos C_{nm}?

Sabemos que $\varphi(0,y,z) = V_0(y,z)$ (dado no problema)

$$\Rightarrow V_0(y,z) = \sum_{n,m} C_{nm} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{b}\right)$$

Caímos num problema de série de Fourier.

Se multiplicarmos por $\sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{m'\pi z}{a}\right)$

e integrarmos $\int_0^a dy$ e $\int_0^b dz$ os dois lados lembrando que

$$\int_0^t \sin\left(\frac{s'\pi r}{t}\right)\sin\left(\frac{s\pi r}{t}\right)dr = \frac{t}{2}\delta_{s's}$$

temos

$$\sum_{n\,m}' C_{nm} \; \cancel{\delta_{n'm}}\; \delta_{nn'}\,\delta_{mm'}\,\frac{ab}{4}$$

$$= \frac{ab}{4}C_{n'm'} = \int_0^a\int_0^b V_0(y,z)\sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{m'\pi z}{a}\right)dy\,d.$$

$$\boxed{C_{n,m} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b V_0(y,z)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi z}{a}\right)dy\,dz}$$

Se $V_0(y,z) = V_0$ constante

$$C_{n,m} = \frac{4}{ab}\,\frac{a}{n\pi}\,\frac{b}{m\pi}\,V_0\left[\left(\cos(n\pi)-1\right)\left(\cos(m\pi)-1\right)\right]$$

n, m par $\quad C_{n,m} = 0$

n, m impar $\quad C_{n,m} = \dfrac{16}{nm\pi^2}$

$n = 2s+1 \qquad s = 0, 1, 2 \ldots$

$m = 2r+1 \qquad r = 0, 1, 2 \ldots$

$$\varphi(x,y,z) = \frac{16 V_0}{\pi^2} \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)(2r+1)} e^{-\gamma_{r,s} x} \times$$

$$\times \sin\left[(2s+1) y/a\right] \sin\left[(2r+1) z/a\right]$$

$$\gamma_{r,s}^2 = \pi^2 \left[\frac{(2s+1)^2}{a^2} + \frac{(2r+1)^2}{b^2}\right]$$

A densidade de cargas na placa em $y=0$ e $0<z<b$ é?

$$\sigma(x,0,z) = \frac{\vec{E}}{\epsilon_0} \cdot \underbrace{(-\hat{y})}_{=\hat{n}} \Big|_{y=0} \; ; \; -\vec{E}\cdot\hat{y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

$$\sigma(x,z) = \frac{16 V_0}{\pi^2 \epsilon_0} \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)(2r+1)} e^{-\gamma_{r,s} x} \frac{(2s+1)}{a} \sin\left[\frac{(2r+1)z}{a}\right]$$

$$\sigma(x,z) = \frac{16 V_0}{\pi^2 \epsilon_0 a} \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{r,s} x}}{(2r+1)} \sin\left[\frac{(2r+1)z}{a}\right]$$

Sugestão de problema: 3.15 do Griffiths
(se conseguir é porque aprendeu!)