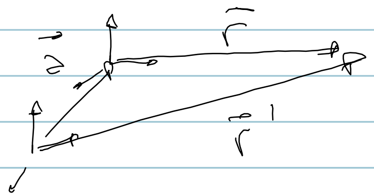
Notas sobre tópicos cobertos em FJ02
nas notas de aula deste caderno e do 1.

① Vetores

1a. Consideremos a translação por $\vec{a}$



$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$$

Uma grandeza escalar $\varphi(\vec{r})$ p/ um dos referenciais.

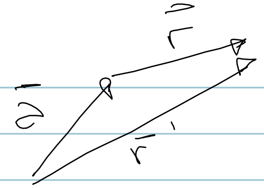
Para o outro $\varphi'(\vec{r}')$

Certamente $\varphi'(\vec{r}') = \varphi(\vec{r} + \vec{a})$

O mesmo ocorre se tivermos um vetor

$$\vec{A}'(\vec{r}') = \vec{A}(\vec{r} + \vec{a})$$

$$A_x(\vec{r}') = A_x(\vec{r} + \vec{a})$$
$$A_y(\vec{r}') = A_y(\vec{r} + \vec{a})$$
$$A_z(\vec{r}') = A_z(\vec{r} + \vec{a})$$

Ex. 

$$\rho(x,y,z) = \frac{c}{(x^2+y^2+z^2)}$$

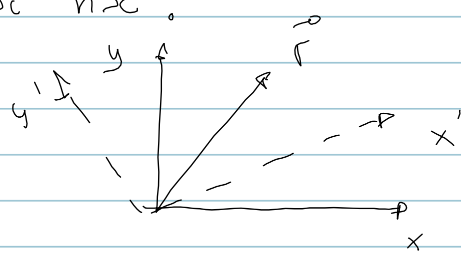
$$x' = x + a_x$$
$$y' = y + a_y$$
$$z' = z + a_z$$

$$\rho'(x',y',z') = \frac{c}{\left[(x'-a_x)^2+(y'-a_y)^2+(z'-a_z)^2\right]}$$

Quando $\bar{a} \to 0$ $\bar{r} = \bar{r}'$ e $x_i = x_i'$

Agora na rotação não!

1b. Rotação



$\vec{r}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ em S

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ em S'

Para que $\bar{r}$ seja o mesmo ente físico:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Grandeza escalar $\varphi(\vec{r}) = \varphi'(\vec{r}')$

$\bar{r} = \bar{r}' \Rightarrow \varphi = \varphi'$

Em S temos $\varphi(x,y,z)$ em S' teremos $\varphi(x',y',z')$

Exemplo $\varphi(\bar{r}) = r^2$ (2D)

Em S, $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$

Esperamos que em S' esta função seja

$$\varphi'(x', y') = x'^2 + y'^2$$

Vejamos:

$$\varphi = x^2 + y^2 = (\cos\theta x' - \sin\theta y')^2 + (\sin\theta x' + \cos\theta y')^2 =$$

$$= \cos^2\theta x'^2 + \sin^2\theta y'^2 - 2\sin\theta\cos\theta x'y' +$$
$$\sin^2\theta x'^2 + \cos^2\theta y'^2 + 2\sin\theta\cos\theta x'y'$$
$$= x'^2 + y'^2$$

$\hookrightarrow$ Portanto é invariante.

Vetor: $\bar{A}(\bar{r}) - \bar{A}'(\bar{r}')$

Como $\bar{r} = \bar{r}' \Rightarrow \bar{A}'(\bar{r}') = \bar{A}(\bar{r}')$

Independe das coordenadas

Mais ainda, uma propriedade que depende do tamanho, direção e sentido deve manter uma relação fixa destas propriedades com o vetor posição quando numa rotação. Ou seja, um vetor (ou campo vetorial) deve se transformar como o vetor posição.

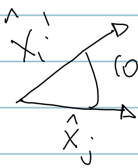
$$\begin{pmatrix} A_x' \\ A_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

e, como dissemos antes, $\cancel{A_x'(x_{ij}') = A_x(x')}$ $\cancel{A_y'(}$

$$\left.\begin{aligned} A_x'(x',y') &= A_x(x',y') \\ A_y'(x',y') &= A_y(x',y') \end{aligned}\right\} \text{ mesma função das coordenadas.}$$

Generalização da rotação de coordenadas

- Imaginem as coordenadas descritas por N versores $\hat{x}_i$. Numa rotação de coordenadas teremos N versores $\hat{x}_i'$. Os ângulos entre os versores dos sistemas são:



$$\cos\theta_{i'j} \equiv a_{ij} = \cos\theta_{ji'}$$

~~Se os sistemas são~~

Qualquer versor $\hat{x}_i'$ pode ser obtido como uma combinação linear dos versores $\hat{x}_j$

$$\hat{x}_i' = \sum_j a_{ij}\,\hat{x}_j \qquad \text{se ortogonais } \hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = \delta_{ij}$$

Da mesma forma

$$\hat{x}_j = \sum_i a_{ij}\,\hat{x}_i' = \sum_i \bar{a}_{ji}\,\hat{x}_i'$$

$\bar{a}_{ji}$ é o transposto de a_{ij}

Agora

$$\vec{r} = \sum_j x_j \hat{x}_j = \sum_j x_j \sum_i a_{ij} \hat{x}_i' =$$

$$= \sum_i \left[\sum_j a_{ij} x_j \right] \hat{x}_i'$$

$$\Rightarrow \boxed{x_i' = \sum_j a_{ij} x_j} \quad e \quad a_{ij} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} =$$

$$= \cos\theta_{ij} = \cos\theta_{ji}' = \frac{\partial x_j}{\partial x_i'}$$

Da mesma forma

$$\vec{r} = \sum_i x_i' \hat{x}_i' = \sum_i x_i' \sum_j a_{ij} \hat{x}_j =$$

$$= \sum_j \left[\sum_i a_{ij} x_i' \right] \hat{x}_j$$

$$\Rightarrow x_j = \sum_i a_{ij} x_i' = \sum_i a_{ji} x_i'$$

(Trocando $i \to j$ e $j \to i$)

$$\boxed{x_i = \sum_j a_{ij} x_j'} \qquad \frac{\partial x_i}{\partial x_j'} = a_{ij} = \frac{\partial x_j'}{\partial x_i}$$

Notem que

$$a_{ij} a_{ik} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} = \frac{\partial x_j}{\partial x_k} =$$

$= \delta_{jk}$ se forem ortogonais.

Notem também que a matriz de rotação

~~A~~ com A com componentes a_{ij} é unitária

$$M = A \cdot A^t$$

$$m_{ik} = \sum_j a_{ij} a_{jk} = \sum_j \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} \frac{\partial x_j'}{\partial x_k} =$$

$$= \sum_j \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} \frac{\partial x_k}{\partial x_j'} = \sum_j \frac{\partial x_i'}{\partial x_j'} \frac{\partial x_j'}{\partial x_j} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_j'} =$$

$$= \sum_j \frac{\partial x_i'}{\partial x_j'} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} \quad \frac{\partial x_j'}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_j'} =$$

$$= \sum_j \delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik} \rightarrow \text{identidade}$$

Sugiro à lista adicional de problemas os problemas 1.60 e 1.61 do Griffiths

(ainda não cobrimos tudo que é necessário p/ resolvê-los, mas vale a pena ir tentando.