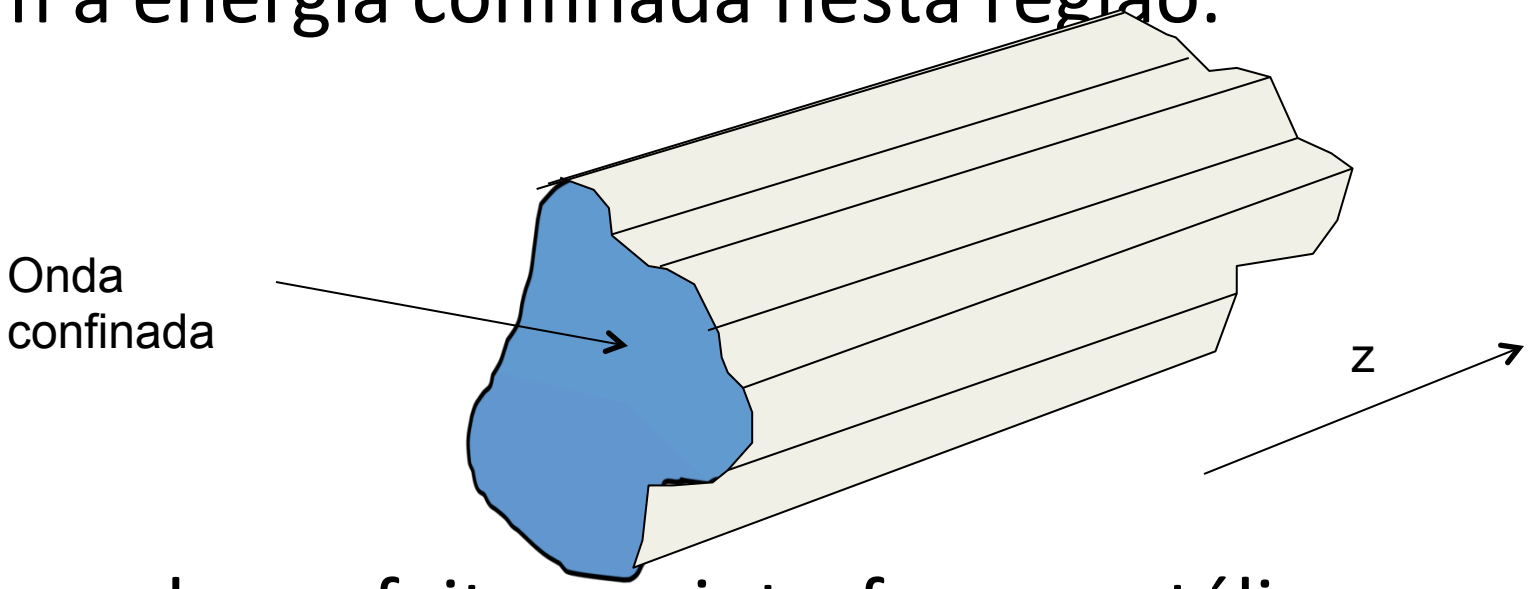
FI-227 Física de Dipsositivos Semicondutores

Tópico 8

Guias de ondas

Guias de onda

- Considere uma região limitada do espaço que é homogênea em uma certa direção, usemos z;
- Queremos investigar a possibilidade de propagarmos ondas eletromagnéticas na direção z com a energia confinada nesta região.
- 

- Isto pode ser feito por interfaces metálicas ou dielétricas;

- Consideremos campos lineares e harmônicos:

$$\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t) = \vec{\mathscr{E}}_r(\vec{r})e^{-i\omega t} = \vec{\mathscr{D}}(\vec{r},t)/\varepsilon$$

$$\vec{\mathscr{B}}(\vec{r},t) = \vec{\mathscr{B}}_r(\vec{r})e^{-i\omega t} = \mu\vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t)$$

- Substituindo nas equações de Maxwell sem fontes:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathscr{E}}_r(\vec{r}) = i\frac{\omega}{c}\vec{\mathscr{B}}_r(\vec{r});\vec{\nabla}.\vec{\mathscr{B}}_r(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathscr{B}}_r(\vec{r}) = -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\vec{\mathscr{E}}_r(\vec{r});\vec{\nabla}.\vec{\mathscr{E}}_r(\vec{r}) = 0$$

- Das equações de Maxwell para meios homogêneos (aplicando o rotacional nas duas equações da esquerda na página 3), temos as 6 equações de Helmholtz (uma para cada componentes dos campos;

$$\left(\nabla^2 + \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\right)\begin{Bmatrix}\vec{\mathrm{E}}_r(\vec{r})\\ \vec{\mathrm{B}}_r(\vec{r})\end{Bmatrix} = \left(\nabla^2 + n^2\frac{\omega^2}{c^2}\right)\begin{Bmatrix}\vec{\mathrm{E}}_r(\vec{r})\\ \vec{\mathrm{B}}_r(\vec{r})\end{Bmatrix} = 0$$

- Como queremos ondas propagando na direção z:

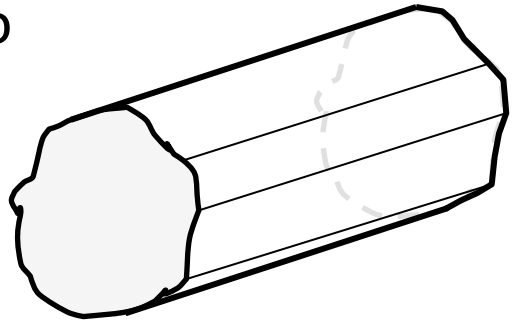
$$\vec{\mathscr{E}}_r(\vec{r}) = \vec{E}(x,y)e^{\pm ikz};\ \vec{\mathscr{B}}_r(\vec{r}) = \vec{B}(x,y)e^{\pm ikz}$$

$$\left(\nabla_t^2 + n^2\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\begin{Bmatrix}\vec{E}(x,y)\\ \vec{B}(x,y)\end{Bmatrix} = 0$$

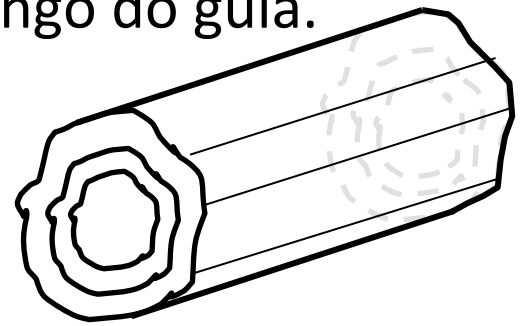
- Temos que resolver estas 6 equações em cada região homogênea; depois casar as condições de contorno nas interfaces.

Dividimos o problema em 2 grupos

- Guias metálicos:
  - Interface metálica fechada;
  - Condutor ideal;
  - Campo fora do metal nulo



- Guias dielétricos:
  - Multicamadas;
  - Campo evanescente na região externa;
  - Condição de contorno nas interfaces;
  - Todas equações tem o mesmo k para que as condições de contorno sejam satisfeitas ao longo do guia.



- **Observação**
  - Não consideramos dois tipos importantes de guias:
    - Por banggap fotônico (da componente transversal de constante de propagação;
    - Por plasmons na interface entre o metal e o semicondutor;

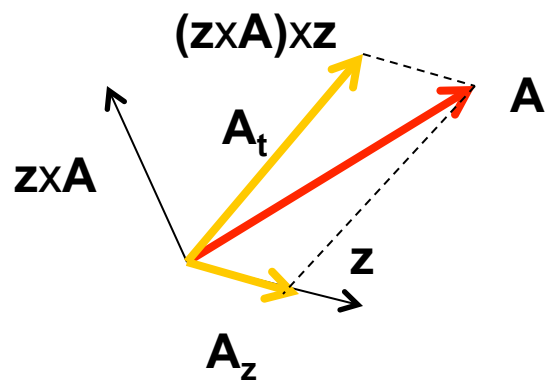
Dicas para solução do problema

- Dividir o campo em componentes longitudinais (z) e transversais (x e y);
- Escrever as equações de Maxwell da página 5 em relacionando os campos transversais com os campos em z.

$$\vec{E}(x,y) = \vec{E}_t(x,y) + \vec{E}_z(x,y);$$

$$\vec{B}(x,y) = \vec{B}_t(x,y) + \vec{B}_z(x,y);$$

$$\vec{A}_t = (\hat{z} \times \vec{A}) \times \hat{z}; \vec{A}_z = A_z \hat{z}$$



- Para e dependência em z dada por exp (+ikz), temos:

$$(a) ik\vec{E}_t + i\frac{\omega}{c}\hat{z}\times\vec{B}_t = \vec{\nabla}_t E_z; (b)\hat{z}.(\vec{\nabla}_t\times\vec{E}_t) = i\frac{\omega}{c}B_z;$$

$$(c) ik\vec{B}_t - i\frac{\omega}{c}\mu\varepsilon\hat{z}\times\vec{E}_t = \vec{\nabla}_t B_z; (d)\hat{z}.(\vec{\nabla}_t\times\vec{B}_t) = -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}E_z$$

$$(e)\vec{\nabla}_t.\vec{E}_t = -ikE_z; (f)\vec{\nabla}_t.\vec{B}_t = -ikB_z; \vec{\nabla}_t \equiv \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}$$

- Em geral, as soluções serão divididas em grupos em que $E_z = 0$ (transversal elétrica) ou $B_z = 0$ (transversal magnética). No caso geral, as duas componentes existem. O caso TEM, onde E_z e B_z são nulos não é possível. Neste caso:

$$\vec{\nabla}_t\times\vec{E}_t = 0; \vec{\nabla}_t.\vec{E}_t = 0$$

- Ou seja, os campos transversais satisfazem a equação de Laplace, sem cargas, solução equipotencial, campos nulos.

- Nos casos em que E_z ou B_z são nulos, as equações da página 8 nos permitem obter $\mathbf{E}_t$ em função de $\mathbf{B}_t$.
- Vejamos: TE, $E_z = 0$, então a eq. (a) nos leva a:

$$ik\vec{E}_t + i\frac{\omega}{c}\hat{z}\times\vec{B}_t = 0 \Rightarrow \vec{E}_t = -\frac{\omega}{kc}\hat{z}\times\vec{B}_t$$

- Substituindo em (c), temos:

$$ik\vec{B}_t - i\frac{\omega}{c}\mu\varepsilon\hat{z}\times\left(-\frac{\omega}{kc}\hat{z}\times\vec{B}_t\right) = \vec{\nabla}_t B_z \Rightarrow \vec{B}_t = -\frac{ik}{\gamma^2}\vec{\nabla}_t B_z$$

$$\gamma^2 \equiv \frac{n^2\omega^2}{c^2} - k^2$$

- Sabendo-se B_z, obtemos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{B}_t$.

- Vejamos: TM, $B_z = 0$, então a eq. (c) nos leva a:

$$ik\vec{B}_t - i\frac{\omega}{c}\mu\varepsilon\hat{z}\times\vec{E}_t = 0 \Rightarrow \vec{B}_t = \frac{\omega}{kc}\mu\varepsilon\hat{z}\times\vec{E}_t$$

- Substituindo em (a), temos:

$$ik\vec{E}_t + i\frac{\omega}{c}\hat{z}\times\left(\frac{\omega}{kc}\mu\varepsilon\hat{z}\times\vec{E}_t\right) = \vec{\nabla}_t E_z;$$

$$\vec{E}_t = -\frac{ik}{\gamma^2}\vec{\nabla}_t E_z$$

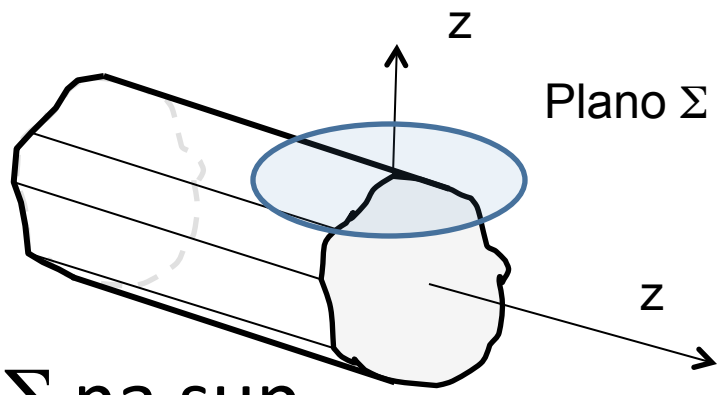
- Calculando E_z, obtemos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{B}_t$.

Guias metálicos

- No condutor temos:

$$\hat{n}\times\vec{E}\big|_s = 0 \Rightarrow \vec{E}_t\big|_s = E\hat{n};\ \boxed{\vec{E}_z\big|_s = 0}$$

$$\hat{n}.\vec{B}\big|_s = 0$$



- Então $E_z/_s$=0 e **B** pertence a Σ na sup.
- Da eq. (c)

$$ik\hat{n}.\vec{B}_t\big|_s - i\frac{\omega}{c}\mu\varepsilon\hat{n}.(\hat{z}\times\vec{E}_t)\big|_s = \hat{n}.\vec{\nabla}_t B_z\big|_s$$

$$\hat{n}.\vec{B}\big|_s = 0 \Rightarrow \hat{n}.(\vec{B}_t + B_z\hat{z})\big|_s = \hat{n}.\vec{B}_t\big|_s = 0$$

$$\hat{n}.(\hat{z}\times\vec{E}_t)\big|_s = \hat{n}.(\hat{z}\times E\hat{n})\big|_s = 0$$

$$\Rightarrow \hat{n}.\vec{\nabla}_t B_z\big|_s = 0 = \boxed{\frac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_s = 0}$$

- TE: E_z =0 em todo lugar e $\frac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_s = 0$
- TM: B_z =0 em todo lugar e $\vec{E}_z\big|_s = 0$

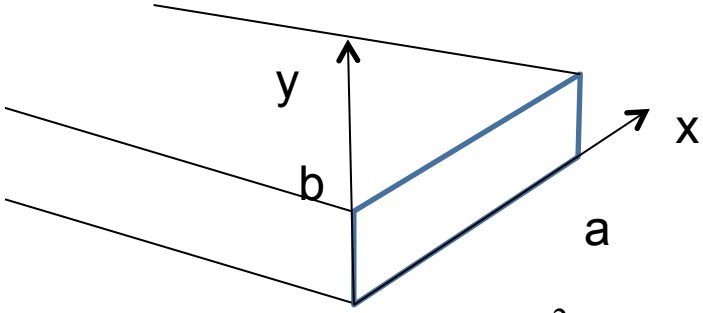
- Para resolvermos o problema, temos que obter E_z (TM) ou B_z(TE) pela equação de Helmholtz

$$\left(\nabla_t^2 + \gamma^2\right)\Psi(x, y) = 0;$$

$$TE : \Psi = B_z; E_z = 0; \frac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_s = 0;$$

$$TM : \Psi = E_z; B_z = 0; E_z\Big|_s = 0;$$

Exemplo (guia retangular metálico TE)



$$\left(\nabla_t^2+\gamma^2\right)\Psi(x,y)=0;\Psi(x,y)=X(x)Y(y)\Rightarrow\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\gamma^2=0;$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\alpha^2;\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-\beta^2;\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$$

$$X(x)=A\cos(\alpha x)+Bsen(\alpha x);Y(y)=C\cos(\beta y)+Dsen(\beta y);$$

$$\frac{\partial X(x)}{\partial x}=-A\alpha sen(\alpha x)+B\alpha\cos(\alpha x);\frac{\partial Y(y)}{\partial y}=-C\beta sen(\beta y)+D\beta\cos(\beta y);$$

$$\frac{\partial X(0)}{\partial x}=0\Rightarrow B=0;\frac{\partial X(a)}{\partial x}=0\Rightarrow A\alpha sen(\alpha a)=0\Rightarrow\alpha_p a=p\pi;p=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

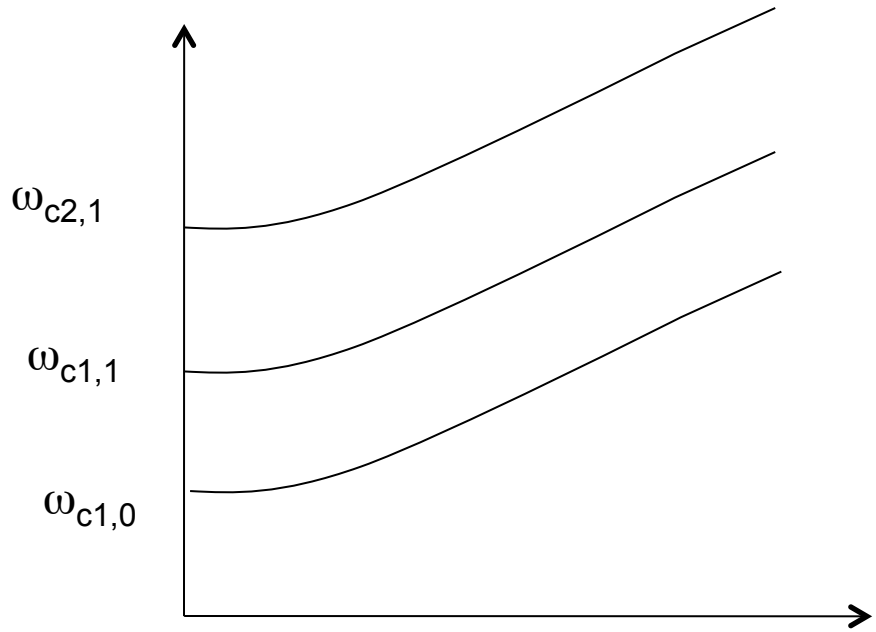
$$\frac{\partial Y(0)}{\partial y}=0\Rightarrow D=0;\frac{\partial Y(b)}{\partial y}=0\Rightarrow A\beta sen(\beta b)=0\Rightarrow\beta_q b=q\pi;q=0,\pm1,\pm2,..$$

Relação de dispersão

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \frac{n_2\omega^2}{c^2} - k^2 = \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{b}\right)^2$$

$$\omega_{p,q}(k) = \frac{c}{n}\sqrt{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{b}\right)^2 + k^2} \equiv \sqrt{\omega_{Cp,q}^2 + \frac{c^2k^2}{n^2}}; \frac{d\omega_{p,q}}{dk} = \frac{c^2}{n^2}\frac{k}{\sqrt{\omega_{Cp,q}^2 + \frac{c^2k^2}{n^2}}}$$

$$\frac{d\omega}{dk}(k \to 0) = 0; \frac{d\omega}{dk}(k \to \infty) = \frac{c}{n}$$



- Existe uma frequência de corte mínima.

Determinação dos campos

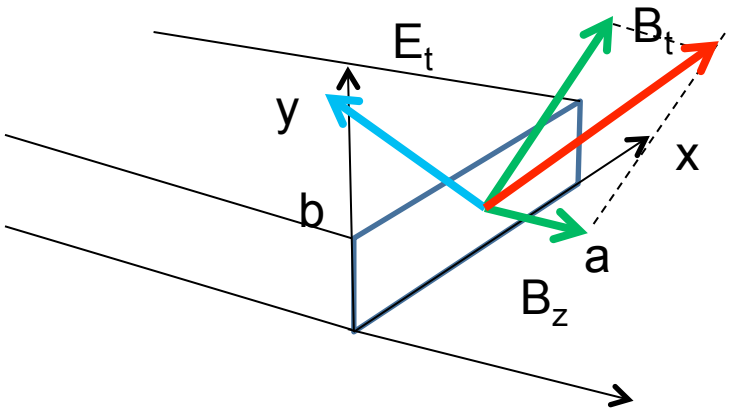
$$B_{z\,p,q} = \Psi_{p,q}(x,y) = A\cos(p\pi x/a)\cos(q\pi x/b);$$

$$\vec{B}_{t_{p,q}} = -\frac{ik(\omega_{p,q})}{\gamma^2}\vec{\nabla}_t B_z \Rightarrow$$

$$\vec{B}_{t_{p,q}} = \frac{ik(\omega_{p,q})A}{(p/a)^2+(q/b)^2}\left[\frac{p\pi\hat{x}}{a}sen(p\pi x/a)\cos(q\pi x/b)+\frac{q\pi\hat{y}}{b}\cos(p\pi x/a)sen(q\pi x/b)\right]$$

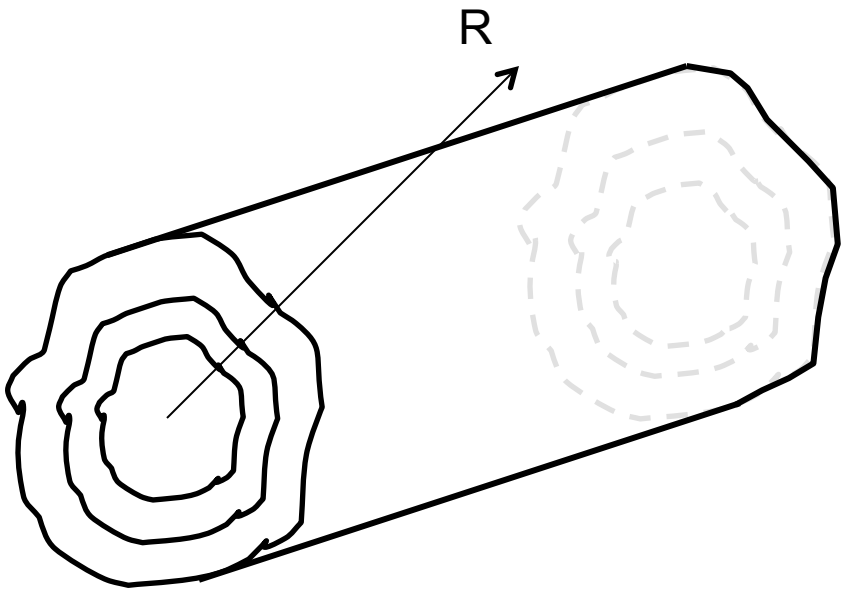
$$\vec{E}_{t\,p,q} = -\frac{\omega_{p,q}}{k(\omega_{p,q})c}\hat{z}\times\vec{B}_t \Rightarrow$$

$$\vec{E}_{t\,p,q} = \frac{iA\omega_{p,q}/c}{(p/a)^2+(q/b)^2}\left[\frac{p\pi\hat{y}}{a}sen(p\pi x/a)\cos(q\pi x/b)-\frac{q\pi\hat{x}}{b}\cos(p\pi x/a)sen(q\pi x/b)\right]$$



Guias dielétricos

- Considere o desenho ao lado onde temos I camadas dielétricas envolvidas por um meio também dieétrico;
- O problema agora envolve encontrar soluções para os campos em todas as camadas considerando as condições de contorno nas interfaces e buscando soluções que decaem quando R vai a infinito.



Consideremos o caso de uma camada com ε_D ($n^2 = \mu_0\varepsilon_D$) envolvida por um meio com ε_F ($n^2 = \mu_0\varepsilon_F$).

$$\left(\nabla_t^2 + n^2\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\begin{Bmatrix} E_z(x,y) \\ B_z(x,y)\end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\nabla_t^2 + n_D^2\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\begin{Bmatrix} E_{zD} \\ B_{zD}\end{Bmatrix} \equiv \left(\nabla_t^2 + \gamma^2\right)\begin{Bmatrix} E_{zD} \\ B_{zD}\end{Bmatrix} = 0$$

2

$$\left(\nabla_t^2 + n_F^2\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\begin{Bmatrix} E_{zF} \\ B_{zF}\end{Bmatrix} \equiv \left(\nabla_t^2 - \beta^2\right)\begin{Bmatrix} E_{zD} \\ B_{zD}\end{Bmatrix} = 0; \gamma^2 + \beta^2 = (n_D^2 - n_F^2)\frac{\omega^2}{c^2}$$

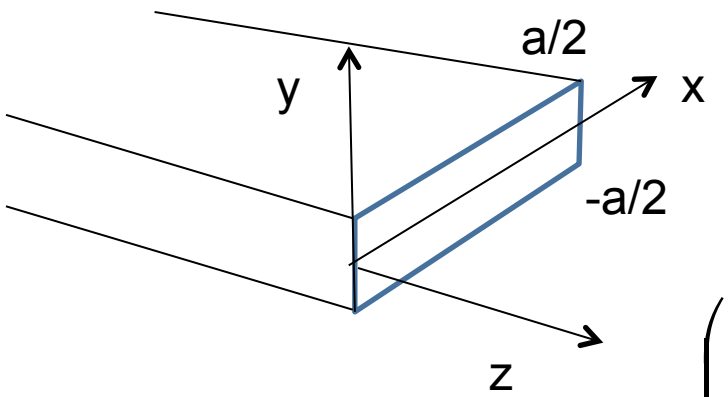
Onde definimos as constante γ e β tal que a solução dentro seja oscilatória e a fora decaia. Lembremos que k deve ser o mesmo em todas camadas para garantir que a satisfação das condições de contorno não dependam de z.

- Condições de contorno (meios não magnéticos):

$$\vec{B}.\hat{n};\vec{D}.\hat{n} \Rightarrow \varepsilon\vec{E}.\hat{n} : contínuos$$

$$\hat{n}\times(\hat{n}\times\vec{E});\hat{n}\times(\hat{n}\times\vec{H}) \Rightarrow \hat{n}\times(\hat{n}\times\vec{B}) : contínuos$$

- Exemplo: Slab Waveguide (1D)



δ/δx=0

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}+\gamma^2\right)\Psi_D = 0; \Psi_D = Ae^{i\gamma y} + Be^{-i\gamma y}$$

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}-\beta^2\right)\Psi_F = 0; \Psi_F = \begin{cases} Ce^{-\beta y}; y > a/2 \\ De^{\beta y}; y < -a/2 \end{cases}$$

- **Tranversal Elétrico**: $\Psi = B_z$,normal//y

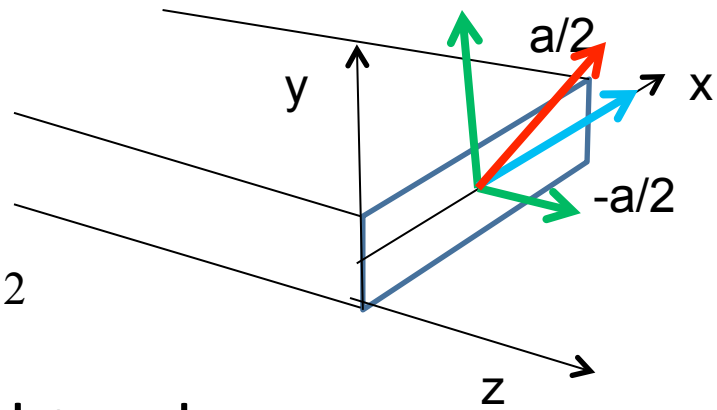
$$\vec{B}_t = \frac{-ik}{\gamma^2}\frac{d\Psi(y)}{dy}\hat{y}; \vec{E}_t = \frac{-\omega}{ck}\hat{z}\times\vec{B}_t \Rightarrow \vec{E}_t = \frac{-i\omega}{c\gamma^2}\frac{d\Psi(y)}{dy}\hat{x};$$

$$\vec{B} = (0, B_y, B_z); \vec{E} = (E_x, 0, 0)$$

- B_z e B_y e E_x são contínuos em y=a/2 e –a/2;

$$\Psi_D(a/2) = \Psi_F(a/2);$$

$$\frac{1}{\gamma^2}\frac{d\Psi_D}{dy}\Big|_{a/2} = \left(-\frac{1}{\beta^2}\right)\frac{d\Psi_F}{dy}\Big|_{a/2}$$



- Estas equações nos permitem obter duas das constantes (ABC ou ABD) em função de uma delas. (No caso assimétrico, necessitaríamos fazer também em -a/2)

- Perfil transversal de intensidade da propagação na direção z :

$$\hat{z}.\vec{S} = \frac{c}{8\pi}\Re\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right) = \frac{c}{8\pi\mu}\Re\left(\vec{E}\times\vec{B}^*\right) = \frac{c}{8\pi\mu}\Re\left(E_x B_y^*\right);$$

$$S_z = \frac{c}{8\pi\mu}\Re\left[\left(\frac{-i\omega}{c\gamma^2}\right)\left(\frac{ik}{\gamma^2}\right)\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2\right] = \frac{k\omega}{8\pi\mu\gamma^4}\left|\frac{d\Psi}{dy}\right|^2$$

- Portanto a intensidade ou perfil transversal é proporcional à derivada de Ψ. Fica conveniente dividir o problema em perfil par ou ímpar, lembrando que Ψ par leva a um perfil ímpar e vice-versa.
- ***A possibilidade de dividir o problema em TE e TM e, mais, em soluções pares e ímpares ocorre somente para o slab simétrico e o guia cilíndrico. Em geral as soluções são quase TE ou quase TM com certa simetria.***

TE-par

- $d\Psi_D/dy$ é par, então Ψ_D é ímpar. Da p. 18:

$$A = -B \Rightarrow \Psi_D = 2iAsen(\gamma y) \equiv \widetilde{A}sen(\gamma y)$$

$$\Psi_F = Ce^{-\beta y}$$

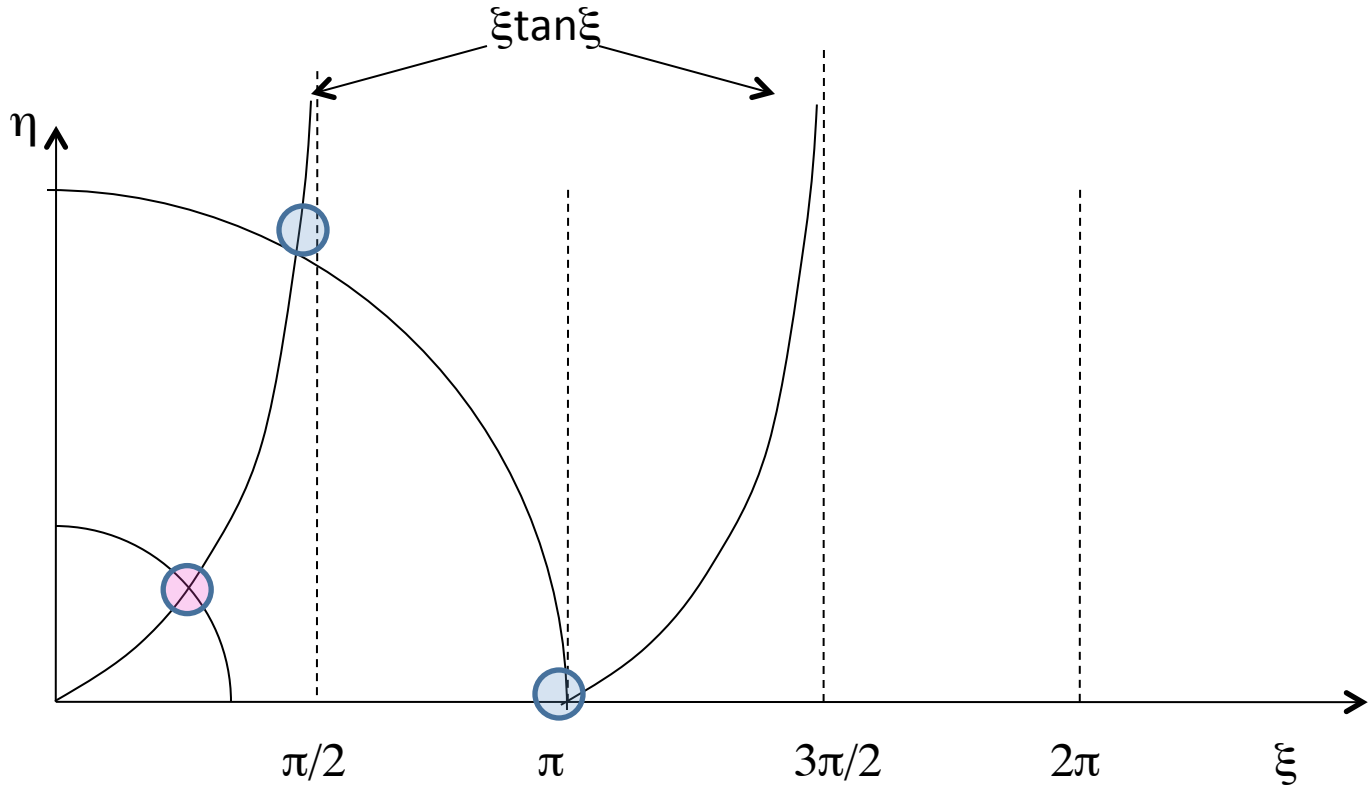
- Das condições de contorno da p. 19, obtemos as equações trancedentais:

$$\widetilde{A}sen(\gamma a/2) = Ce^{-\beta a/2};$$

$$\frac{\gamma}{\gamma^2}\widetilde{A}\cos(\gamma a/2) = \left(\frac{-\beta}{-\beta^2}\right)Ce^{-\beta a/2}; \xi \equiv \gamma a/2; \eta \equiv \beta a/2;$$

$$\xi \tan(\xi) = \eta$$

$$\xi^2 + \eta^2 = (\gamma^2 + \beta^2)a^2/4 = (n_D^2 - n_F^2)\frac{\omega^2 a^2}{c^2 4} \equiv R^2$$



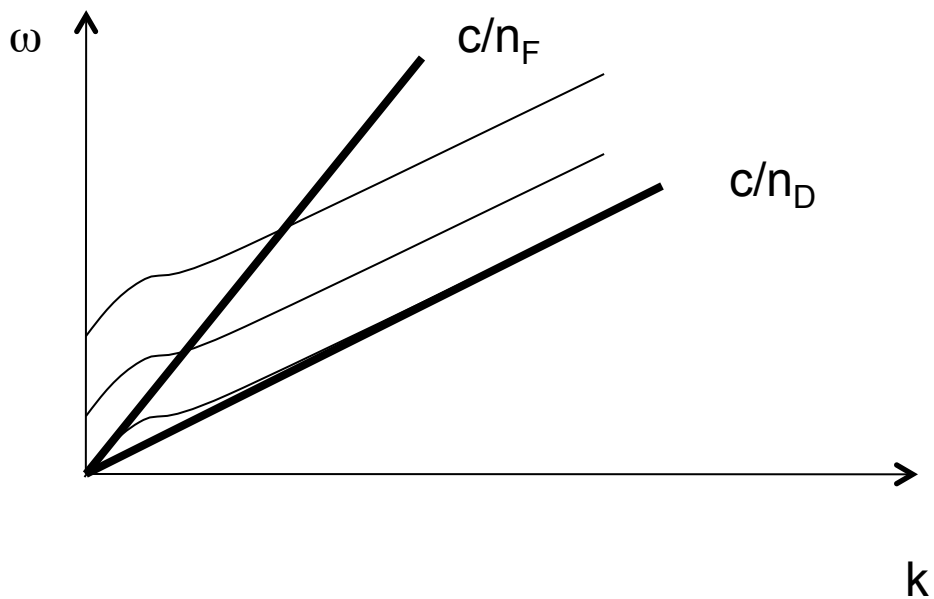
- O gráfico acima mostra algumas soluções. Notem que quanto maior R, ou seja maior o batente de índice de refração e/ou maior a largura do guia e/ou maior a frequencia da onda, maior o confinamento dos modos (η maior), mas o guia se torna multi-modal (para TE par) a partir de R>π.
- Cada braço da função $\xi(\eta)$ forma uma relaçào de dispersão de ω(k)

- Para ω tendendo a $n\pi$, η (então β) tende a zero mais rápido que ξ. Então,

$$\beta^2 = k^2 - n_F^2 \frac{\omega^2}{c^2} \to 0 \Rightarrow \omega \to \frac{kc}{n_F}$$

- Para ω tendendo a infinito, $\xi \to (2n+1)\pi/2$; n=0,1,...

$$\gamma^2 = n_D^2 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \to (2n+1)\pi/2 \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} \to \frac{c}{n_D}$$



TE-ímpar

- $d\Psi_D/dy$ é ímpar, então Ψ_D é par. Da p. 18:

$$A = B \Rightarrow \Psi_D = 2\cos(\gamma y) \equiv \cos(\gamma y)$$

$$\Psi_F = Ce^{-\beta y}$$

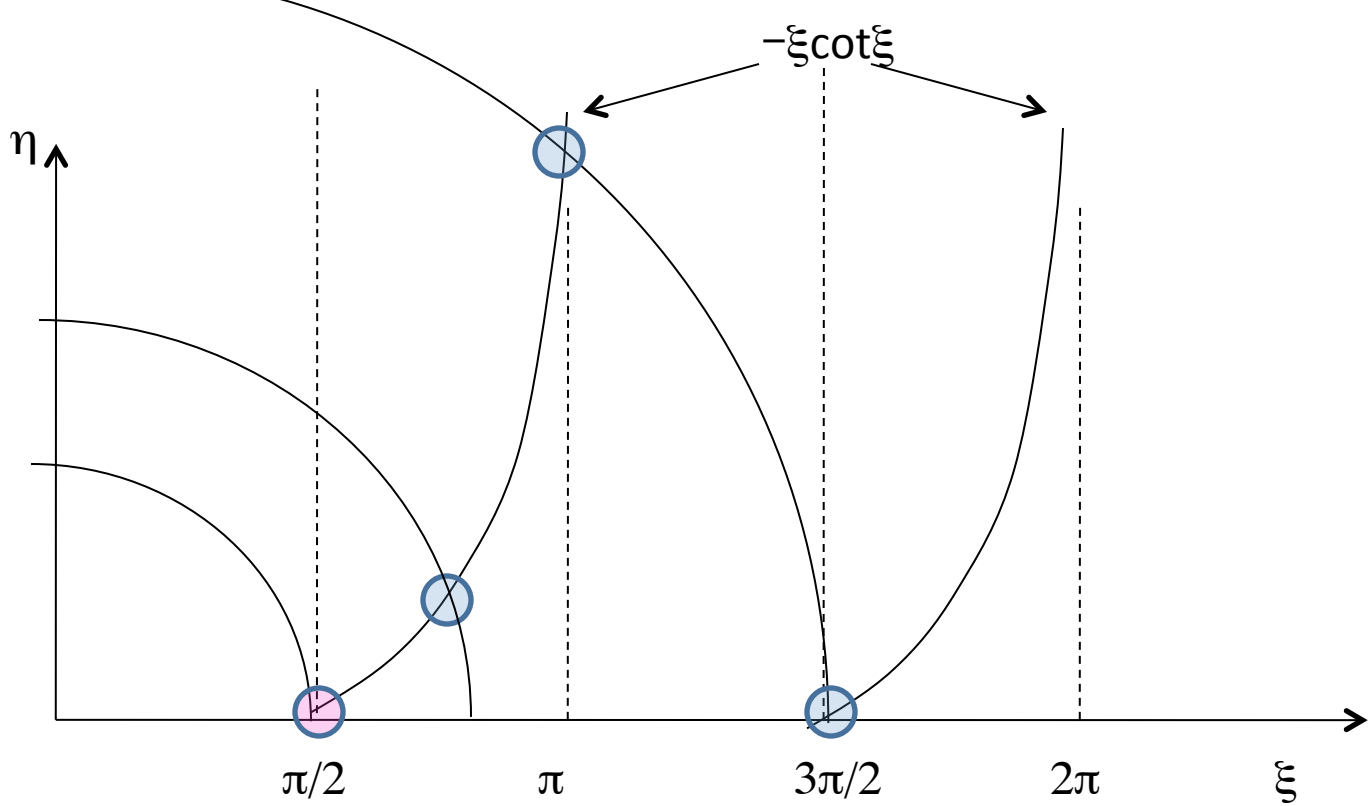
- Das condições de contorno da p. 19, obtemos as equações trancedentais:

$$\widetilde{A}\cos(\gamma a/2) = Ce^{-\beta a/2};$$

$$-\frac{\gamma}{\gamma^2}\widetilde{A}sen(\gamma a/2) = \left(\frac{-\beta}{-\beta^2}\right)Ce^{-\beta a/2}; \xi \equiv \gamma a/2; \eta \equiv \beta a/2;$$

$$\xi\cot(\xi) = -\eta$$

$$\xi^2 + \eta^2 = (\gamma^2 + \beta^2)a^2/4 = (n_D^2 - n_F^2)\frac{\omega^2 a^2}{c^2 4} \equiv R^2$$



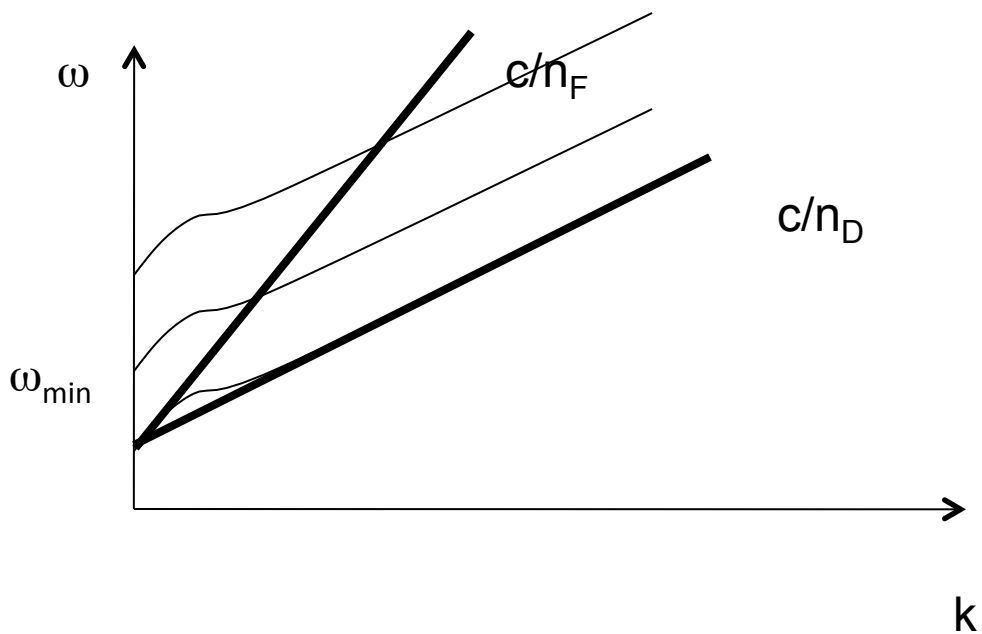
- O gráfico acima mostra algumas soluções. Notem que quanto maior R, ou seja maior o batente de índice de reração e/ou maior alargura do guia e/ou maior a frequencia da onda, maior o confinamento dos modos (η maior), mas o guia se torna multi-modal (para TE ímpar) a partir de R>3π/2. Notem que para R<π/2, não há solução.(temos uma mínima frequência).
- Cada braço da função $\xi(\eta)$ forma uma relação de dispersão de ω(k)

- Para ω tendendo a $n\pi/2$(n=1,...), η tende a zero mais rápido que ξ. Então,

$$\beta^2 = k^2 - n_F^2 \frac{\omega^2}{c^2} \to 0 \Rightarrow \omega \to \frac{kc}{n_F}$$

- Para ω tendendo a infinito, $\xi \to n\pi/2$; n=1,...

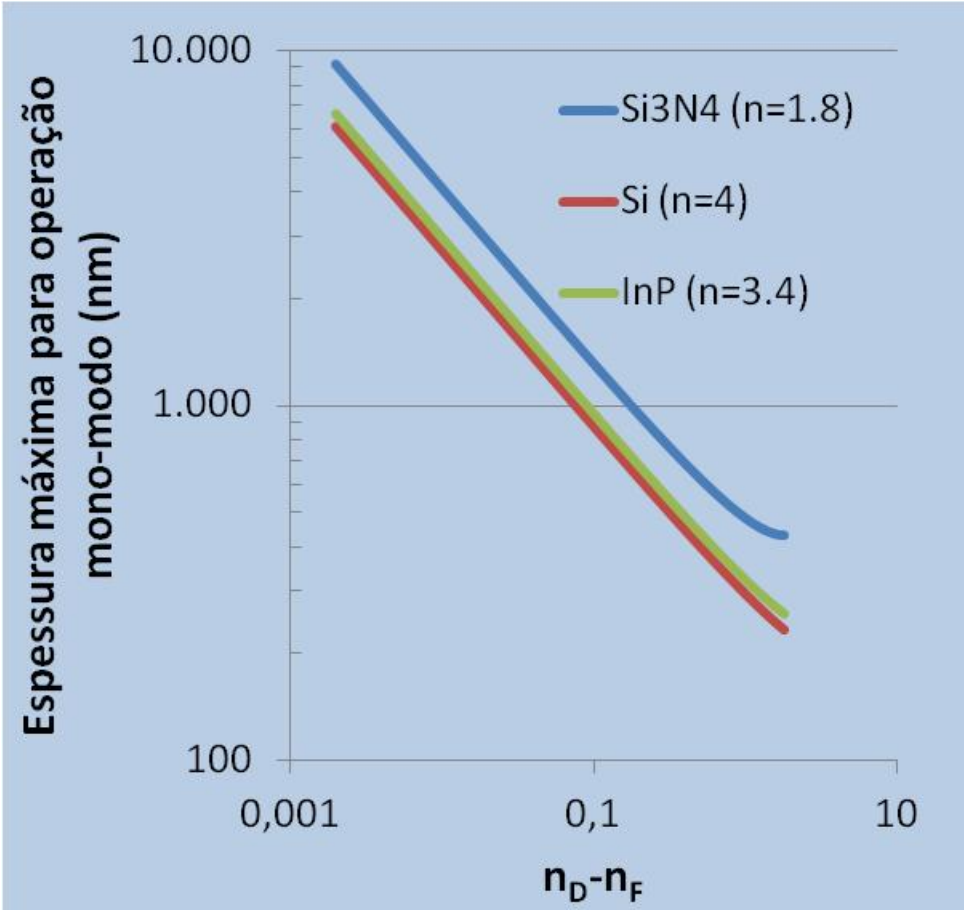
$$\gamma^2 = n_D^2 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \to n\pi \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} \to \frac{c}{n_D}$$



Condição para guiamento mono-modo

$$\sqrt{(n_D^2 - n_F^2)}\,\frac{\omega a}{c2} = \sqrt{(n_D^2 - n_F^2)}\,\frac{\pi a}{\lambda_0} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{a < \frac{\lambda_0 / 2}{\sqrt{n_D^2(\lambda_0) - n_F^2(\lambda_0)}}}$$

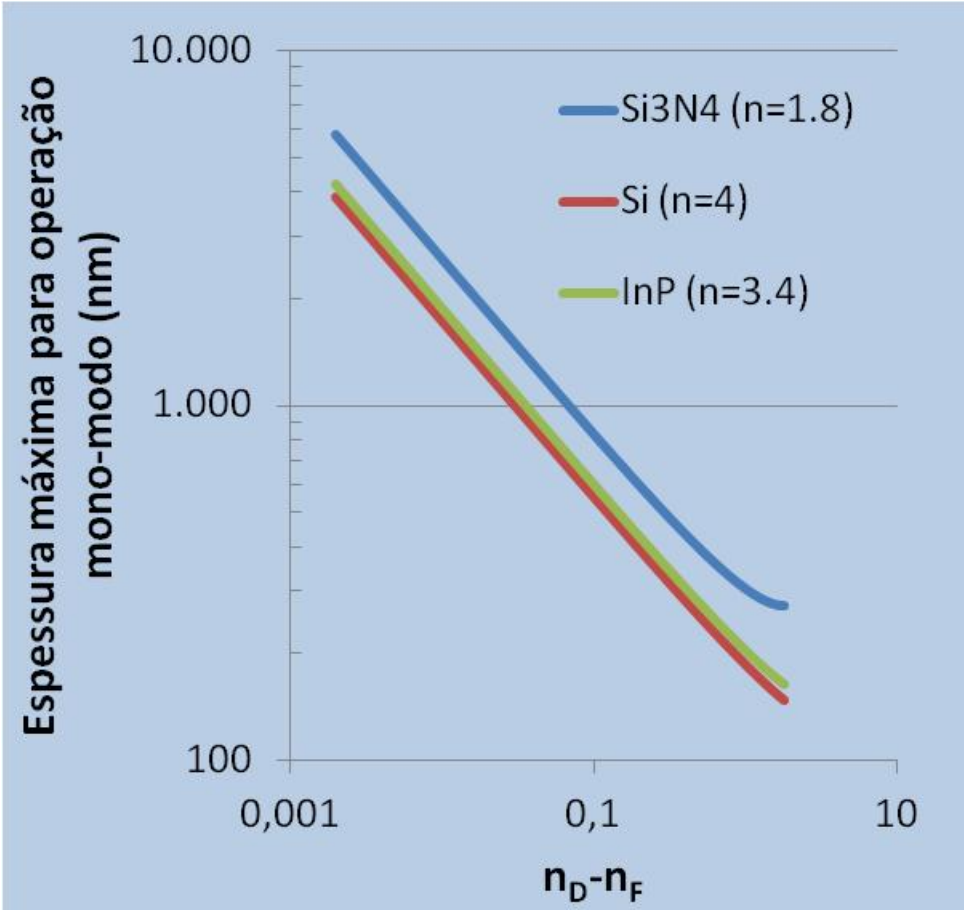
- Consideremos que o guia seja de Si3N4, Si ou InP. Para cada um deles temos um limite para operação em mono-modo TE em 1550 nm.



Condição para guiamento mono-modo

$$\sqrt{(n_D^2 - n_F^2)}\,\frac{\omega a}{c2} = \sqrt{(n_D^2 - n_F^2)}\,\frac{\pi a}{\lambda_0} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{a < \frac{\lambda_0 / 2}{\sqrt{n_D^2(\lambda_0) - n_F^2(\lambda_0)}}}$$

- Consideremos que o guia seja de Si3N4, Si ou InP. Para cada um deles temos um limite para operação em mono-modo TE em 980 nm.



- **Tranversal Magnético**: $\Psi = E_z$,normal//y

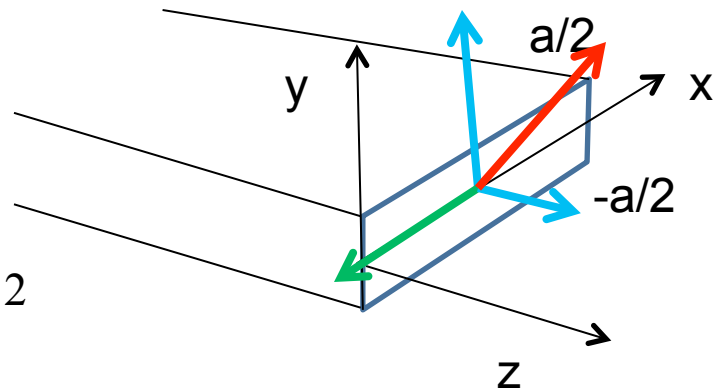
$$\vec{E}_t = \frac{-ik}{\gamma^2}\frac{d\Psi(y)}{dy}\hat{y}; \vec{B}_t = \frac{\omega}{kc}\mu\varepsilon\hat{z}\times\vec{E}_t \Rightarrow \vec{B}_t = \frac{-i\omega\mu\varepsilon}{c\gamma^2}\frac{d\Psi(y)}{dy}\hat{x};$$

$$\vec{B} = (B_x, 0, 0); \vec{E} = (0, E_y, E_z)$$

- E_z e εE_y e B_x são contínuos em y=a/2 e –a/2;

$$\Psi_D(a/2) = \Psi_F(a/2);$$

$$\frac{n_D^2}{\gamma^2}\frac{d\Psi_D}{dy}\Big|_{a/2} = \left(-\frac{n_F^2}{\beta^2}\right)\frac{d\Psi_F}{dy}\Big|_{a/2}$$



- Estas equações nos permitem obter duas das constantes (ABC ou ABD) em função de uma delas. (No caso assimétrico, necessitaríamos fazer também em -a/2)

- Perfil transversal de intensidade da propagação na direção z :

$$\hat{z}.\vec{S} = \frac{c}{8\pi}\Re\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right) = \frac{c}{8\pi\mu}\Re\left(\vec{E}\times\vec{B}^*\right) = \frac{c}{8\pi\mu}\Re\left(E_x B_y^*\right);$$

$$S_z = \frac{c}{8\pi\mu}\Re\left[\left(\frac{-i\omega}{c\gamma^2}\right)\left(\frac{ik}{\gamma^2}\right)\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2\right] = \frac{k\omega}{8\pi\mu\gamma^4}\left|\frac{d\Psi}{dy}\right|^2$$

- Portanto a intensidade ou perfil transversal é proporcional à derivada de Ψ. Fica conveniente dividir o problema em perfil par ou ímpar, lembrando que Ψ par leva a um perfil ímpar e vice-versa.
- ***A possibilidade de dividir o problema em TE e TM e, mais, em soluções pares e ímpares ocorre somente para o slab simétrico e o guia cilíndrico. Em geral as soulções são quase TE ou quase TM com certa simetria.***

TM-par

- $d\Psi_D/dy$ é par, então Ψ_D é ímpar. Da p. 18:

$$A = -B \Rightarrow \Psi_D = 2iAsen(\gamma y) \equiv \widetilde{A}sen(\gamma y)$$

$$\Psi_F = Ce^{-\beta y}$$

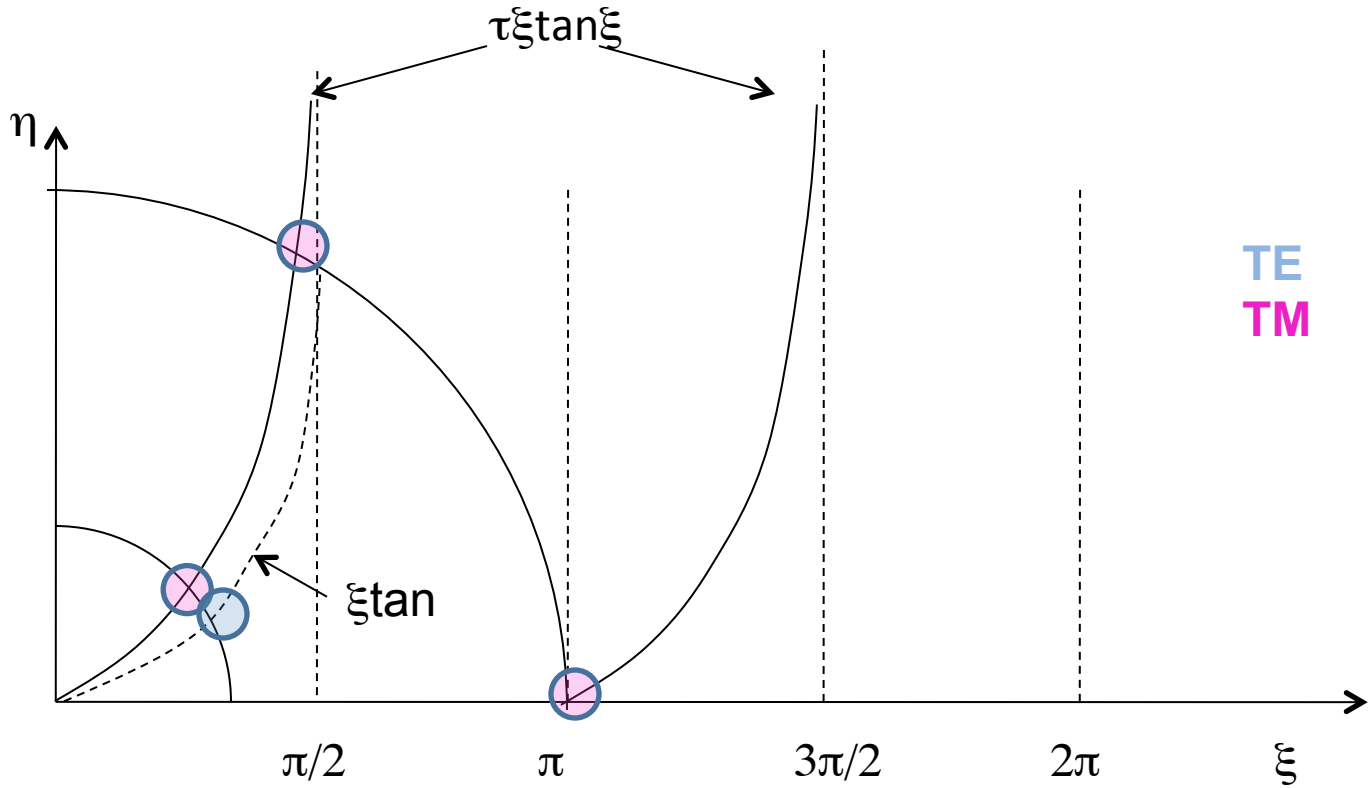
- Das condições de contorno da p. 19, obtemos as equações trancedentais:

$$\tilde{A}sen(\gamma a/2) = Ce^{-\beta a/2};$$

$$\frac{n_D^2\gamma}{\gamma^2}\tilde{A}\cos(\gamma a/2) = \left(\frac{-n_F^2\beta}{-\beta^2}\right)Ce^{-\beta a/2}; \xi \equiv \gamma a/2; \eta \equiv \beta a/2;$$

$$\tau\xi\tan(\xi) = \eta; \tau \equiv \frac{n_F^2}{n_D^2}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = (\gamma^2 + \beta^2)a^2/4 = (n_D^2 - n_F^2)\frac{\omega^2 a^2}{c^2 4} \equiv R^2$$



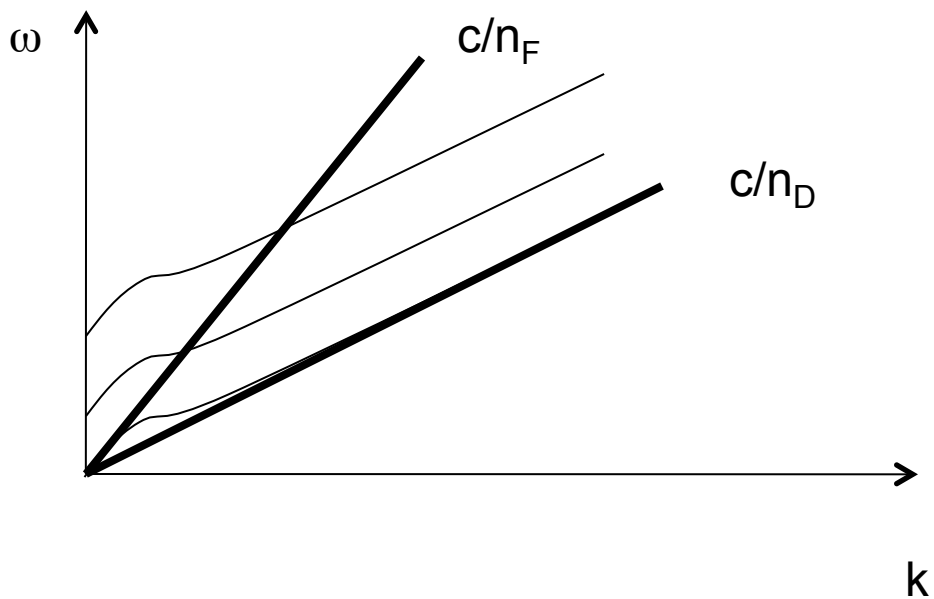
- O gráfico acima mostra algumas soluções. Notem que quanto maior R, ou seja maior o batente de índice de refração e/ou maior alargura do guia e/ou maior a frequencia da onda, maior o confinamento dos modos (η maior), mas o guia se torna multi-modal (para TM par) a partir de R>π. (A única diferença para TE é o fator τ). TM é sempre mais confinado que TE pois τ>1.
- Cada braço da função $\xi(\eta)$ forma uma relação de dispersão de ω(k)

- Para ω tendendo a $n\pi$, η tende a zero mais rápido que ξ. Então,

$$\beta^2 = k^2 - n_F^2 \frac{\omega^2}{c^2} \to 0 \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} \to \frac{c}{n_F}$$

- Para ω tendendo a infinito, $\xi \to (2n+1)\pi/2$; n=0,1,...

$$\gamma^2 = n_D^2 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \to (2n+1)\pi/2 \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} \to \frac{c}{n_D}$$



TM-ímpar

- $d\Psi_D/dy$ é ímpar, então Ψ_D é par. Da p. 18:

$$A = B \Rightarrow \Psi_D = 2\cos(\gamma y) \equiv \cos(\gamma y)$$

$$\Psi_F = Ce^{-\beta y}$$

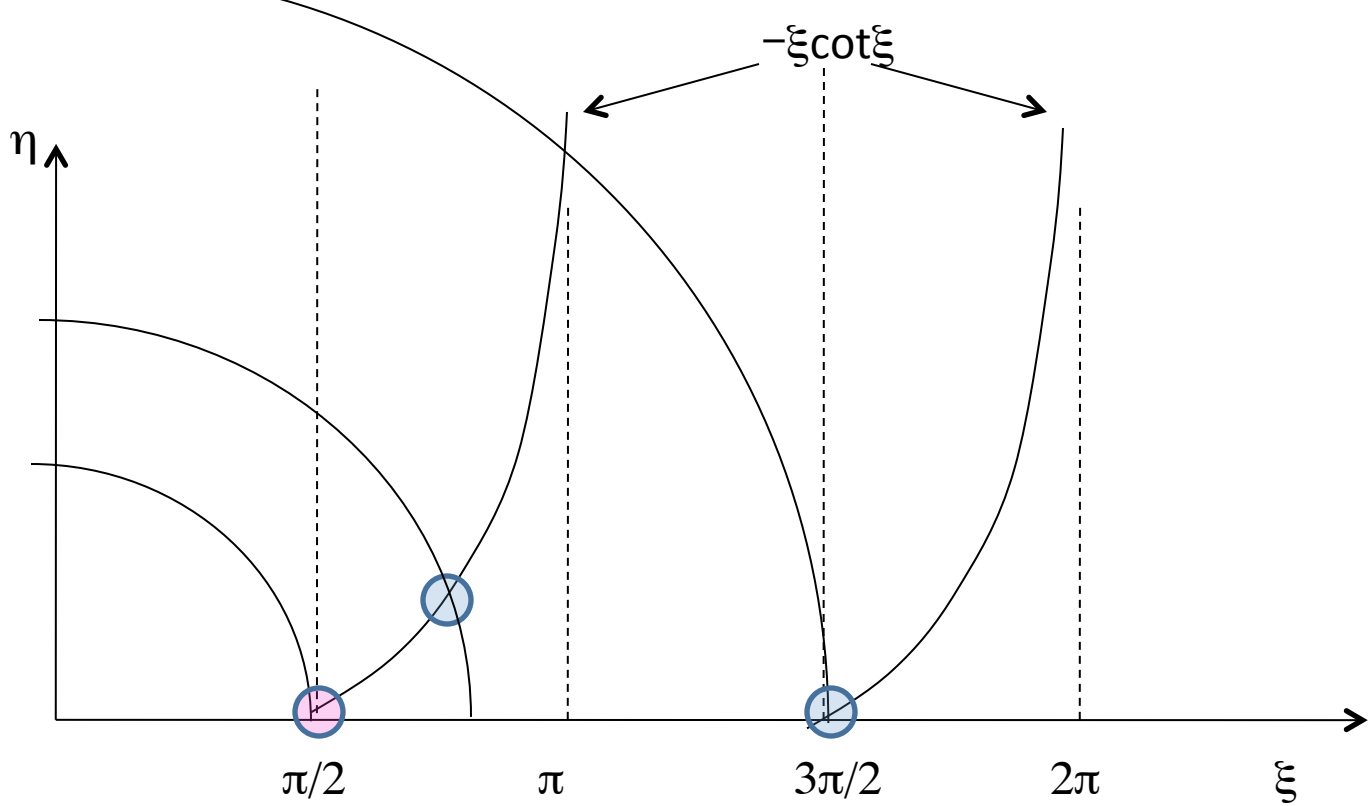
- Das condições de contorno da p. 19, obtemos as equações trancedentais:

$$\widetilde{A}\cos(\gamma a/2) = Ce^{-\beta a/2};$$

$$-\frac{\gamma}{\gamma^2}\widetilde{A}sen(\gamma a/2) = \left(\frac{-\beta}{-\beta^2}\right)Ce^{-\beta a/2}; \xi \equiv \gamma a/2; \eta \equiv \beta a/2;$$

$$\xi\cot(\xi) = -\eta$$

$$\xi^2 + \eta^2 = (\gamma^2 + \beta^2)a^2/4 = (n_D^2 - n_F^2)\frac{\omega^2 a^2}{c^2 4} \equiv R^2$$



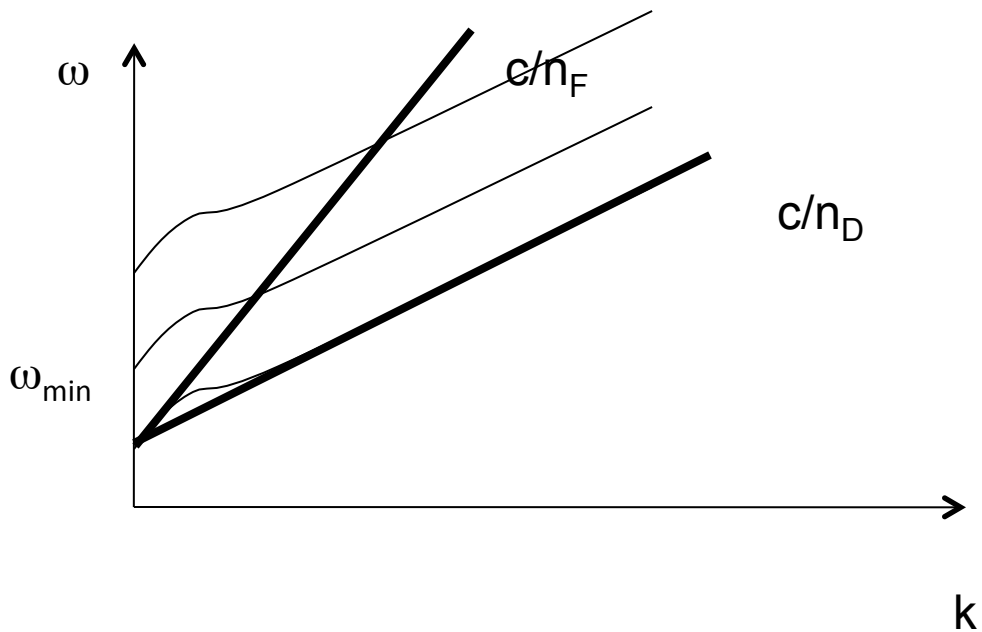
- O gráfico acima mostra algumas soluções. Notem que quanto maior R, ou seja maior o batente de índice de reração e/ou maior alargura do guia e/ou maior a frequencia da onda, maior o confinamento dos modos (η maior), mas o guia se torna multi-modal (para TE par) a partir de R>3π/2. Notem que para R<π/2, não há solução.(temos uma mínima frequência).
- Cada braço da função $\xi(\eta)$ forma uma relação de dispersão de ω(k)

- Para ω tendendo a $n\pi/2$(n=1,...), η tende a zero mais rápido que ξ. Então,

$$\beta^2 = k^2 - n_F^2 \frac{\omega^2}{c^2} \to 0 \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} \to \frac{kc}{n_F}$$

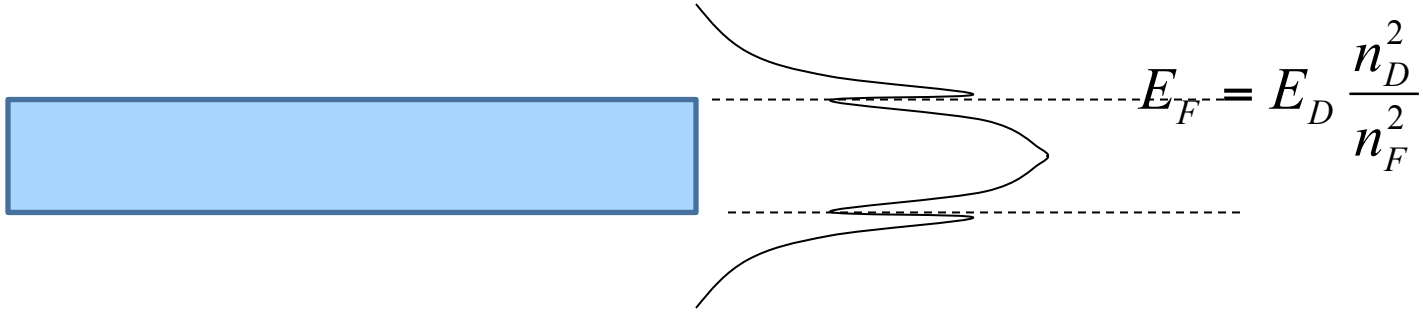
- Para ω tendendo a infinito, $\xi \to n\pi/2$; n=1,...

$$\gamma^2 = n_D^2 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \to n\pi \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} \to \frac{c}{n_D}$$

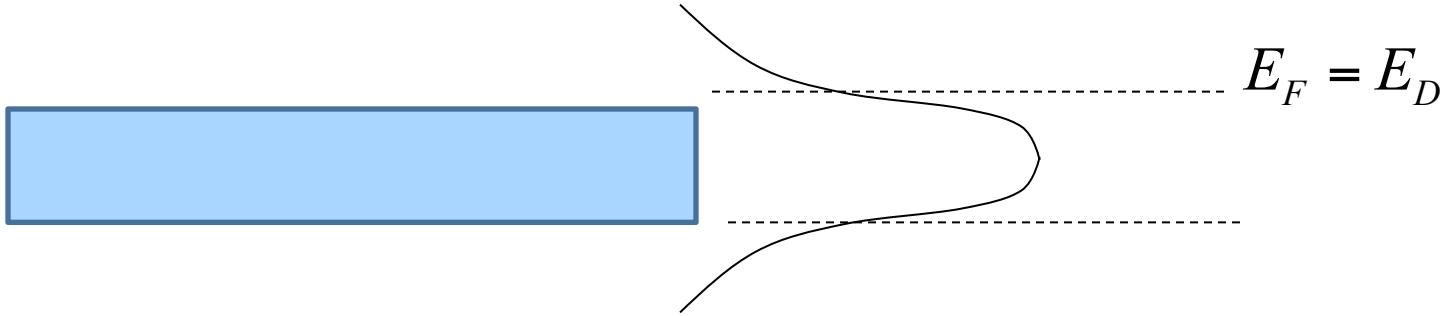


TE vs. TM

- No caso TM o campo elétrico na interface é descontínuo e tem um máximo no lado de fora.

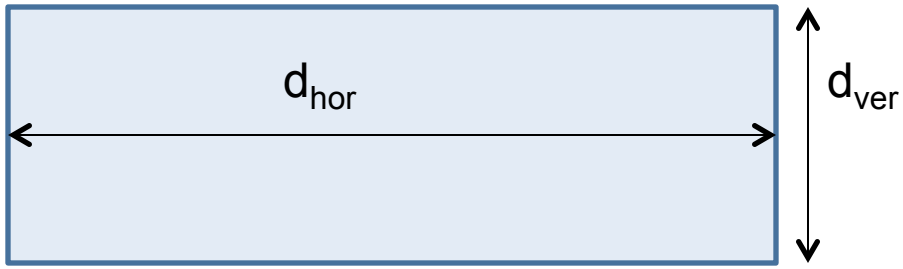


- No caso TE o campo elétrico na interface é contínuo e tem um máximo dentro.

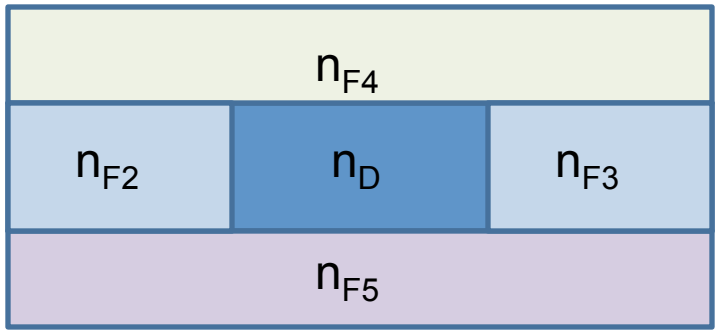


Retangular

- Podemos pensar como aproximadamente dois slabs:

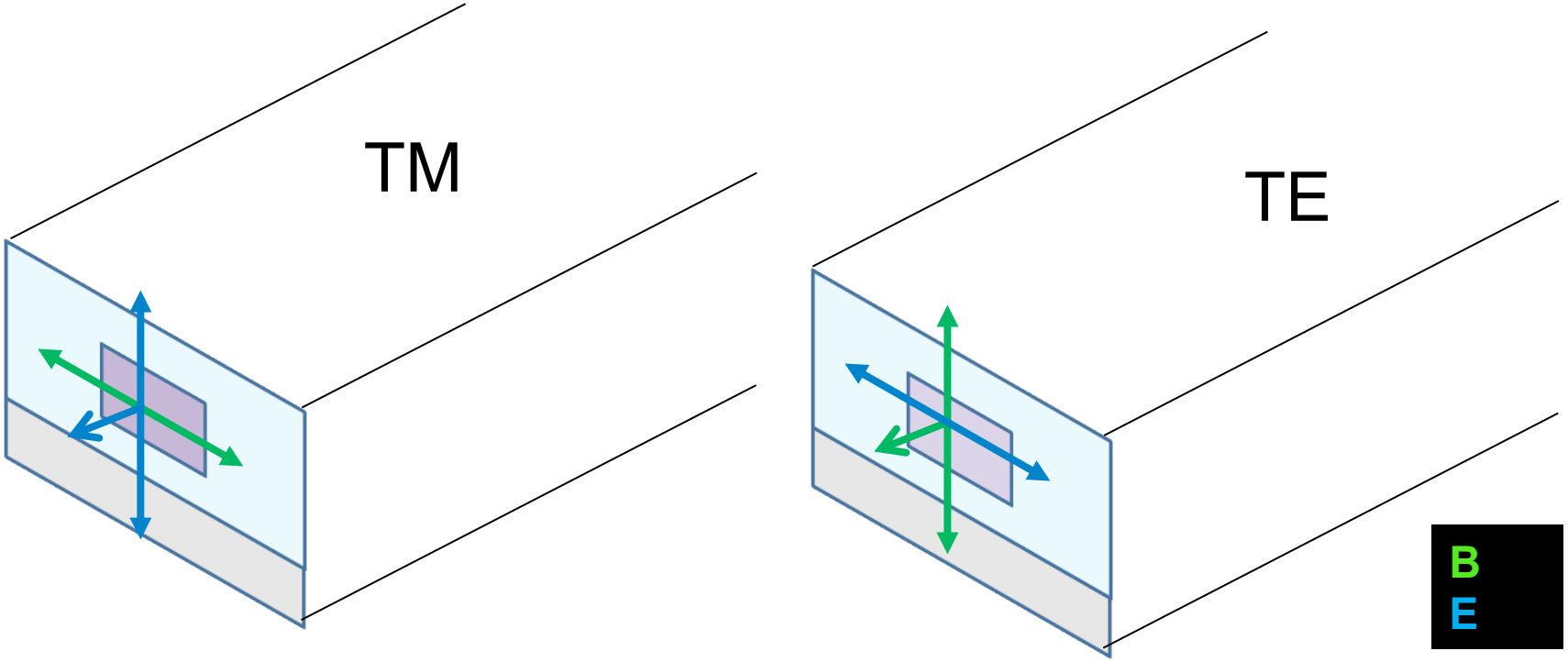


- Claro que problema pode ser mais complexo:



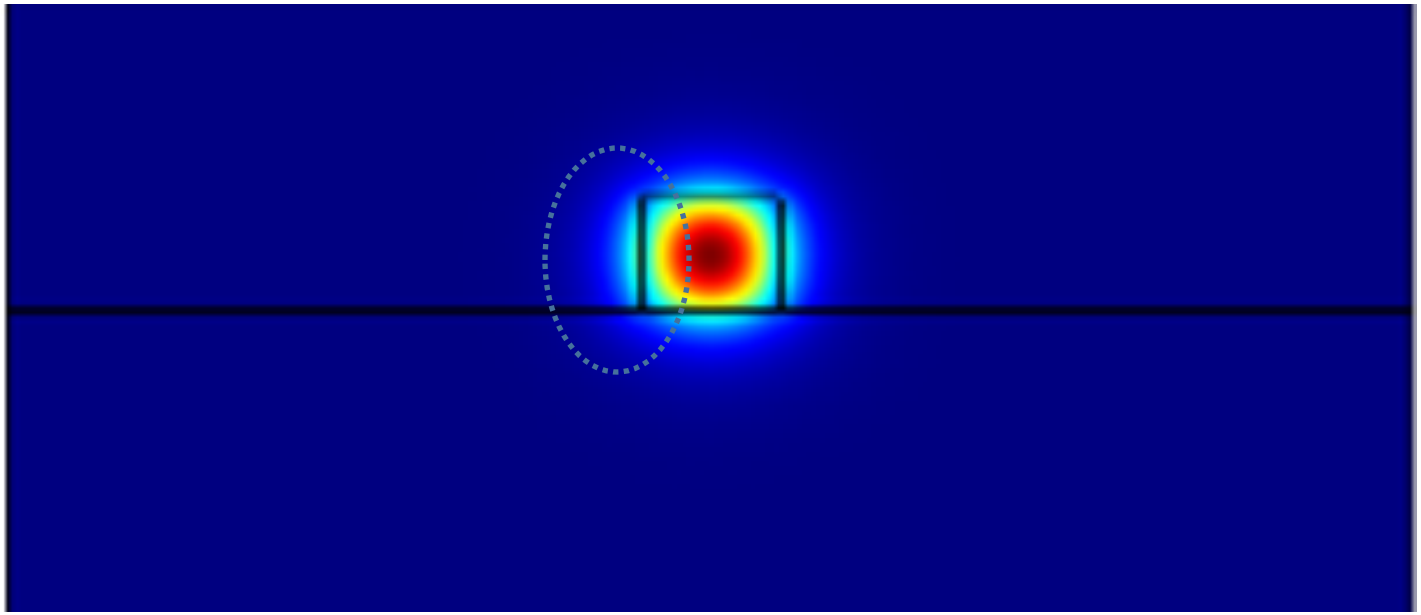
- Em geral modos são quase TE o quase TM.

TE e TM em guias retangulares

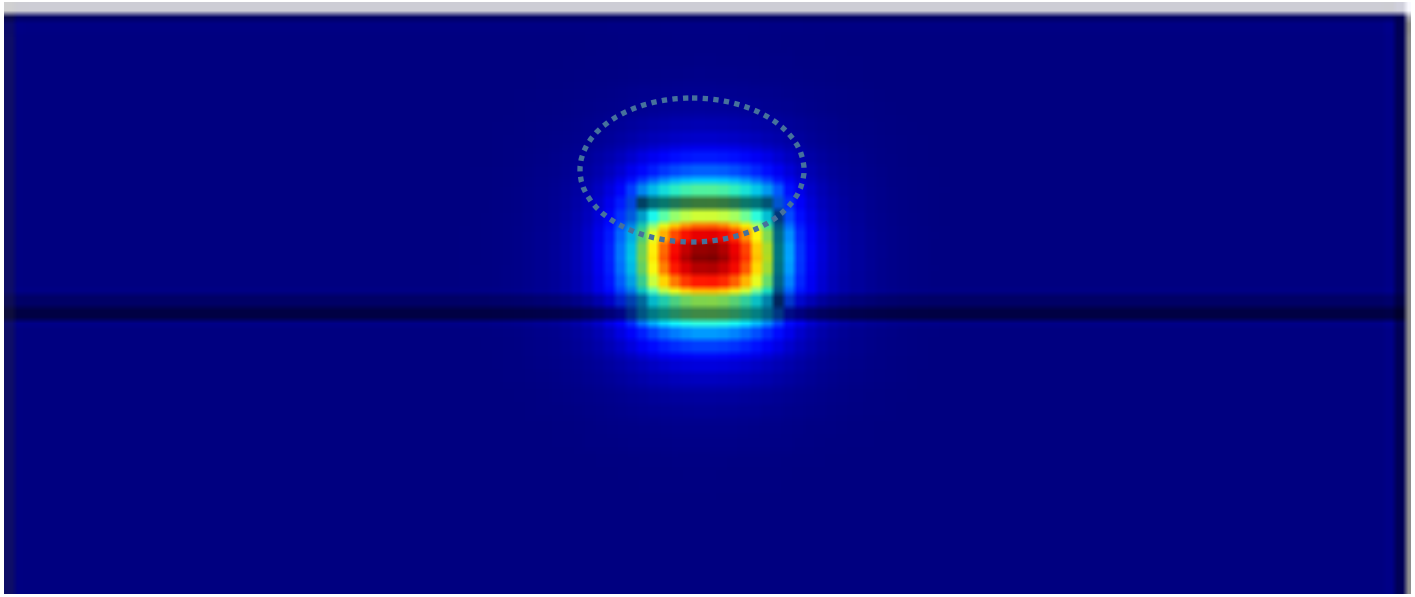


- Geralmente são guias planares dispostos num substrato. O plano do substrato define o que chamamos de TE ou TM;
- Notem que o TE é, de fato, TM do ponto de vista do guia vertical e vice-versa! Portanto, o campo elétrico é descontínuo nas paredes laterais para TE e nas horizontais para TM.

TE



TM

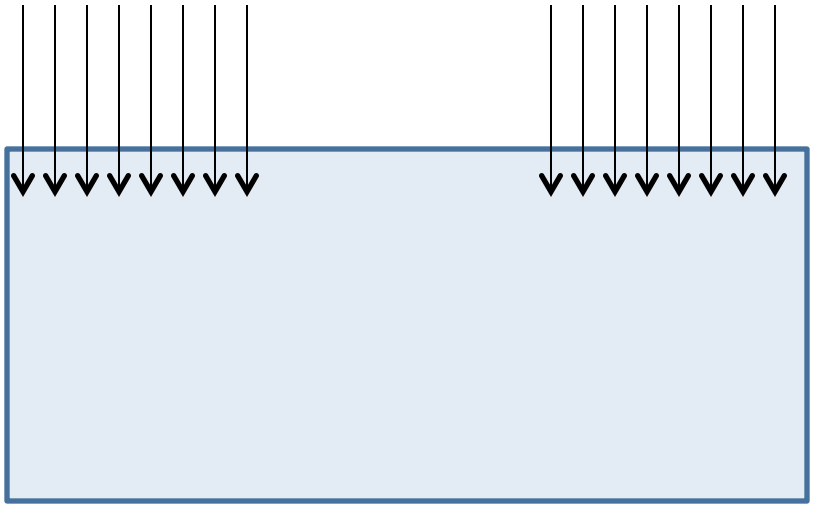


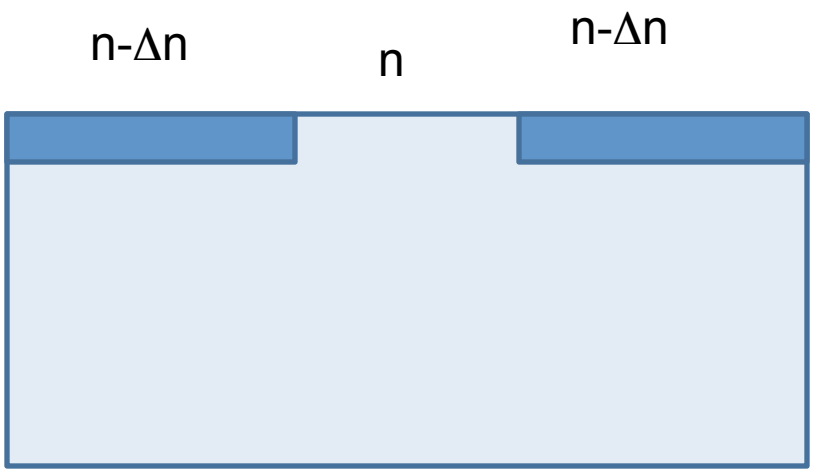
Exemplos

- Batente fraco:
  - Implantação, difusão, troca iônica
  - Ridge
- Batente forte (estrutura enterrada):
  - III/V
  - SOI
  - SiNx/Si)2

Batente fraco: Implantação

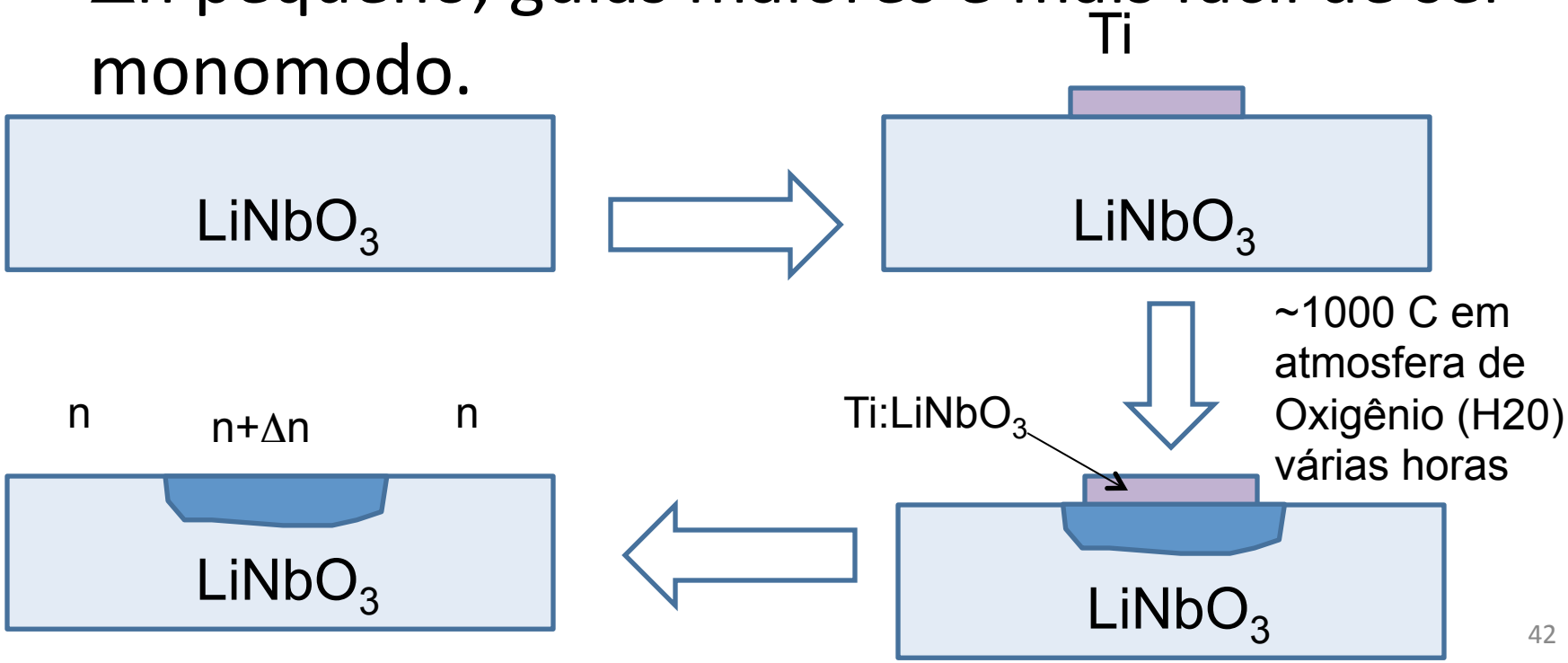
- Forma-se um batente de índice de refração fraco com a implantação de íons;
- Δn pequeno; guias maiores e mais fácil de ser monomodo.





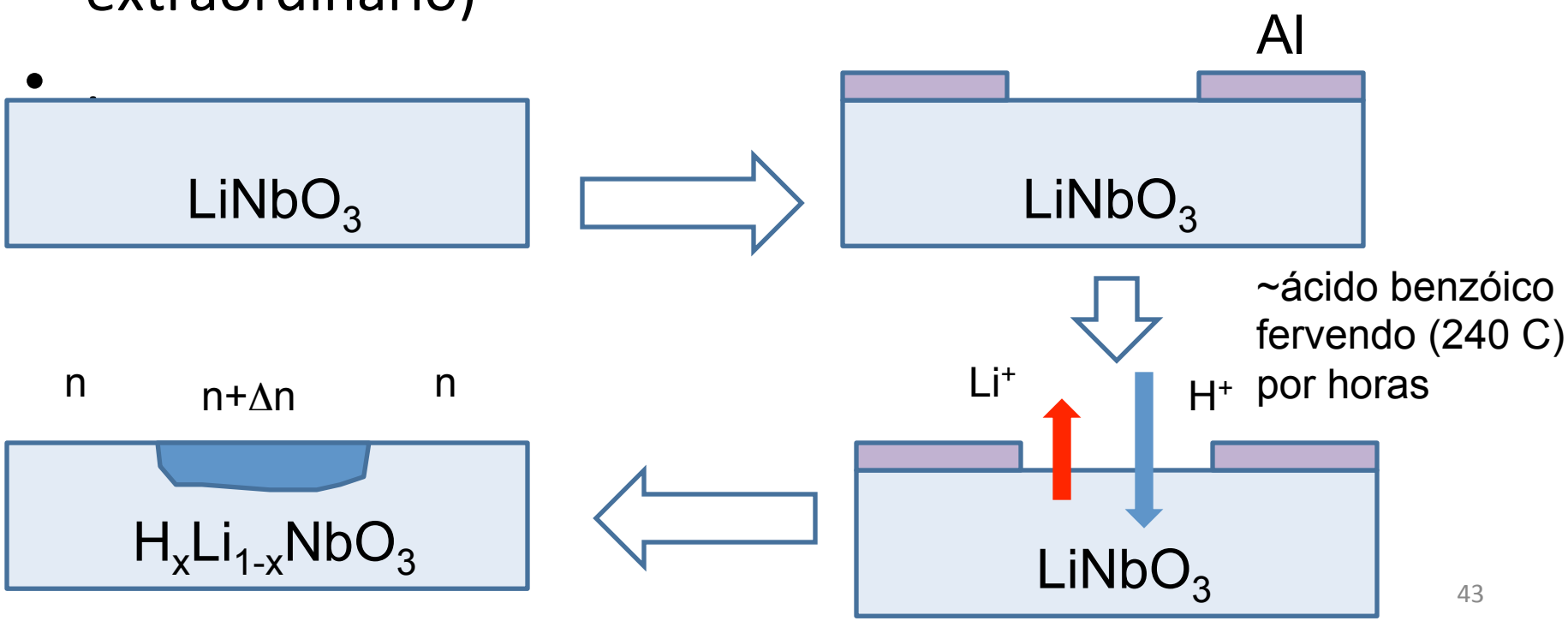
Batente fraco: Difusão

- Exemplo (LiNbO3) niobato de lítio: material birrefringente com alto coeficiente eletro óptico;
- Usado em Mach-Zender para modulador;
- Δn pequeno; guias maiores e mais fácil de ser monomodo.



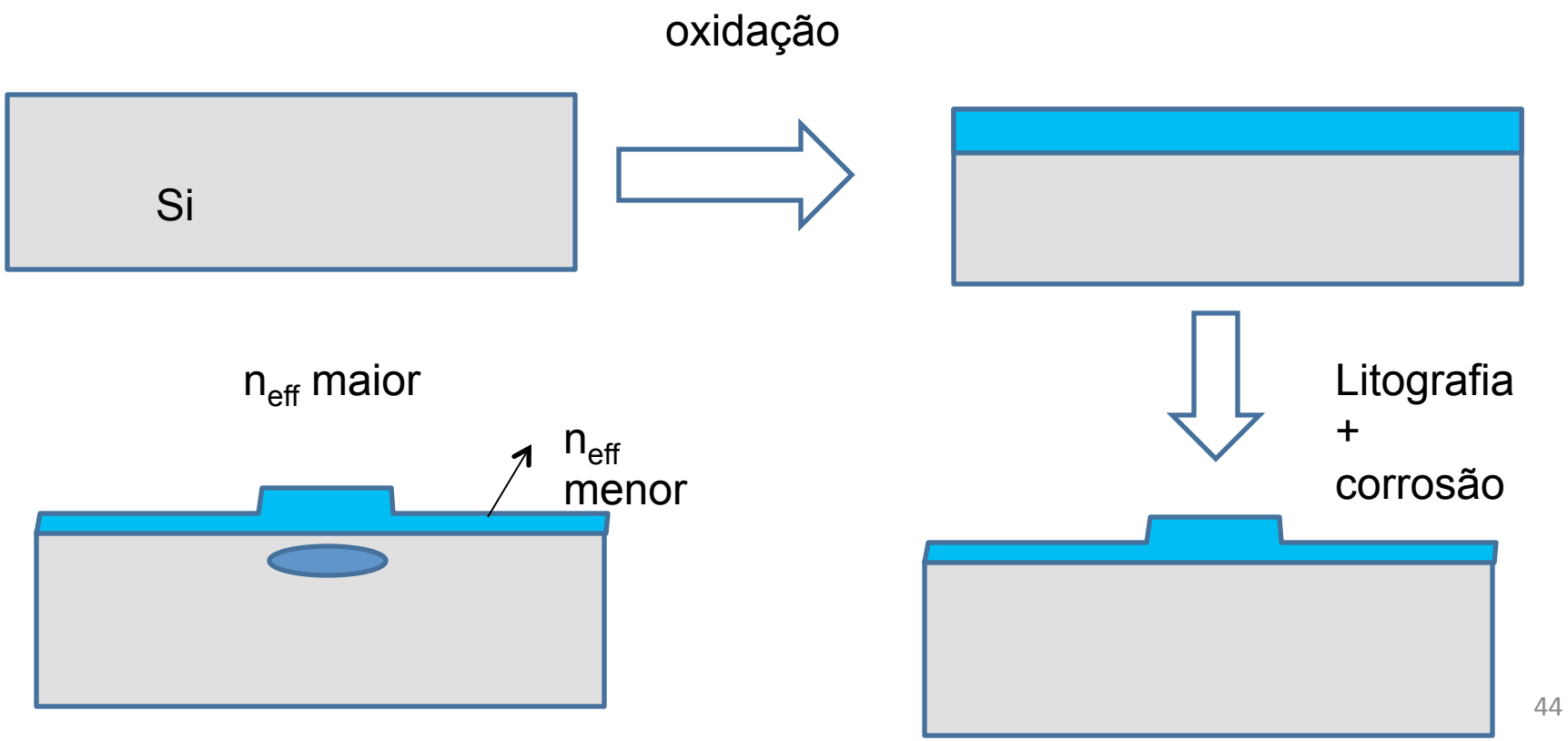
Batente fraco: Troca iônica

- Exemplo (LiNbO3) niobato de lítio: material birrefringente com alto coeficiente eletro óptico;
- Usado em Mach-Zender para modulador;
- Δn pequeno; guias maiores e mais fácil de ser mono modo. (Só aumenta o índice para o índice extraordinário)
-



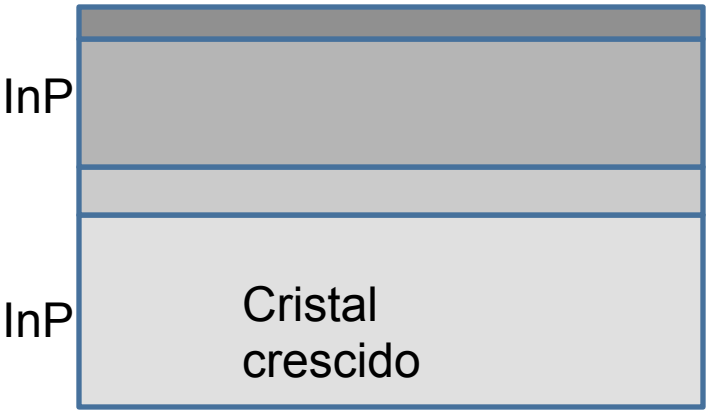
Ridge (Si)

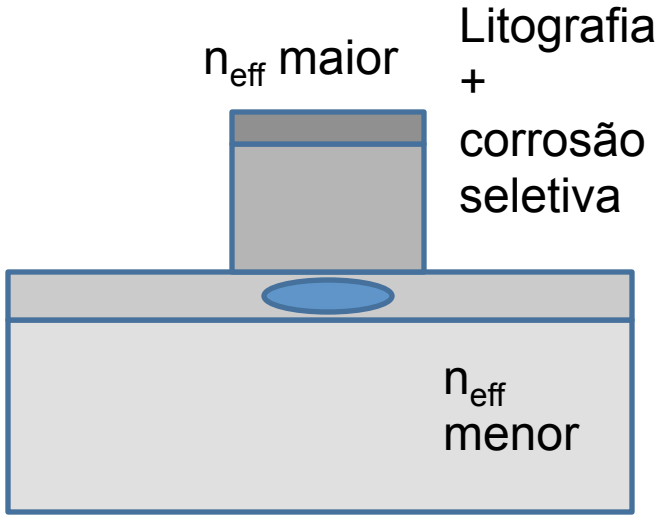
- Muito usado para permitir batentes pequenos e permitir fazer guias monomodos com guias largos.

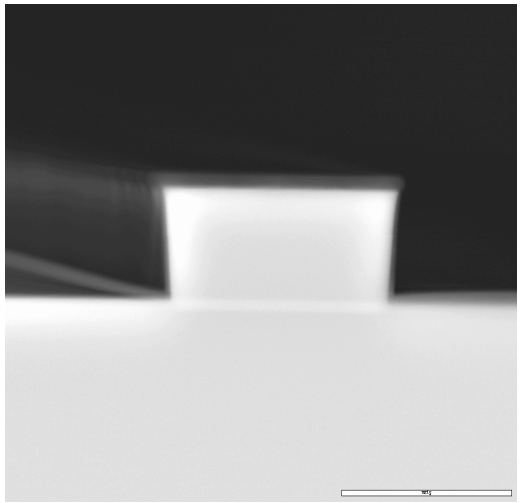


Ridge (III-V)

- Muito usado para permitir batentes pequenos e permitir fazer guias monomodos com guias largos

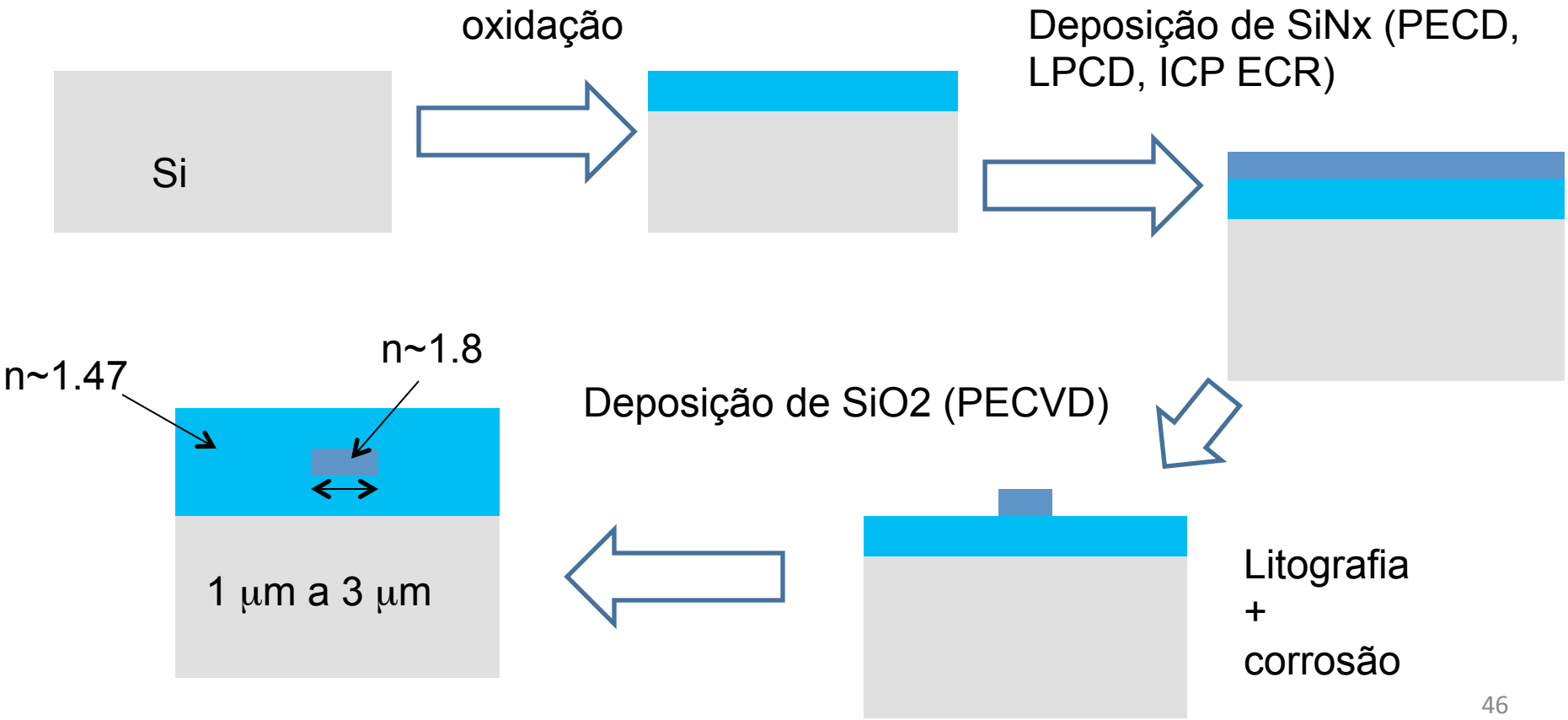






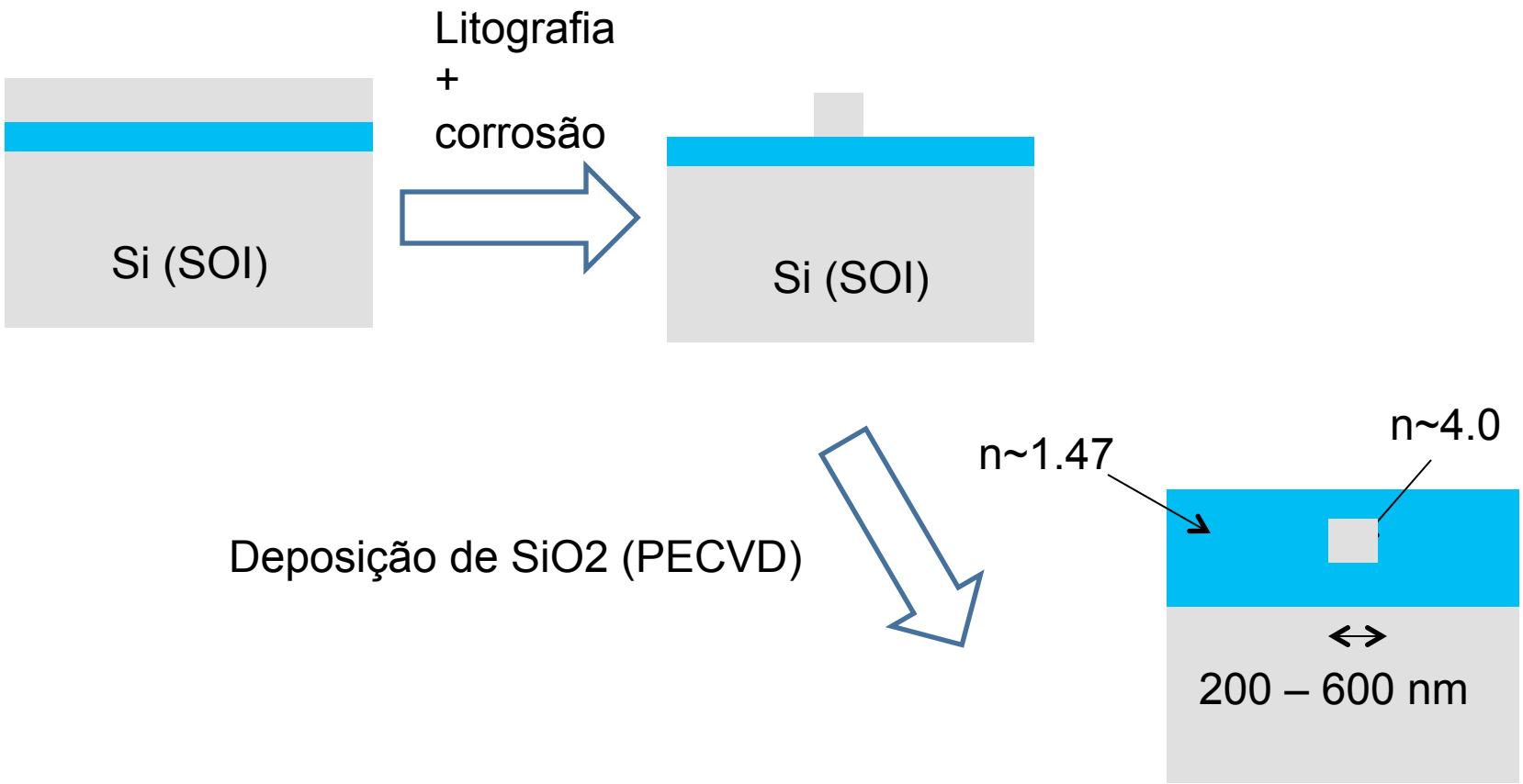
Batente forte (SiNx/SiO2)

- Muito usado para permitir batentes fortes e alto confinamento fotônico em material de baixa absorção por portadores livres.



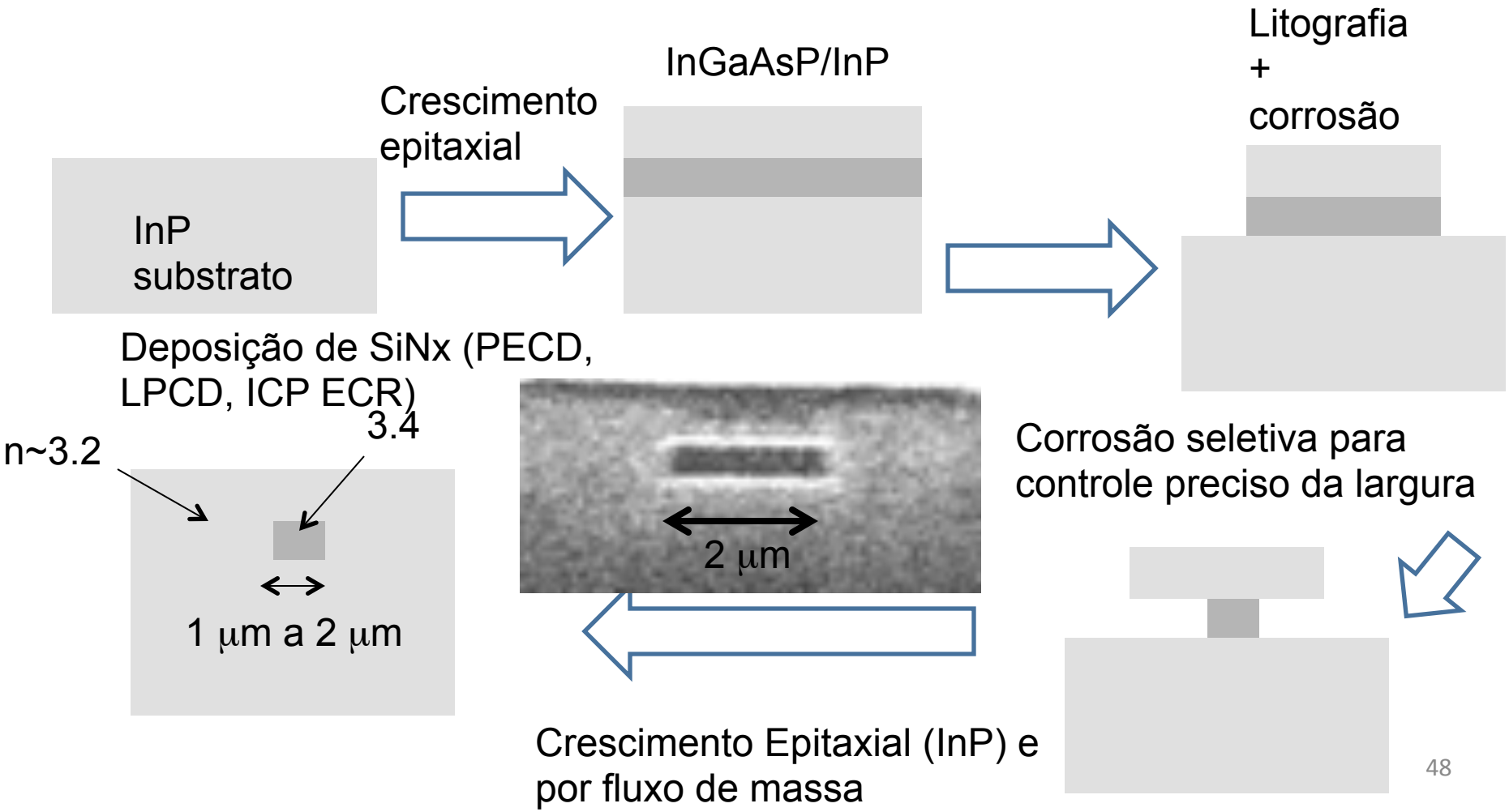
Batente muito forte (Si/SiO2)

- Muito usado para permitir batentes fortes e extremamente alto confinamento fotônico para alta integração



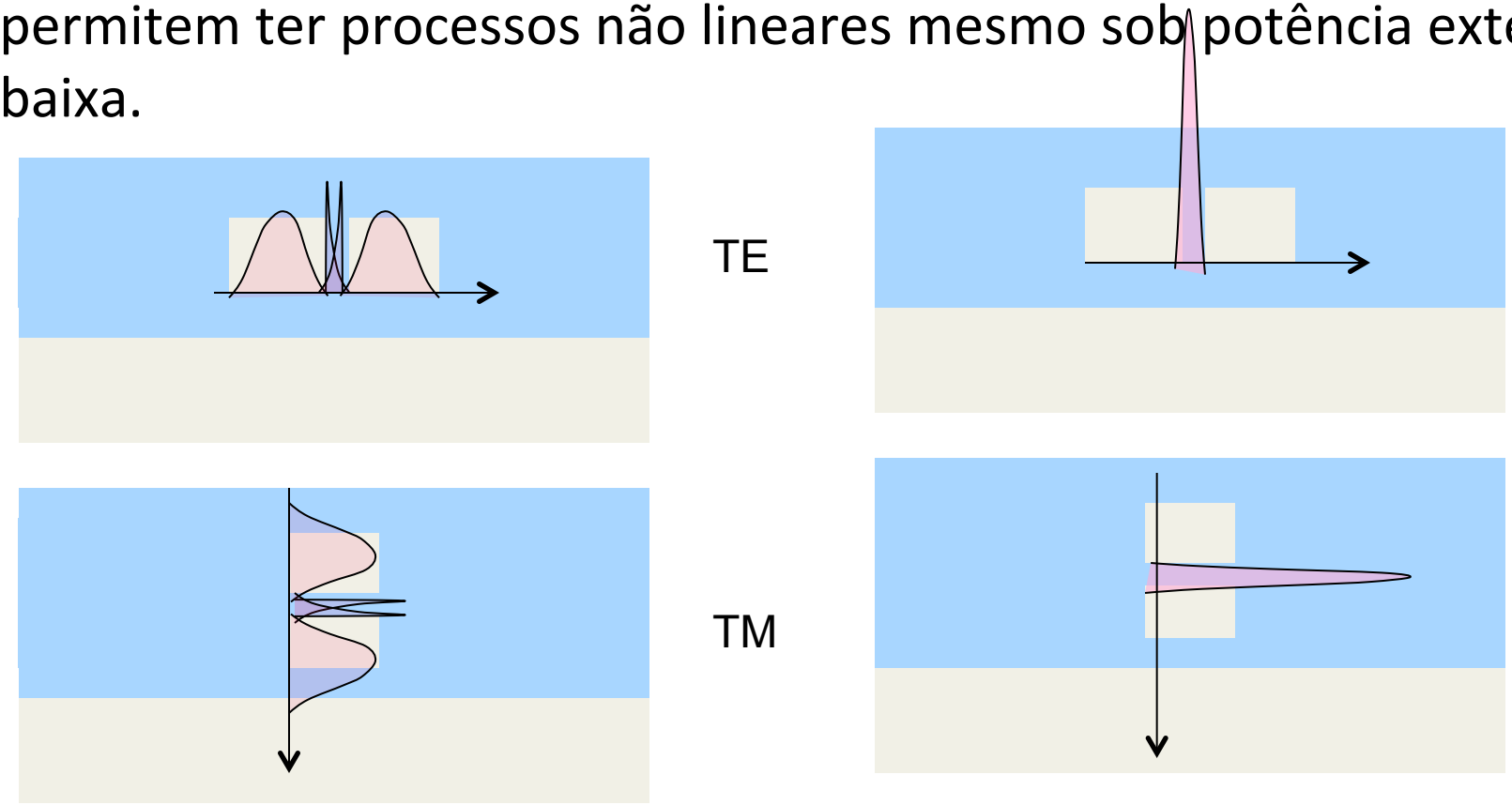
Batente forte (InGaAsP/InP)

- Muito usado para permitir batentes fortes e alto confinamento fotônico em material de baixa absorção por portadores livres.



Slot Waveguide

- Dois guias mais próximos que o alcance da onda evanescente (dezenas de nanômetros);
- Pode-se obter o guiamento justamente no corte (slot), ou seja, na região de menor índice de refração.
- Estes guias criam densidades fotônicas extremamente altas que permitem ter processos não lineares mesmo sob potência externa baixa.



Cilíndrico

- O problema tem simetria cilíndrica;
- A equação de Helmholtz $\left(\nabla_t^2 + \gamma^2\right)\Psi(\rho,\varphi) = 0;$ tem como solução:

$$\Psi(\rho,\varphi) = AJ_m(\gamma\rho)(Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi}); \rho < a$$

$$\Psi(\rho,\varphi) = AK_m(\beta\rho)(Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi}); \rho > a$$

- Caso TE: $\Psi = B_z$; *e* $B_\rho = \frac{ik}{\gamma^2}\left(\frac{\partial B_z}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_z}{\partial \varphi}\hat{\varphi}\right); E_\varphi = \frac{-\omega}{ck}\frac{\partial B_\rho}{\partial \rho}$

- *Caso TM:* $\Psi = E_z$; e $B_\varphi = \frac{ik\varepsilon_{D(F)}\omega}{c\gamma^2}\left(\frac{\partial E_z}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi}\hat{\varphi}\right); E_\rho = \frac{-ck}{\varepsilon_{D(F)}\omega}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \rho}$

- Com os campos aplicamos as condições de contorno e obtemos os modos.

Cilíndrico m=0

- Caso sem dependência azimutal para TE.

$$\left.\begin{aligned} B_z &= J_0(\gamma\rho) \\ B_\rho &= -\frac{ik}{\gamma} J_1(\gamma\rho) \\ E_\varphi &= \frac{i\omega}{c\gamma} J_1(\gamma\rho) \end{aligned}\right\} \rho \le a \qquad \left.\begin{aligned} B_z &= AK_0(\beta\rho) \\ B_\rho &= \frac{ik}{\beta} AK_1(\beta\rho) \\ E_\varphi &= -\frac{i\omega}{c\beta} AK_1(\beta\rho) \end{aligned}\right\} \rho > a$$

- Das condições de contorno e das equações nas duas regiões as soluções são os γ e β que satisfazem:

$$\left.\begin{aligned} AK_0(\beta a) &= J_0(\gamma a) \\ \frac{-AK_1(\beta a)}{\beta} &= \frac{J_1(\gamma a)}{\gamma} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{J_1(\gamma a)}{\gamma J_0(\gamma a)} + \frac{K_1(\beta a)}{\beta K_0(\beta a)} = 0; \gamma^2 + \beta^2 = (n_D^2 - n_F^2)\frac{\omega^2}{c^2}$$

- Notem que estes modos todos têm vetor de Poyinting nulo na direção de propagação (***EXB***).**z** no centro (Propriedade de J1)