FI-227 Física de Dispositivos

Tópico 9

Cavidades ressonantes

Cavidades Ressonantes

- Considere uma região fechada onde as propriedades da matéria (μ e ε) são diferentes do resto do espaço;
- Consideremos a ausência de fontes (cargas ou correntes. Portanto, temos seis equações:

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} = 0$$

- Se considerarmos a dependência com o tempo de uma única frequência, então teremos eq. para as componentes do tipo:

$$\nabla^2\Psi(r) + \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2}\Psi(r) = 0 \equiv [\nabla^2 + k_0^2] = 0$$

- As condições de contorno na interface (não magnéticos) serão do tipo:

$$\Psi_d(\text{int}) = \Psi_f(\text{int}); \nabla\Psi_d(\text{int}) = \nabla\Psi_f(\text{int});$$

$$\nabla\Psi_d(\text{int})/\varepsilon = \nabla\Psi_f(\text{int})/\varepsilon$$

Cavidades Fechadas

- As cavidades fechadas todos os campos são nulos fora dela; sendo assim a condição de contorno fica:

$$\Psi(fronteira) = 0; \nabla\Psi(fronteira) = 0$$

- Nos casos separáveis, material homogênio ou geometrias particulares; será um produto de 3 funções, cada uma função de uma dimensão; e teremos três equações do tipo:

$$\wp\, u(x) + \lambda\omega(x)u(x) = 0;$$

$$\wp \equiv \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)$$

- Onde λ , o auto-valor, está relacionado com k_0;
- Esta forma auto-adjunta, coma as condições de contorno acima, garantem λ são reais e que podemos sempre construir uma base ortogonal completa em cada dimensão para funções no domínio da região;

- De forma geral então temos para cada ω_n, uma solução $\Phi_n(\mathbf{r})$ e o conjunto de funções $\Phi_n(\mathbf{r})$ formam uma base ortogonal completa para descrever qualquer função de r na região;
- Como cada $\Phi_n(\mathbf{r})$ é solução com uma frequência, se num num instante inicial, temos $\Gamma(r,0)$ então:

$$\Gamma(\vec{r},t) = \sum_n a_n \phi_n(\vec{r}) e^{i\omega_n t};$$

$$a_n = \int \phi_n^*(\vec{r})\Gamma(\vec{r},0)d^3r; \int \phi_m^*(\vec{r})\phi_n(\vec{r})d^3r = \delta_{m,n}$$

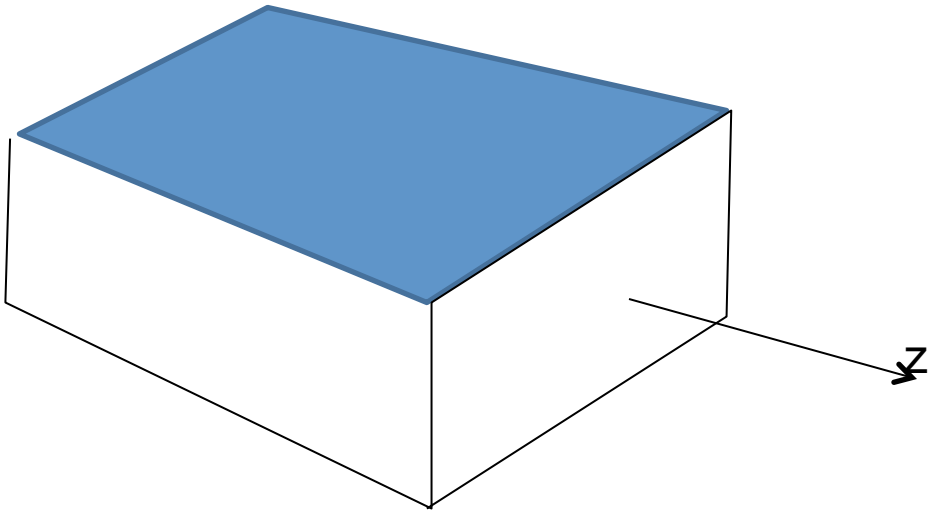
- Em geral, temos uma mistura de frequências, mas se tivermos um $\Gamma(\mathbf{r},0) = \Phi_n(\mathbf{r})$, o sistema permanecerá neste estado indefinidamente oscilando numa única frequência (largura de linha nula); O mesmo pode ser dito se fixamos um ponto do espaço e temos uma oscilação f(r0,t); teremos uam mistura de requências com as distribuições espaciais correspondentes

$$\Gamma(\vec{r},t) = \sum_n a_n \phi_n(\vec{r}) e^{i\omega_n t};$$

$$a_n = \int e^{-i\omega_n t}\Gamma(\vec{r}_0,t)dt; \int e^{-i\omega_n t} e^{i\omega_m t} dt = (1/\sqrt{2\pi})\delta(\omega_n - \omega_m)$$

Exemplos

- Cavidade em forma de paralelepípedo;
- Modo TE;
- Do tópico 9, vejamos o guia retangular, agora fechado em z = 0 e z = c



- No problema do guia tínhamos: exp(±ikz), sendo que temos ramos de $K_{p,q}(\omega)$ ou temos ramos de $\omega_{p,q}(K)$

$$\omega_{p,q}(k) = \frac{c}{n}\sqrt{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{b}\right)^2 + k^2}$$

- No caso TE $B_z = 0$ em z = 0 e z = c, $B_z = \Psi \exp(\pm ikz)$, então:

$$B_z(x,y,z) = \Psi(x,y)(E\cos(kz) + Fsen(kz));$$

$$B_z(x,y,0) = 0 \Rightarrow E = 0; B_z(x,y,c) = 0 \Rightarrow Fsen(kc) = 0 \Rightarrow k_l c = l\pi; l = \pm 1, \pm 2, ..$$

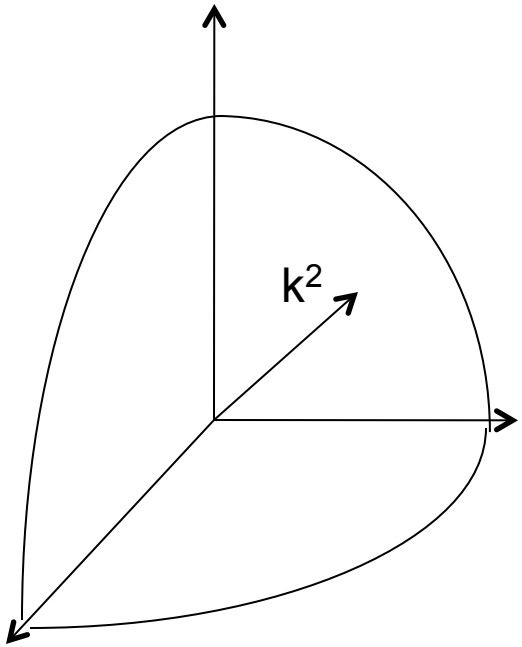
- Só algumas frequências podem existir:

$$\omega_{p,q,l}(k) = \frac{c}{n}\sqrt{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2}$$

- Temos então as constantes de propagação em x, y e z, $k_{x,p}=p\pi/a$, $k_{y,q}=q\pi/b$, $k_{z,l}=l\pi/c$

$$\vec{k}=(k_x,k_y,k_z);k^2=\pi^2\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}\right)$$

- Consideremos a=b=c=d Para k^2 grande (comprimentos de onda muito menores que d, temos o numero de modos:



$$N(k)=\frac{\frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi k^3}{(\pi/d)^3}=\frac{k^3d^3}{6\pi^2}\Rightarrow$$

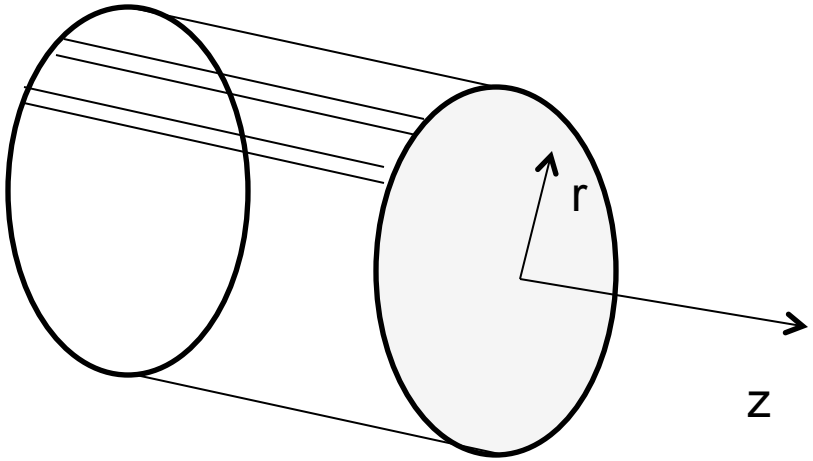
$$n(k)\equiv N(k)/Vol=\frac{k^3}{6\pi^2};\rho_{TE}(k)=\frac{dn(k)}{dk}=\frac{k^2}{2\pi^2};$$

$$\rho_{TE}(\omega)=\frac{dn(k(\omega))}{dk}\frac{dk}{d\omega}=\frac{\omega^2}{2c^3\pi^2};k=\frac{\omega}{c}$$

$$\rho_{TE}(\nu)=\frac{dn(k(\omega))}{dk}\frac{dk}{d\omega}\frac{d\omega}{d\nu}=\frac{4\pi^2\nu^2 2\pi}{2c^3\pi^2}=\frac{4\pi\nu^2}{c^3};\rho_{TE+TM}(\nu)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

Exemplos

- Cavidade cilíndrica: Comecemos com o guia cilíndrico;
- Modo TM; $\Psi = E_z$; $E_z = 0$ em $r=R$
- Do tópico 8, agora fechado em $z = 0$ e $z = c$



$$\left(\nabla_t^2 + \gamma^2\right)\Psi(r,\varphi) = 0; \gamma^2 \equiv \frac{n^2\omega^2}{c^2} - k^2$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + \gamma^2\Psi = 0; \Psi = P(\rho)\Phi(\varphi)$$

$$\frac{\rho}{P}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \gamma^2\rho^2 = 0; \frac{1}{\Phi\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -M^2; M = 0,1,2,\ldots$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right) + (\gamma^2\rho^2 - M^2)P = 0;$$

$$E_z = AJ_M[\gamma(k)\rho][B\cos(M\varphi) + Csen(M\varphi)][D\cos(kz) + Esen(kz)];$$

$$J_M[\gamma(k)R] = 0 \Rightarrow \gamma_{M,N}(k) = \mathrm{X}_{M,N}/R$$

- Onde $X_{M,N}$ é a n-ésima raiz da função de Bessel $J_M(x)$

- O campo elétrico transversal deve ser nulo nas tampas em z = 0 e z = H, então:

$$\vec{E}_t = -\frac{ik}{\gamma^2}\vec{\nabla}_t E_z = -\frac{ik}{\gamma^2}[D\cos(kz) + Esen(kz)]\vec{\nabla}_t(P\Phi);$$

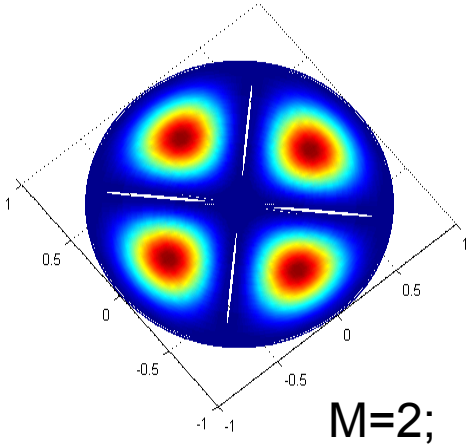
$$\vec{E}_t(z=0) = 0; \vec{E}_t(z=H) = 0 \Rightarrow D = 0; kl = l\pi / H$$

- Ou seja, quantizamos os valores de k.

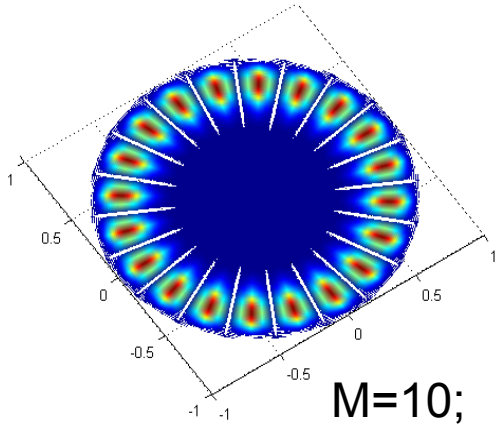
$$\gamma_{M,N}^2 = \frac{n^2\omega^2}{c^2} - \frac{l^2\pi^2}{H^2} \Rightarrow \omega_{M,N,l} = \frac{c}{n}\sqrt{\frac{\mathrm{X}_{M,N}^2}{R^2} + \frac{l^2\pi^2}{H^2}};$$

$$\omega_{\min} = \omega_{0,1,1} = \frac{c}{n}\sqrt{\frac{5.8}{R^2} + \frac{9.9}{H^2}}; R = H = 1mm; \nu_{\min} \approx 440GHz$$

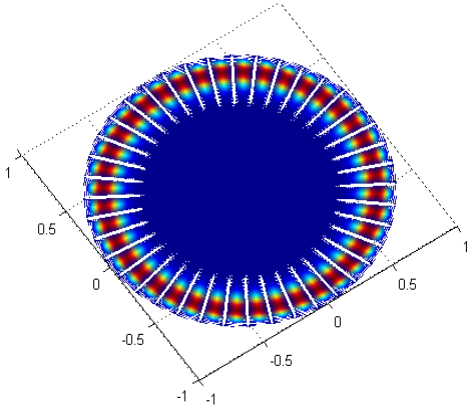
- Os modos com M=1,2,... e o primeiro zero, N=1 são modos confinados próximo à superfície. Isto ocorre devido às propriedades das funções de Bessel neste caso.
- Podemos graficar as funções $P(\rho)\Phi(\phi)$:



M=2;
N=1



M=10;
N=1



M=20;
N=1

- Estes modos têm 2M nodos/antinodos que se concentram cada vez mais próximo à superfície. São chamados whispering gallery modes.

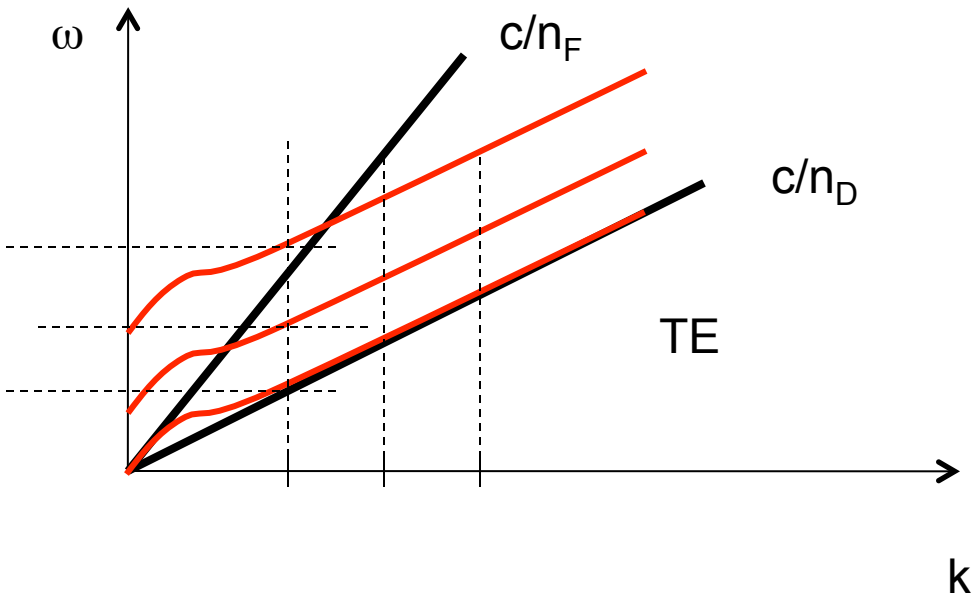
Disco Dielétrico

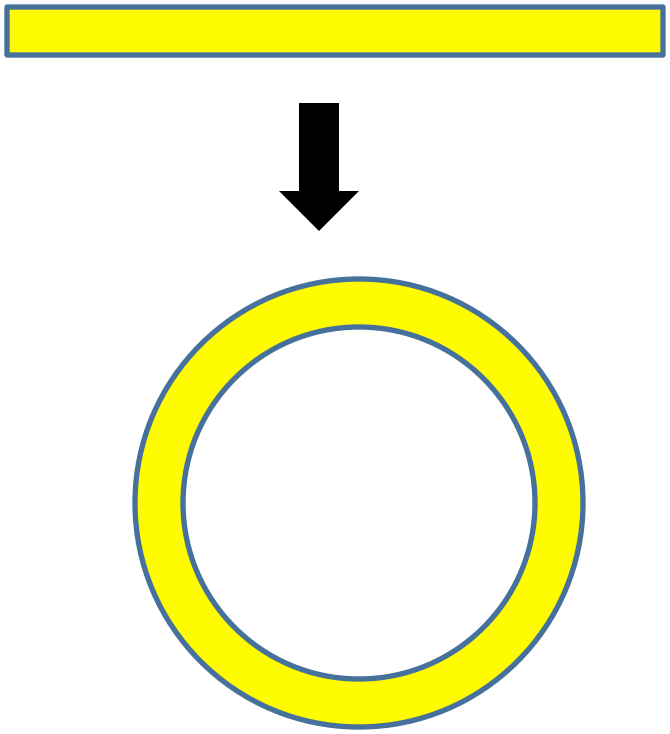
- Consideramos o problema bi-dimensional
- O confinamento no plano é dado pelo resultado do "slab waveguide"onde obtemos o n_{eff} para a propagação confinada. Em geral a espessura é tal que somente um modo (TE e TM) é permitido.
- Aproximamos o problema considerando a condição de contorno como o caso metálico ou seja nulidade de E tangencial ou B normal na borda.
- As ressonâncias:

$$\gamma^2 \approx \frac{n_{eff_{TE,TM}}^2 \omega^2}{c^2} \Rightarrow \gamma_{M,N}^2 = \frac{X_{M,N}^2}{R^2} \Rightarrow \omega_{M,N}^{TE,TM} = \frac{c}{n_{eff_{TE,TM}}} \frac{X_{M,N}}{R}$$

Cavidade Anel

- Um guia de ondas que é distorcido para formar um anel.
- Os modos que podem existir são contínuos após uma revolução. Então os k´s e, portanto, as frequências ω são discretos.
- $K_p = p2\pi/L$





Perda de energia

- Se existe dissipação da energia armazenada na cavidade, inicialmente preparada num modo $\Phi_n(r)$, qual deve ser o efeito espectral;
- Consideremos agora que a energia decaia exponencialmente com o tempo de vida fotônico τ:

$$U(t) = A\left|\phi(r,t)\right|^2 = Ae^{-t/\tau_p} = Ae^{-\omega_n t/Q}; Q \equiv \omega_n \tau_p$$

- Onde Q é o fator de qualidade da cavidade;

$$Q = \omega_n \tau_p = 2\pi \frac{\tau_p}{T}; \frac{U(t)}{\left|\frac{dU(t)}{dt}\right|} = \frac{Q}{\omega_n} \Longrightarrow Q = \frac{E_{arm}}{R_{perda}} \frac{2\pi}{T}$$

- Para este decaimento, propomos:

$$\phi(r,t) = f(r)e^{i\omega_n t(1+\frac{i}{Q2})} e^{i\Delta\omega_n t}; \left|\phi(r,t)\right|^2 = \left|f(r)\right|^2 e^{-\omega_n t/Q}$$

- A transformada de Fourier desta amplitude nos dá o comportamento espectral:

$$\tilde{\phi}(r,\omega) = \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{matrix} e^{i\left[\omega_n(1+\frac{i}{Q2})+\Delta\omega_n\right]t}; t>0 \\ 0; t<0 \end{matrix}\right\} e^{-i\omega t}dt = \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\left[\frac{\omega_n}{Q2}+(\omega-\omega_n-\Delta\omega_n\right]t}dt$$

$$\frac{f(r)/\sqrt{2\pi}}{(\omega_n/2Q)+i(\omega-\omega_n-\Delta\omega_n)};$$

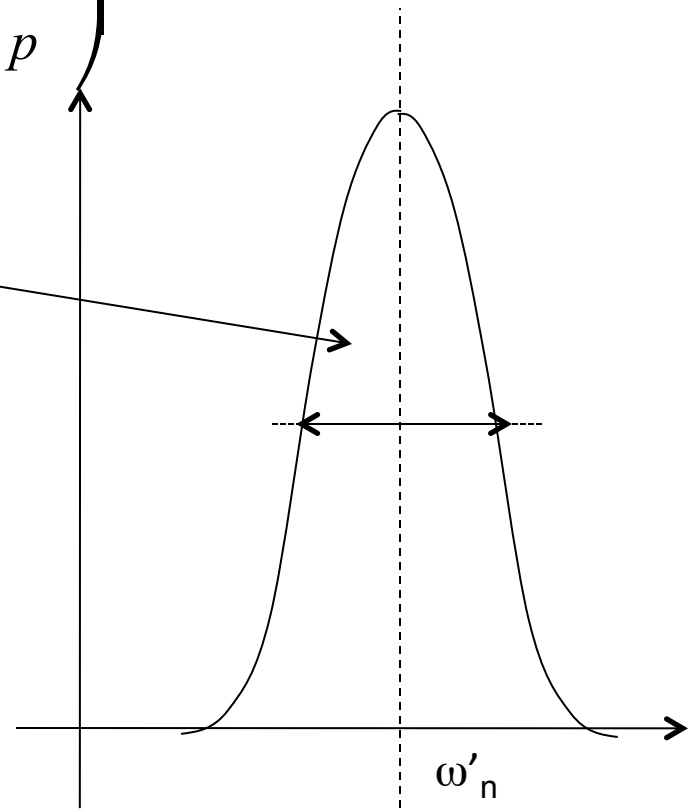
$$\left|\tilde{\phi}(r,\omega)\right|^2 \propto \frac{|f(r)|^2}{\left(\frac{\omega-\omega_n-\Delta\omega_n}{\omega_n/2Q}\right)^2+1} = \frac{|f(r)|^2}{\left(\frac{\omega-\omega_n'}{1/2\tau_p}\right)^2+1}$$

- Temos um curva Lorentziana centrada em ω_n-$\Delta\omega_n$ Ou seja, temos um desvio da ressonância por $\Delta\omega_n$ e uma largura de meia altura de ω_n/Q ou $1/\tau_p$;
- Quanto maior Q ou o tempo de vida fotônico, menor a largura de linha.

$$\left|\tilde{\phi}(r,\omega)\right|_M^2 = 1; \omega - \omega_n' = 0;$$

$$\left|\tilde{\phi}(r,\omega)\right|_M^2 = 1/2; \left(\frac{\omega - \omega_n'}{1/2\tau_p}\right)^2 = 1; (\omega - \omega_n') = 1/2\tau_p$$

$$2(\omega - \omega_n') = 1/\tau_p$$



Cálculo Direto Aproximado: Cavidade linear

- Consideremos uma cavidade linear com dois espelhos com refletividade *R*, ganho *g* e perdas por espalhamento *a* da propagação;
- A intensidade de uma onda plana propagando-se na cavidade linear é: $I(x) = I_0 e^{(g-a)x)}$
- A amplitude da onda então deve ser:
- $E(x) = E_0 e^{[ik+(g-a)/2]x} = I_0^{1/2} e^{[ik+(g-a)/2]x}$

- Após a n-ésima volta completa, temos:

$$E_n / E_0 = R^n . e^{[ik+(g-a)/2]2nL} = e^{[ik+(g-a)/2]2nL+2n\ell n(r)}; r = \sqrt{R}$$

- Portanto, o campo total num certo ponto da cavidade, se esperarmos um tempo longo, combina contribuições com diversas número de voltas:

$$E_T / E_0 = \sum_n (e^{\{ik+[(g-a)/2+(1/L)\ell nr]\}2L})^n$$

- Temos uma série geométrica que converge quando:

$$(g-a)/2 + (1/L)\ell n(r) < 0; g < a - (1/L)\ell n(R) \equiv g_{\lim iar}$$

- Mais ainda, temos as ressonâncias em :

$$e^{ik2L} = 1 \Rightarrow k_m = m\pi / L; \omega_m = (c/n)m\pi / L$$

- A intensidade do campo é E.E*

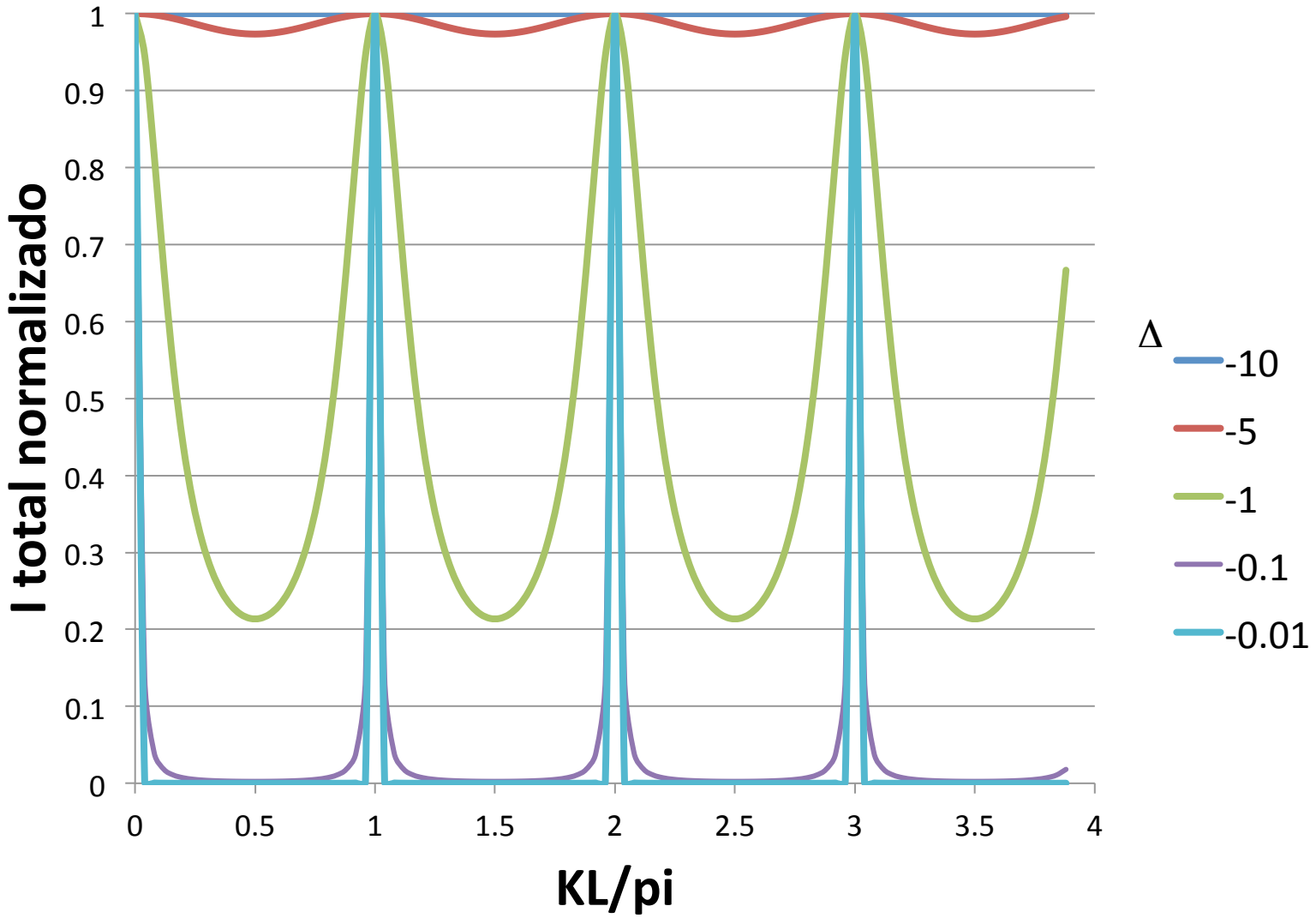
$$E_T / E_0 = \sum_n (e^{\{ik+[(g-a)/2+(1/L)\ell nr]\}2L})^n = \frac{1}{1-e^{\{ik+[(g-a)/2+(1/L)\ell nr]\}2L}}$$

$$I_T = \frac{1}{(1-e^{\Delta})^2 + 4e^{\Delta}\sin^2(kL)}; \Delta \equiv [(g-a)L - \ell n(1/R)]$$

$$I_T = \frac{1}{(1-R.e^{(g-a)L})^2 + 4R.e^{(g-a)L}\sin^2(kL)}$$

- Se Δ=0 (limiar) temos divergências nas ressonâncias! Ou seja, quando as perdas igualam ao ganho temos picos com largura de linha zero em torno das ressonâncias.

I vs KL/pi para diversos Δ



Notem a largura de linha diminuindo com a diminuição de Δ.

- Finesse:

$$I_T = \frac{I_{MAX}}{1+\left(F/\pi\right)^2 \sin^2(kL)} = \frac{I_{MAX}}{1+\left(F/\pi\right)^2 \sin^2(\omega L/c)};$$

$$I_{MAX} \equiv \frac{1}{(1-R.e^{(g-a)L})^2}; F/\pi \equiv \sqrt{\frac{4R.e^{(g-a)L}}{(1-R.e^{(g-a)L})^2}};$$

$$I_T\Big|_{\omega\to\omega_m=mc\pi/L} \approx \frac{I_{MAX}}{1+\left(F/\pi\right)(\omega-\omega_n)^2(L/c)^2} = I_{MAX}/2 \Rightarrow \Delta(\omega L/c) \approx \frac{2\pi}{F}$$

$$\Delta\omega \approx \frac{2\pi c}{FL} \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \approx \frac{2\pi c}{FL}\frac{L}{m\pi c} = \frac{2}{mF} = \frac{1}{Q}$$

- O Q está relacionado com a finesse e é tanto maior quanto maior ω_m, ou m.

Fator Q

- Expandindo-se a expressão da página 19 em torno de uma ressonância ω_n, temos:

$$I_T(\omega \approx \omega_m) = \frac{1}{(1-e^{\Delta})^2 + 4e^{\Delta}(nL/c)^2(\omega-\omega_m)^2}; \Delta \equiv [(g-a)L - \ell n(1/R)]$$

$$I_T(\omega \approx \omega_m) = \frac{(1-e^{\Delta})^{-2}}{1 + \frac{4e^{\Delta}(nL/c)^2}{(1-e^{\Delta})^2}(\omega-\omega_m)^2}$$

$$Q = \frac{e^{\Delta/2}}{(1-e^{\Delta})}\frac{nL}{c}\omega_m = -\frac{nL\omega_m}{2c\sinh(\Delta/2)} = \omega_m \tau_p$$

$$\tau_p = -\frac{nL}{2c\sinh(\Delta/2)}$$

- Notem que no limiar Q →∞; Próximo ao limiar:

$$\Delta \approx 0 \Rightarrow \sinh(\Delta/2) \to \Delta/2 \Rightarrow Q \to -\frac{nL\omega_m}{c\Delta}$$

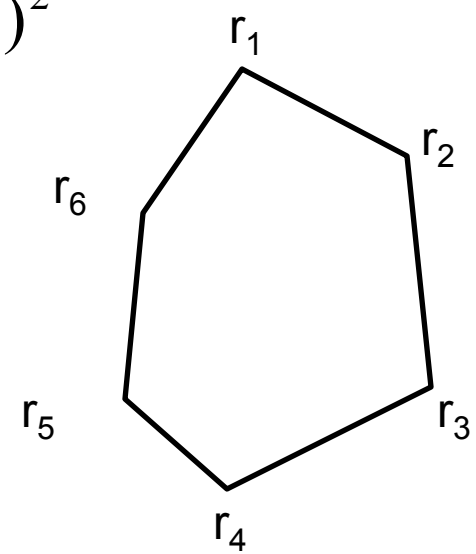
$$\frac{1}{\tau_p} \to \frac{(c/n)\Delta}{L} = (c/n)\left[(g-a) - (1/L)\ell n(1/R)\right]$$

- Podemos expandir isto para cavidades com múltiplas reflexões com q muitas reflexões e q segmentos ($l_1 + l_2, \ldots = L_T$).

$$I_T(\omega \approx \omega_m) = \frac{1}{(1-e^{\Delta})^2 + 4e^{\Delta}(nL_T/2c)^2(\omega-\omega_m)^2};$$

$$\Delta \equiv [(g-a)L_T/2 + \ell n(r_1 r_2 .. r_q)]$$

$$I_T(\omega \approx \omega_m) = \frac{(1-e^{\Delta})^{-2}}{1 + \frac{4e^{\Delta}(nL_T/2c)^2}{(1-e^{\Delta})^2}(\omega-\omega_m)^2}$$



$$Q = \frac{2e^{\Delta/2}}{(1-e^{\Delta})}\frac{nL_T}{2c}\omega_m = -\frac{nL_T\omega_m}{2c\sinh(\Delta/2)} = \omega_m \tau_p$$

$$\tau_p = -\frac{nL_T}{2c\sinh(\Delta/2)}$$

Cavidade anel

- L=2πR
- As perdas são distribuídas na rugosidade e incorporadas em a.

$$\Delta \equiv [(g-a)\pi R]; \omega_m = \frac{mc}{R}$$

$$I_T(\omega \approx \omega_m) = \frac{(1-e^{\Delta})^{-2}}{1+\frac{4e^{\Delta}(n\pi R/c)^2}{(1-e^{\Delta})^2}(\omega-\omega_m)^2}$$

$$Q = \frac{2e^{\Delta/2}}{(1-e^{\Delta})}\frac{n\pi R}{c}\omega_m = -\frac{n\pi R\omega_m}{c\sinh(\Delta/2)} = -\frac{n\pi m}{\sinh(\Delta/2)}$$

$$\tau_p = -\frac{n\pi R}{c\sinh(\Delta/2)}$$

Cavidade anel

- L=2πR
- As perdas são distribuídas na rugosidade e incorporadas em a.

$$\Delta \equiv [(g-a)\pi R]; \omega_m = \frac{mc}{R}$$

$$I_T(\omega \approx \omega_m) = \frac{(1-e^{\Delta})^{-2}}{1+\frac{4e^{\Delta}(n\pi R/c)^2}{(1-e^{\Delta})^2}(\omega-\omega_m)^2}$$

$$Q = \frac{2e^{\Delta/2}}{(1-e^{\Delta})}\frac{n\pi R}{c}\omega_m = -\frac{n\pi R\omega_m}{c\sinh(\Delta/2)} = -\frac{n\pi m}{\sinh(\Delta/2)}$$

$$\tau_p = -\frac{n\pi R}{c\sinh(\Delta/2)}$$

Polígonos de 2M lados inscritos em circunferência de raio R

$$I_T(\omega \approx \omega_m) = \frac{1}{(1-e^{\Delta})^2 + 4e^{\Delta}(nL_T/2c)^2(\omega-\omega_m)^2};$$

$$\Delta \equiv [(g-a)L_T/2 + M\ell n(R)]; L_T = 4MR\cos\left(\pi/2 - \pi/2M\right)$$

$$Q = \frac{2e^{\Delta/2}}{(1-e^{\Delta})}\frac{nL_T}{2c}\omega_m = -\frac{nL_T\omega_m}{2c\sinh(\Delta/2)} = \omega_m\tau_p$$

$$\tau_p = -\frac{nL_T}{2c\sinh(\Delta/2)}$$

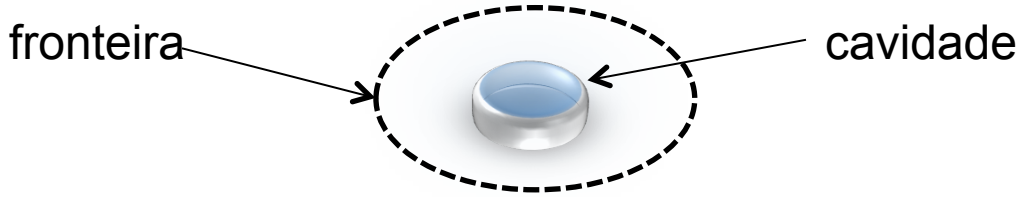
- Este caso aproxima-se aos modos whispering gallery modes;
- Para M grande, aproxima-se do anel

$$L_T = 4MR\cos\left(\pi/2 - \pi/2M\right) \rightarrow$$

$$4MR[\cos\left(\pi/2\right)\cos(\pi/2M) + sen\left(\pi/2\right)sen(\pi/2M)] \rightarrow 4MR\pi/2M = 2\pi R$$

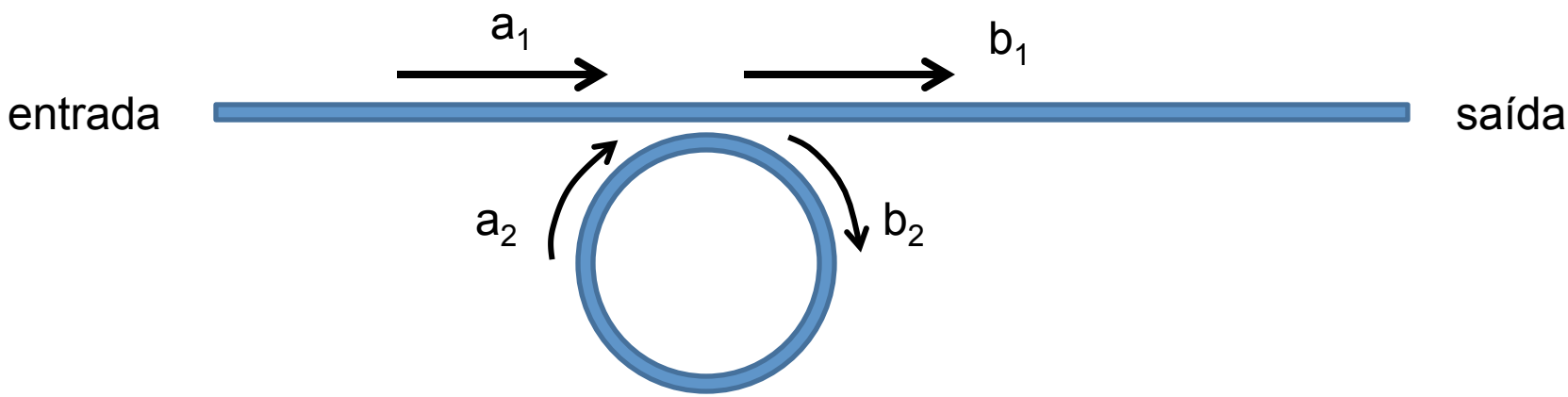
Problema Geral

- Deve-se resolver as equações de Maxwell por diferenças finitas no tempo e espaço;
- O cálculo de Q pode ser feito:
  - Forçando uma certa freqûencia ($e^{i\omega t}$) num ponto da cavidade e obtendo a potência saindo da cavidade num estado estacionário;
  - Colocando um pulso rápido (espectro aberto em frequência e acompanhando a evolução temporal nas diversas frequências na cavidade;
  - Criando-se fronteiras onde qualquer onda é absorvida sem qualquer reflexão. Ou seja, trazemos o infinito para esta fronteira e resolvemos as eq. De Maxwell. A integral do vetor de Poyinting em toda a fronteira da cavidade numa certa frequência nos dá a perda de energia. Mais diretamente, obtemos soluções com frequências complexas que em si provêm o Q da cavidades.



- No caso do disco, transformação conforme transforme o problema num slab waveguide com perfil de índice de refração não uniforme. (N. C. Frateschi, A. F. J. Levi)

Acoplamento guia cavidade anel



- Suponha que colocamos um pulso na entrada do guia de onda com amplitude a_1.
- Ao propagar, parte da onda (fator k) acopla no anel e forma o pulso com amplitude b_2. Parte da onda (fator t) vai para a saída com amplitude b_1.
- O pulso no anel propaga e leva a um pulso a_2 que pode acoplar no guia com fator k_1 ou continuar no anel com um fator t_1.

Três regimes:

- O tamanho do pulso (τ_p) é menor que o tempo de uma volta (τ_{rt}) no anel: $\tau_p < \tau_{rt}$
  - No domínio do tempo veremos o pulso na saída e várias repetições em intervalos de τ_{rt}.
  - No domínio da frequência veremos um espectro com largura $\Delta\omega \sim 1/\tau_p$ inicialmente e o espectro se modifica persistindo as frequências de ressonância da cavidade anel;
- Caso intermediário: o pulso tem tamanho comparável ao tempo de volta: $\tau_p \sim \tau_{rt}$
  - A interação ocorre em somente parte do pulso;
  - Este caso é complexo e necessita um estudo caso a caso.
- O tamanho do pulso é muito maior que o da volta: $\tau_p >>> \tau_{rt}$
  - Caso estacionário. Este caso será estudado a seguir e implica que o pulso interage consigo mesmo completamente.
  - Este é útil para estudar o acoplamento.

Caso estacionário*

- Podemos escrever: $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & k \\ k_1 & t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- Se o sistema é conservativo: $|b_1|^2+|b_2|^2= |a_1|^2+|a_2|^2$; a energia que entra do lado esquerdo é igual à que sai do lado direito do acoplamento;
- Podemos escrever:

$$|b_1|^2 = b_1 b_1^* = |t|^2 |a_1|^2 + tk^* a_1 a_2^* + t^* k a_2 a_1^* + |k|^2 |a_2|^2;$$

$$|b_2|^2 = b_2 b_2^* = |t_1|^2 |a_2|^2 + t_1 k_1^* a_2 a_1^* + t_1^* k_1 a_1 a_2^* + |k_1|^2 |a_1|^2;$$

$$|b_1|^2 + |b_2|^2 = (|t|^2 + |k_1|^2)|a_1|^2 + (|t_1|^2 + |k|^2)|a_2|^2 + a_1 a_2^* (tk^* + t_1^* k_1) + a_2 a_1^* (t^* k + t_1 k_1^*)$$

- Isto implica em: $t = t_1^*; k_1 = -k^*; (|t|^2 + |k|^2) = (|t_1|^2 + |k_1|^2) = 1$
- Portanto: $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & k \\ -k^* & t^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

* A. Yariv *ELECTRONICS LETTERS* ***17th February2000 Vol. 36 No. 4***

- Se considerarmos que $|a_1|^2 = 1W$ (todas amplitudes são normalizadas com respeito a a_1);
- E que $a_2 = \alpha e^{i\theta} b_2$, ou seja ao propagar o anel há variação de fase θ ($\omega L/c$, L é o perímetro do anel) e da amplitude da onda α (meios passivos $0 < \alpha < 1$ e meios com ganho $\alpha > 1$) .
- E definirmos $t = |t| e^{i\phi_t}$, ou seja, a transmissão causa variação de fase ϕ_t e amplitude $|t|$.
- Podemos obter a_2 e b_1, amplitude no ressonador e amplitude transmitida.

$$|b_1|^2 = b_1 b_1^* = \frac{\alpha^2 + |t|^2 - 2\alpha|t|\cos(\theta + \phi_t)}{1 + \alpha^2|t|^2 - 2\alpha|t|\cos(\theta + \phi_t)};$$

$$|a_2|^2 = a_2 a_2^* = \frac{\alpha^2(1 - |t|)^2}{1 + \alpha^2|t|^2 - 2\alpha|t|\cos(\theta + \phi_t)};$$

- É interessante o caso em que $\theta+\phi_t=m2\pi$.
- Neste caso as expressões se reduzem a:

$$|b_1|^2 = b_1 b_1^* = \frac{(\alpha - |t|)^2}{(1-\alpha|t|)^2};$$

$$|a_2|^2 = a_2 a_2^* = \frac{\alpha^2(1-|t|^2)}{(1-\alpha|t|)^2};$$

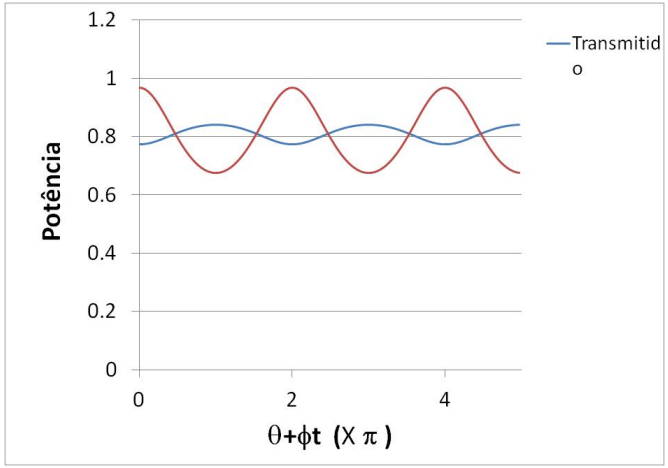
- Notem que quando $\alpha = |t|$ não haverá transmissão e toda a energia se concentrará no anel. Também vemos que :

$$|a_2|^2 = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2};$$

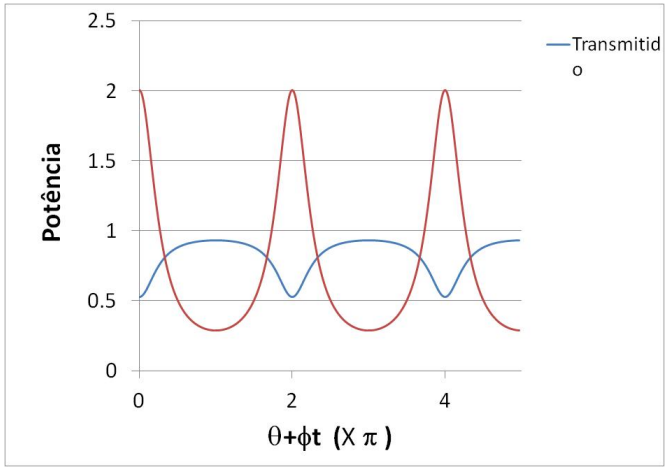
- Para $\alpha=1$ (nenhuma perda no anel) a energia em cada modo diverge.

Característica espectral

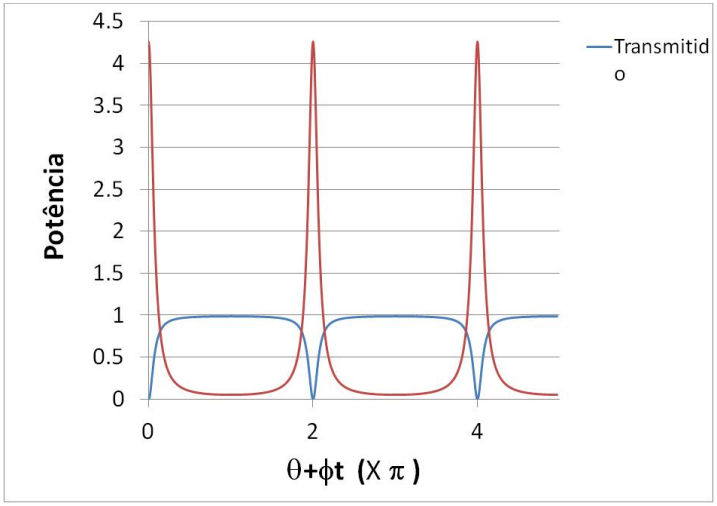
- Acoplamento crítico ou não:



α =0 .9 e t = 0.1

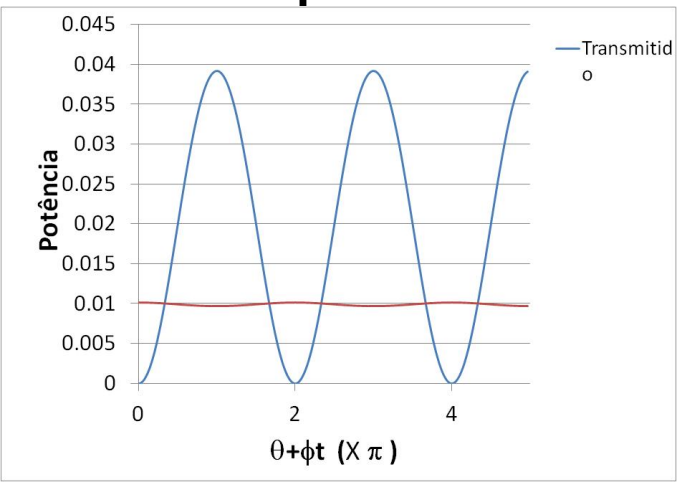


α =0 .9 e t = 0.5

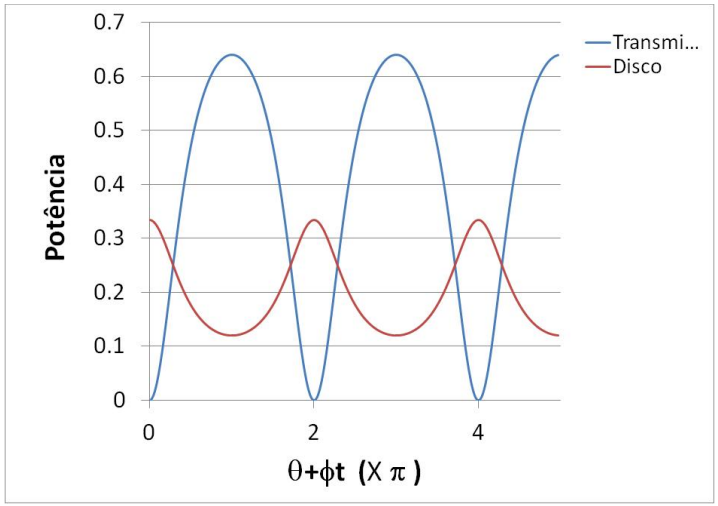


α =0 .9 e t = 0.9

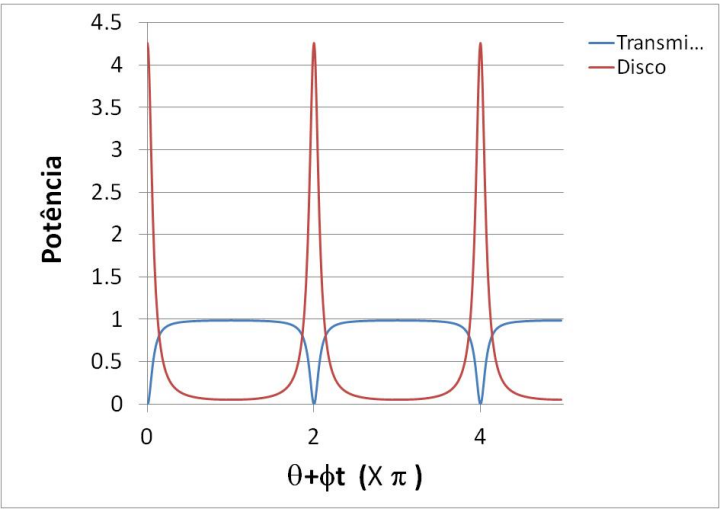
- Dependência com a perda e transmissão no acoplamento crítico:



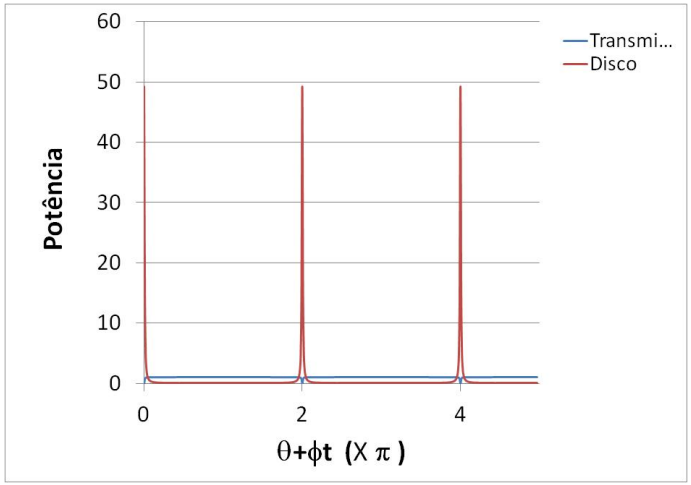
$\alpha = t = 0.1$



$\alpha = t = 0.5$

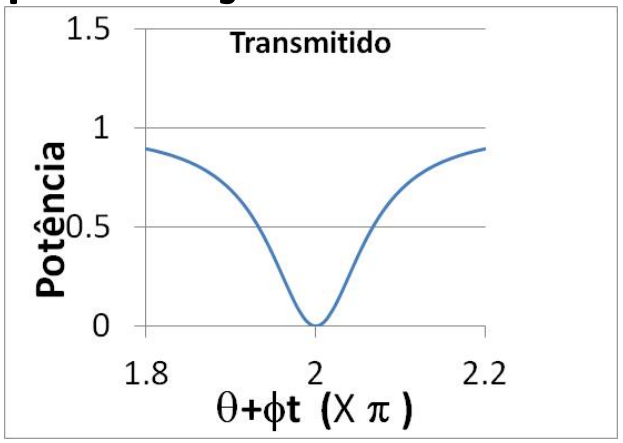


$\alpha = t = 0.9$

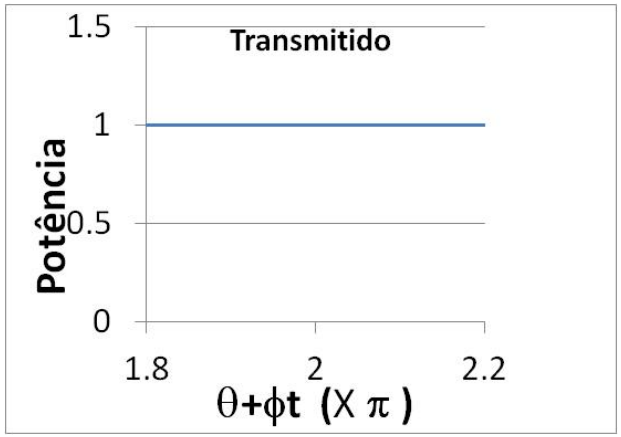


$\alpha = t = 0.99$

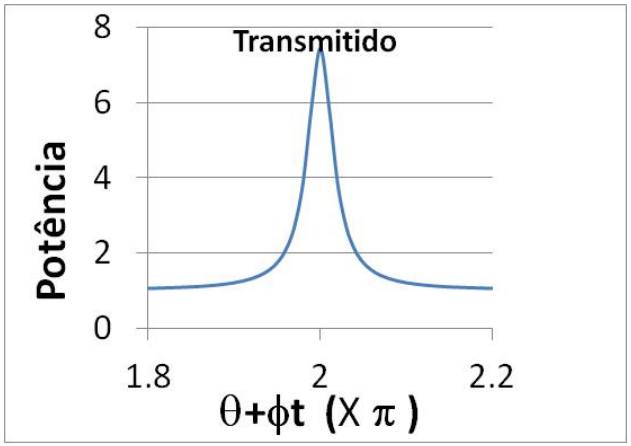
- Amplificação no disco ($\alpha > 1$, $\alpha|t|<1$)



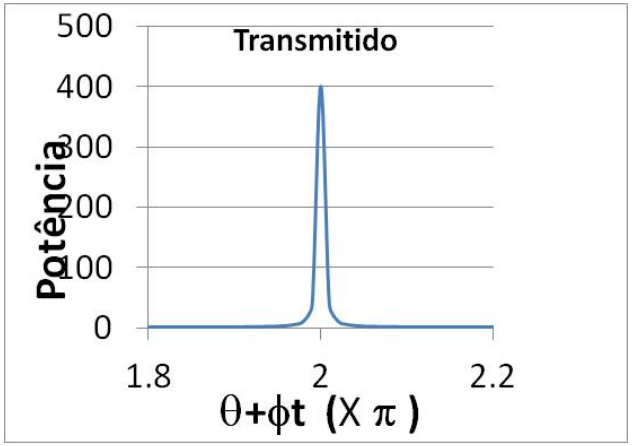
$\alpha = t = 0.9$



$\alpha = 1$ $t = 0.9$



$\alpha = 1.05$ $t = 0.9$

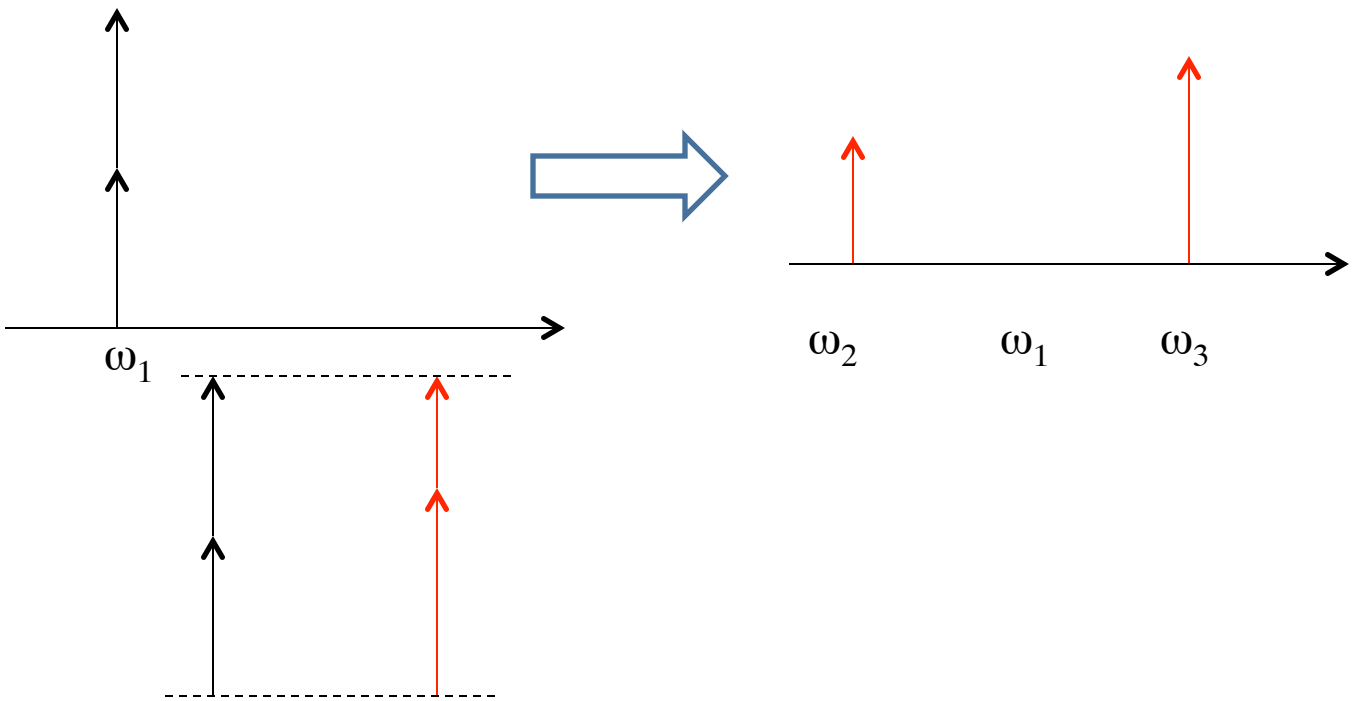


$\alpha = 1.1$ e $t = 0.9$

Com a amplificação no anel, podemos gerar ressonâncias transmitidas tão estreitas quanto queiramos fazendo $\alpha|t| \rightarrow 1$

Geração de pentes de frequência

- Mistura de 4 ondas: dois fótons numa freqüência ω_1 e vetor de onda $\mathbf{k_1}$ podem gerar dois fótons nas freqüências ω_2 e ω_3 desde que se conserve energia e momento: $2\,\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ e $2\,\mathbf{k_1} = \mathbf{k_3} + \mathbf{k_2}$

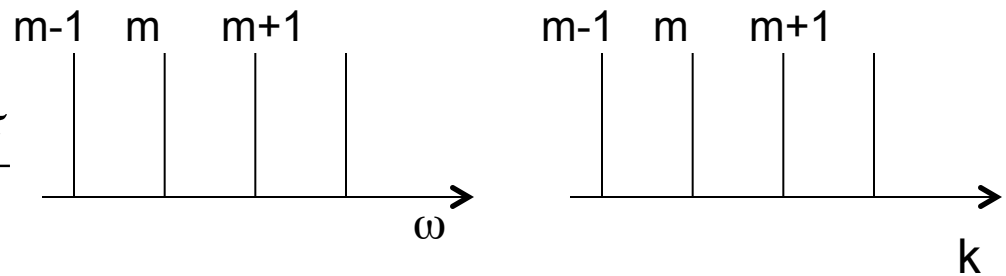


- Efeito não linear depende de $X^{(3)}$ e alta intensidade do campo eletromagnético (ou alta densidade fotônica);
- Cavidades pequenas com alto fator de qualidade Q fazem aumentar a intensidade do campo por concentrar os fótons espacialmente e mantê-los confinados por mais tempo.
- Numa cavidade anel com índice de refração n, para modos com λ << perímetro, temos que os modos ressonantes são:

$$\omega_m = m\frac{c2\pi}{nL} \Rightarrow k_m = m\frac{2\pi}{L} \Rightarrow \lambda_m^{vác} = \frac{L}{m} \Rightarrow \lambda_m^{mat} = \frac{L}{nm}; m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- Portanto os modos são igulamente espaçados em frequência e k (energia e momento).

$$\Delta\omega = \frac{c2\pi}{nL}$$



- No entanto, o índice de refração é função da frequência n(ω) devido à:
  - dispersão no material;
  - dispersão devido o confinamento eletromagnético;
- A dispersão no material em geral é tal que n aumenta com a frequência (diminui com o comprimento de onda) dispersão normal.
- A dispersão do guia é diferente. Lembremos que ao resolver o guia obtemos ω(k) ou k(ω)= ck/n(ω);
  - No espaço aberto esta relação só varia devido à variação do índice;
  - No caso confinado, cada confinamento leva a uma função k(ω) que perto de uma frequência central ainda vale:

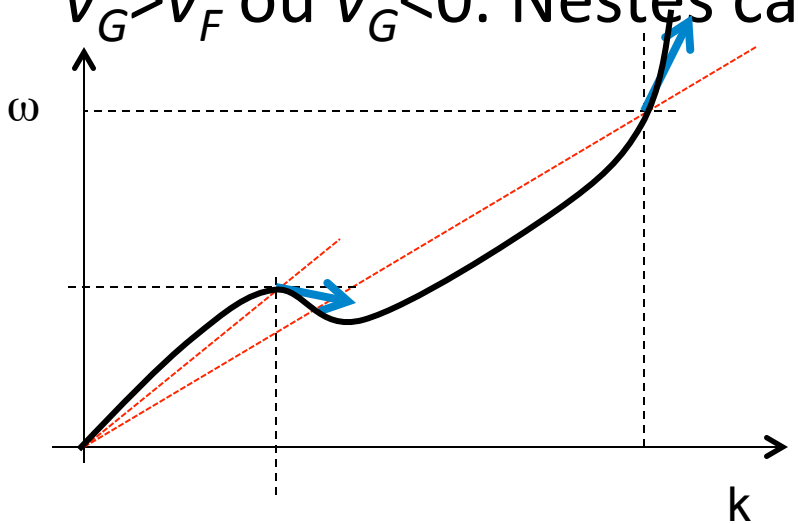
$$k(\omega)\,|_{\omega_0} = n(\omega_0)\frac{\omega}{c}$$

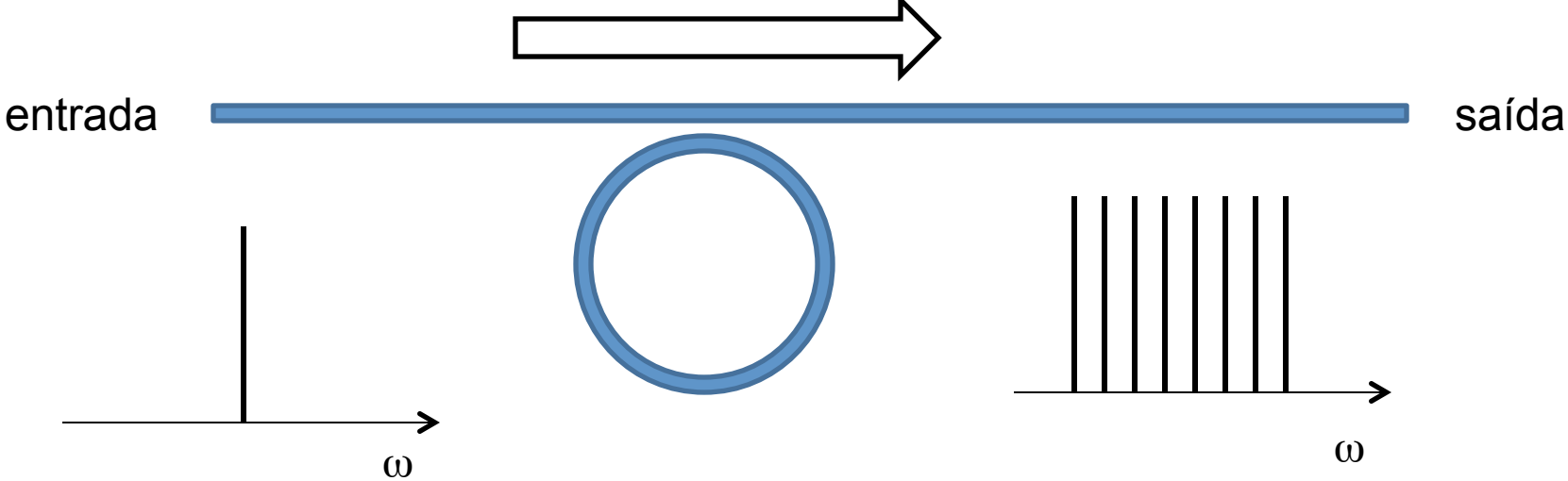
- Expandindo em torno de uma certa frequencia:

$$\frac{dk(\omega)}{d\omega} = \frac{dn(\omega)}{d\omega}\frac{\omega}{c} + \frac{n(\omega)}{c}; \frac{dk(\omega)}{d\omega} \equiv 1/v_G;$$

$$\Rightarrow \frac{dn(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{c}{v_G} - n\right) = \frac{n}{\omega}\left(\frac{c/n}{v_G} - 1\right) = \frac{n}{\omega}\left(\frac{v_F}{v_G} - 1\right)$$

- Agora, em geral a velocidade de fase local (em torno de ω_0 linha pontilhada em vermelho) é maior que a velocidade de grupo (derivada de ω com k em ω_0, flecha azul) dispersão normal; no entanto, pode ocorrer que $v_G > v_F$ ou $v_G < 0$. Nestes casos $dn/d\omega < 0$, dispersão anômala.





- Projetando-se o guia de onda corretamente, pode-se compensar a dispersão normal do material com a anômala do confinamento de tal forma que $dn/d\omega$ total é nulo e as condições de conservação de energia são satisfeitas para modos subsequentes : 2 fótons do modo m geram um fóton no modo m-1 e m+1. Isto ocorre sucessivamente.
- Portanto, injetando-se uma frequência de ressonância do anel, para a qual a dispersão foi suprimida obtemos diversos modos espaçados de $\Delta\omega = \frac{c2\pi}{nL}$ em toda a região de validade da dispersão nula.

Bandgap fotônico

- Consideremos a equação de onda no caso harmônico monocromático:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) - \omega^2 \varepsilon(\vec{r}) \mu \vec{E} = 0;$$

- Consideremos que a constante dielétrica do meio tenha uma periodicidade caracterizada por uma rede:

$$\vec{R} = m\vec{a}_1 + l\vec{a}_2 + p\vec{a}_3;$$

- Portanto, a constante dielétrica pode ser expressa como uma série de Fourier envolvendo os vetores da rede recíproca, G;

$$\varepsilon(\vec{r}) = \sum_G \varepsilon_{\vec{G}} e^{-i\vec{G}.\vec{r}};$$

- Expandindo-se o campo elétrico em termos do vetor de onda, temos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{k}\, \vec{A}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}.\vec{r}}$$

- Substituindo na equação as expressões para o campo e a constante dielétrica, temos:

$$\int d^3k\vec{k}\times[\vec{k}\times\vec{A}(\vec{k})]e^{\vec{k}i\vec{r}}-\omega^2\mu\sum_{\vec{G}}\int d^3k\varepsilon_{\vec{G}}\vec{A}(\vec{k})e^{(\vec{k}+\vec{G}).\vec{r}}=0;$$

$$\vec{k}+\vec{G}\equiv\vec{k}'\Rightarrow d^3k=d^3k'\Rightarrow$$

$$-\int d^3k\vec{k}\times[\vec{k}\times\vec{A}(\vec{k})]e^{\vec{k}i\vec{r}}-\omega^2\mu\sum_{\vec{G}}\int d^3k\varepsilon_{\vec{G}}\vec{A}(\vec{k}-\vec{G})e^{\vec{k}i\vec{r}}=0$$

$$\Rightarrow\boxed{\vec{k}\times[\vec{k}\times\vec{A}(\vec{k})]+\omega^2\mu\sum_{\vec{G}}\varepsilon_{\vec{G}}\vec{A}(\vec{k}-\vec{G})=0}$$

$$\nabla\times\vec{A}(\vec{k})e^{\vec{k}i\vec{r}}=i\vec{k}\times\vec{A}(\vec{k})e^{\vec{k}i\vec{r}}$$

- Para cada ***k*** (contínuo), temos infinitas equações acoplando os infinitos coeficientes ***A(k)*** com ***A(k-G);*** portanto, cada raiz do determinante secular nos leva a um possível grupo de ***A(k-G),*** com o campo dado por:

$$\vec{E}_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{G} \vec{A}(\vec{k}-\vec{G})e^{-i(\vec{k}-\vec{G}).\vec{r}};$$

$$\vec{E}_{\vec{k}}(\vec{r}+\vec{R}) = \sum_{G} \vec{A}(\vec{k}-\vec{G})e^{-i(\vec{k}-\vec{G}).(\vec{r}+\vec{R})} = e^{-i(\vec{k}.\vec{R})} \sum_{G} \vec{A}(\vec{k}-\vec{G})e^{-i(\vec{k}-\vec{G}).\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\vec{k}}(\vec{r}+\vec{R}) = e^{-i(\vec{k}.\vec{R})}\vec{E}_{\vec{k}}(\vec{r})$$

- Que são ondas de Bloch;
- Notem também que cada raiz do determinante nos leva a uma relação de dispersão ω***(k);*** Estas relações de dispersão formam as bandas, cuja a estrutura depende não só depende da periodicidade de ε, como da orientação de ***E*** e da direção de propagação ***k***;

- Em certos casos de periodicidade, para certas orientações do campo e de **k**, pode ocorrer que uma faixa contínua de ω não tenha soluções reais de **k**; nestas regiões, temos bandgap fotônico onde a propagação de ondas é proibida, levando à reflexão;
- Portanto, estruturas periódicas podem ser de extrema utilidade por prover:
  - Relações de dispersão que dependem da periodicidade da constante dielétrica e da orientação do campo e da direção de propagação e não somente de propriedades dos materiais;
  - Dependência com a orientação cria um novo universo de materiais bi-refringentes;
  - Bandgap fotônico pode levar à seleção de modos de acordo com a orientação do campo, alem de prover, reflexão e/ou guiamento da luz;

1 D

- Para exemplificar o bandgap fotônico; façamos o caso de periodicidade unidirecional (direção z com período Λ) e campos na direção transversal, para propagação na direção ***k***=*k**z e E//x***;
- Neste caso, a equação final da página 3, fica:

$$k^2 A(k) - \omega^2 \mu \sum_l \varepsilon_l A(k - l2\pi / \Lambda) = 0$$

- Consideremos o caso onde somente ε_0 e ε_1=ε_{-1} são não nulos; (Esta aproximação é exata se a constante dielétrica tiver um comportamento puramente senoidal)
- Neste caso:

- Temos:

$$(k^2 - \omega^2 \mu\varepsilon_0)A(k) - \omega^2 \mu\varepsilon_1[A(k - 2\pi/\Lambda) + A(k + 2\pi/\Lambda)] = 0;$$

$$[(k - 2\pi/\Lambda)^2 - \omega^2 \mu\varepsilon_0]A(k - 2\pi/\Lambda) - \omega^2 \mu\varepsilon_1[(A(k) + A(k - 4\pi/\Lambda)] = 0;$$

$$[(k + 2\pi/\Lambda)^2 - \omega^2 \mu\varepsilon_0]A(k + 2\pi/\Lambda) - \omega^2 \mu\varepsilon_1[(A(k) + A(k + 4\pi/\Lambda)] = 0;$$

- Desprezando-se o termo em segunda ordem $\varepsilon_1 A(k \pm 4\pi/\Lambda)$; temos:

$$\begin{bmatrix} (k^2 - \omega^2 \mu\varepsilon_0) & -\omega^2 \mu\varepsilon_1 & -\omega^2 \mu\varepsilon_1 \\ -\omega^2 \mu\varepsilon_1 & [(k - 2\pi/\Lambda)^2 - \omega^2 \mu\varepsilon_0] & 0 \\ -\omega^2 \mu\varepsilon_1 & 0 & [(k + 2\pi/\Lambda)^2 - \omega^2 \mu\varepsilon_0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$a \equiv A(k); b \equiv A(k - 2\pi/\Lambda); c \equiv A(k + 2\pi/\Lambda)$$

- Temos solução não trivial se:

$$(k^2-\omega^2\mu\varepsilon_0)[(k-2\pi/\Lambda)^2-\omega^2\mu\varepsilon_0][(k+2\pi/\Lambda)^2-\omega^2\mu\varepsilon_0]$$
$$-(\omega^2\mu\varepsilon_1)^2\{[(k-2\pi/\Lambda)^2-\omega^2\mu\varepsilon_0]+[(k+2\pi/\Lambda)^2-\omega^2\mu\varepsilon_0]\}=0$$

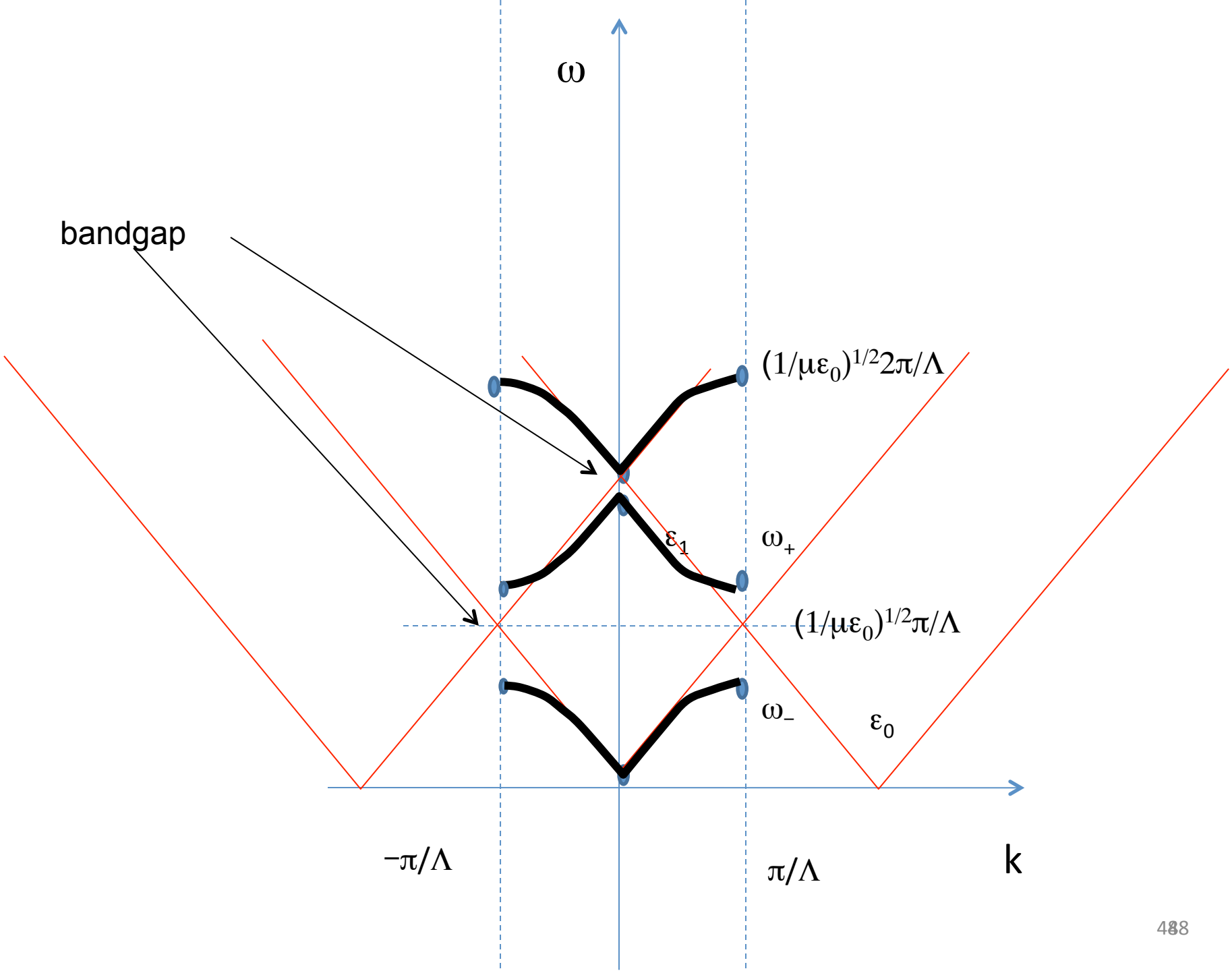
- Para k=0, temos soluções:

$$\omega_1^2=0;\omega_2^2=\frac{(2\pi/\Lambda)^2}{\mu\varepsilon_0};\omega_3^2=\frac{(2\pi/\Lambda)^2}{(\mu\varepsilon_0+\frac{2\mu\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0})}$$

- Para k=±π/Λ, temos as soluções aproximadas:

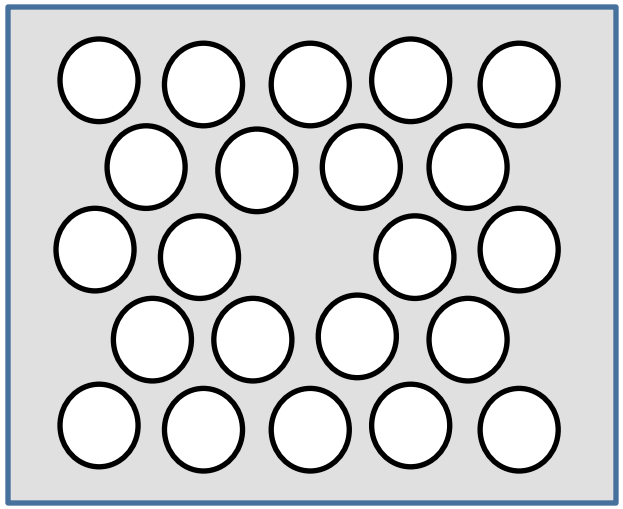
$$\omega^2=\frac{(3\pi/\Lambda)^2}{\mu\varepsilon_0};\omega_-^2=\frac{(\pi/\Lambda)^2}{\mu\varepsilon_0(1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0})};\omega_+^2=\frac{(\pi/\Lambda)^2}{\mu\varepsilon_0(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0})}$$

- Um gap principal se dá entre ω_+ e ω_-;também entre ω_2 e ω_3; sendo tanto maiores quanto maior ε_1.

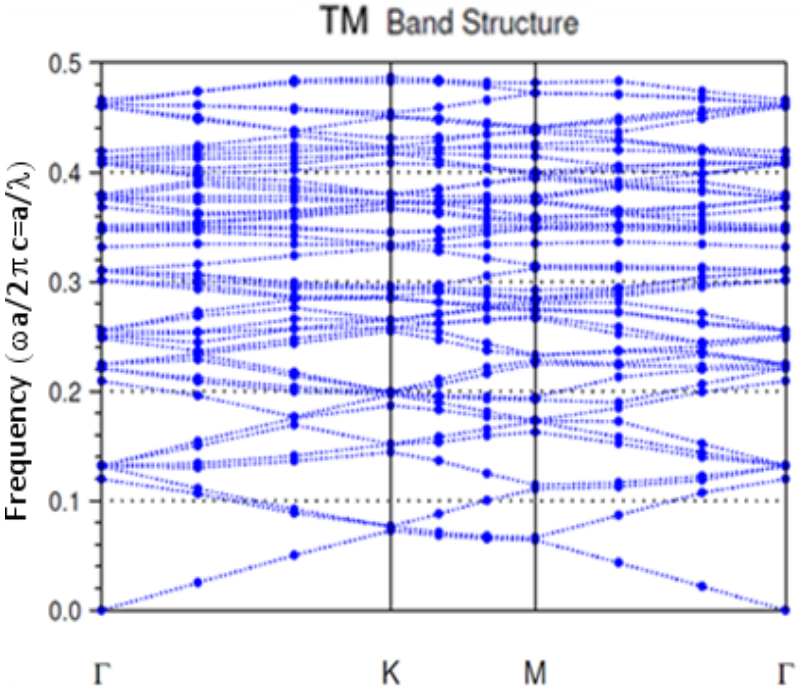

ω
bandgap
$(1/\mu\varepsilon_0)^{1/2}2\pi/\Lambda$
ε_1
ω_+
$(1/\mu\varepsilon_0)^{1/2}\pi/\Lambda$
ω_-
ε_0
$-\pi/\Lambda$
π/Λ
k

Cavidades Ressonantes com PBG

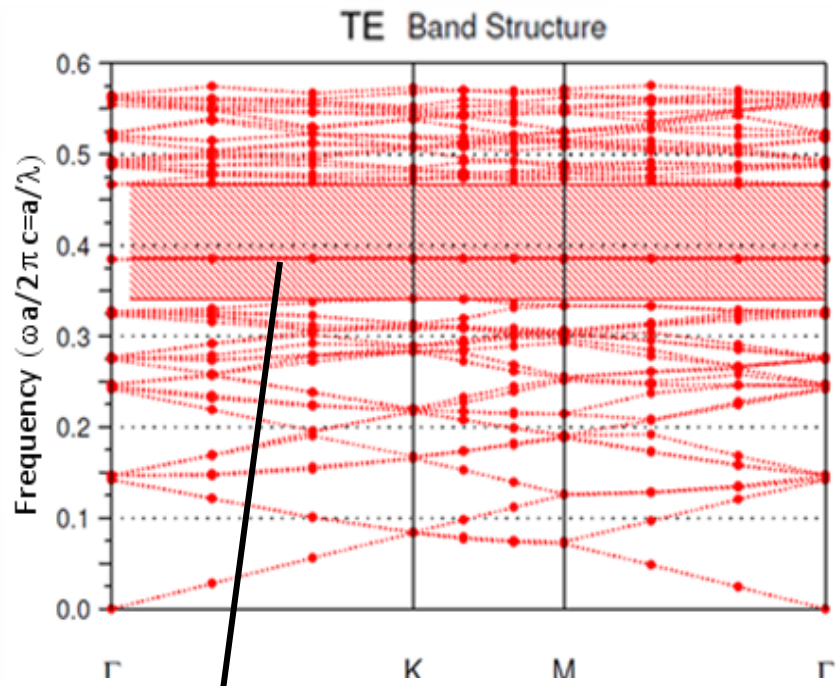
- Se criarmos um defeito na rede cristalina fotônica, pode-se obter um armadilha fotônica onde se confina os fótons. Uma frequência no meio do gap só pode existir no defeito.
- O bandgap fotônico pode existir para uma polarização e não para outra.
- Exemplo: rede hexagonal 2 D com defeito (H1)

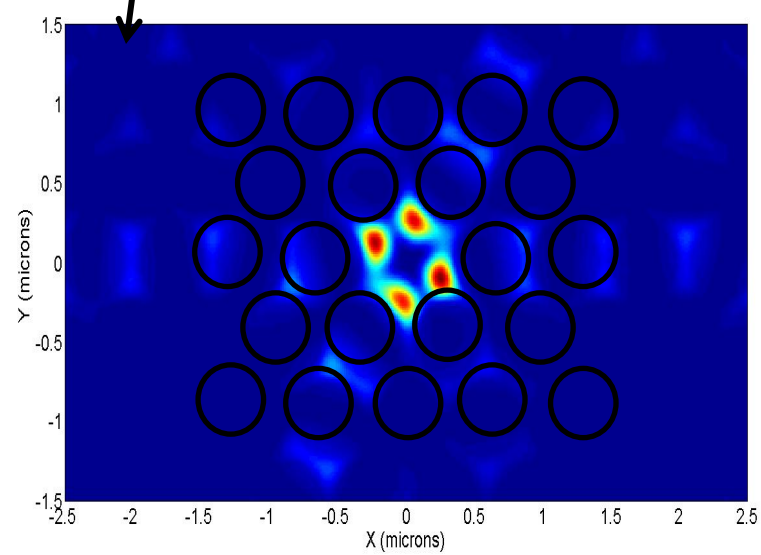


Estrutura de banda



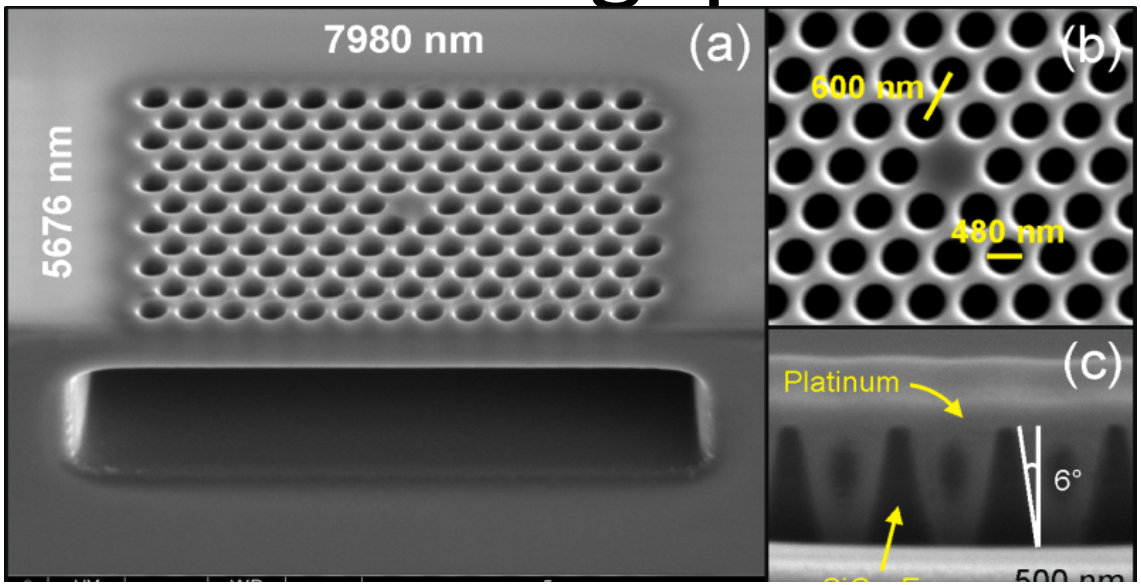
(a)



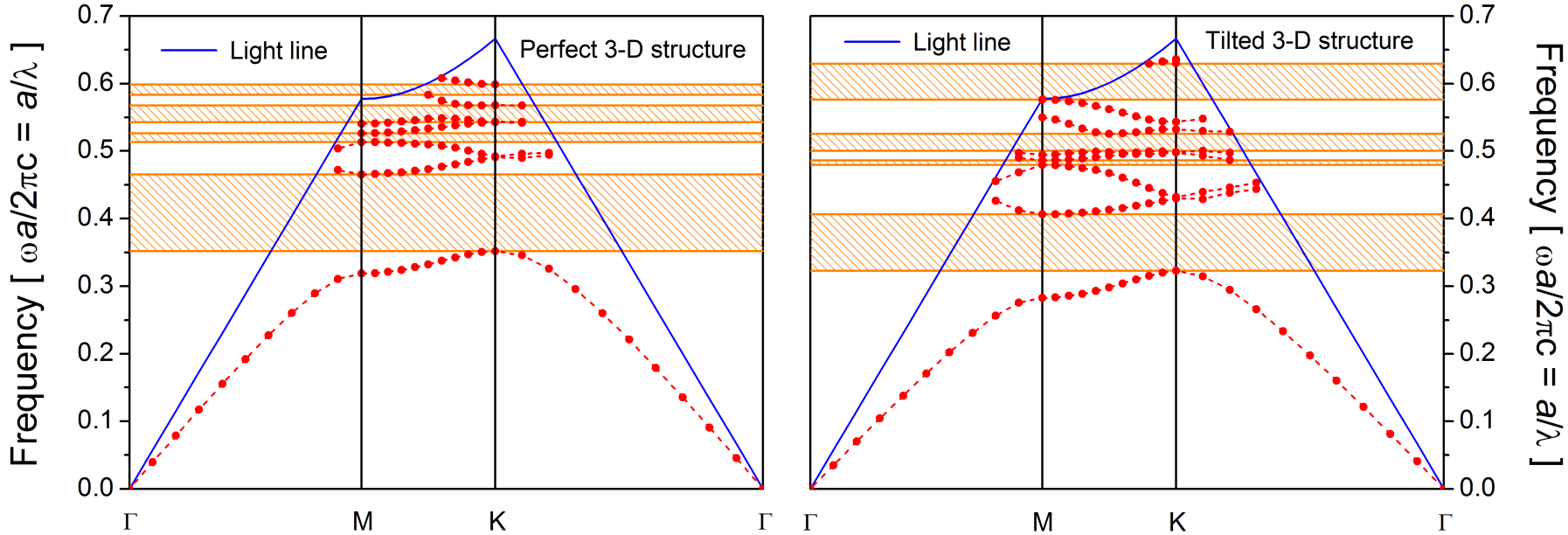


- Modo armadilhado $|Hy|^2$

Photonic bandgap membranes

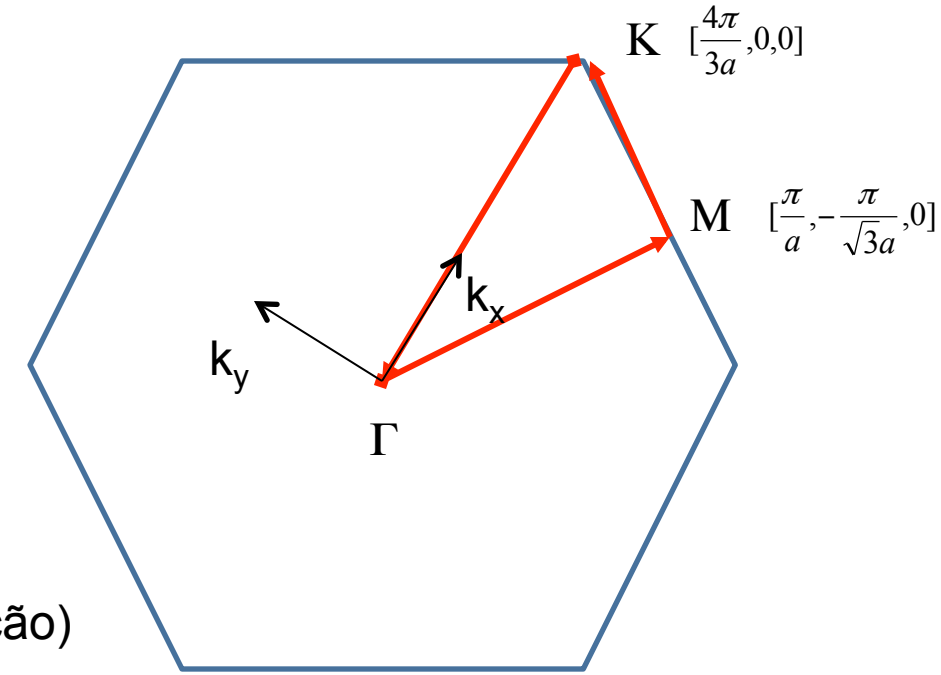


(a) Cylindrical Holes (b) Conical Holes



D. Figueira, et al Optics Express. , v.20, p.18772 - 18783, 2012.

- Bandgap Fotônico planar kz ≈0



Limites (Linha azul):
(ξ é um segmento numa dada direção)

$$\omega = (c/n)\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}; k_z = 0 \Rightarrow \omega = (c/n)\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

$$\Gamma \rightarrow M; k_x = \xi\cos(30); k_y = -\xi\sin(30); \omega = (c/n)\xi$$

$$M \rightarrow \mathrm{K}; k_x = \xi\sin(30) + \frac{\pi}{a}; k_y = \xi\cos(30) - \frac{\pi}{\sqrt{3}a}; \omega = (c/n)\sqrt{\xi^2 + \frac{4\pi^2}{a^2}}$$

$$\mathrm{K} \rightarrow \Gamma; k_y = 0; k_y = \xi; \omega = -(c/n)\xi$$

Optomecânica (Breve introdução)

- Consideremos que temos um número N de fótons com frequência ressonante ω_n numa cavidade ressonante;Portanto, a energia na cavidade é $E = N\hbar\omega_n$
- Se fizermos um trabalho deformando a cavidade com um valor $d\xi$, tal que a ressonância mude, os fótons mudam de frequência e a energia fica:

$$dE = N\hbar d\omega_n = N\hbar \frac{d\omega_n}{d\xi} d\xi \equiv N\hbar g_n d\xi$$

- O trabalho e a força são:

$$dW = F_{ap} d\xi = dE = N\hbar g_n;$$

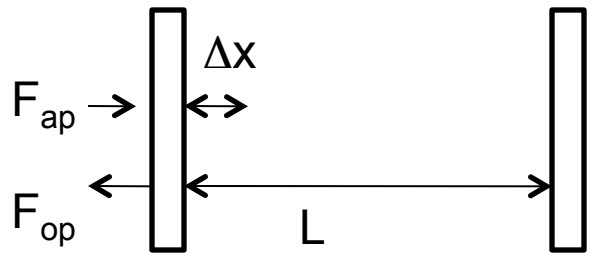
$$F_{op} / foton = -F_{ap} / foton = -\hbar \frac{d\omega_n}{d\xi} = -\hbar g_n$$

Cavidade Fabry-Perot

- Uma dimensão e comprimento L; As ressonâncias são:

$$\omega_m = \frac{m\pi c}{L} = \frac{2m\pi}{\tau_{rt}};$$

- Se quisermos calcular a força como vimos atrás, teríamos:

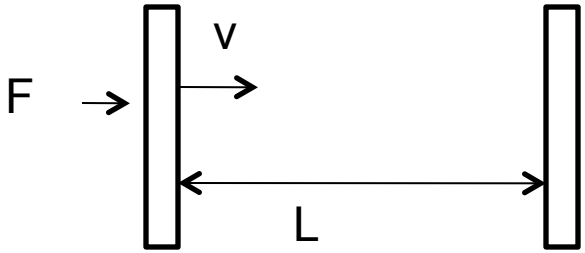


$$dx = -dL$$

$$F_{op} / foton = \hbar \frac{d\omega_n}{dx} = -\frac{d\omega_n}{dL} = \frac{\hbar m\pi c}{L^2};$$

Mais fisicamente:

- Considere uma cavidade Fabry-Perot em que um dos espelhos é movido com velocidade uniforme v;
- Considerando o espelho perfeito, cada fóton que bate transfere um momento de $\Delta p = 2E/c$;
- O espelho se movendo com velocidade uniforme tem $\Delta L = v\,\Delta t$;
- O número de vezes que cada fóton bate no espelho num certo intervalo Δt, é $\Delta t/\tau_{rt}$;(rt:round trip)



- Obtemos a força então:

$$\Delta p = F\Delta t = -\frac{2E}{c}\frac{\Delta t}{\tau_{rt}} = -\frac{2E}{c}\frac{\Delta L / v}{\tau_{rt}} \Rightarrow$$

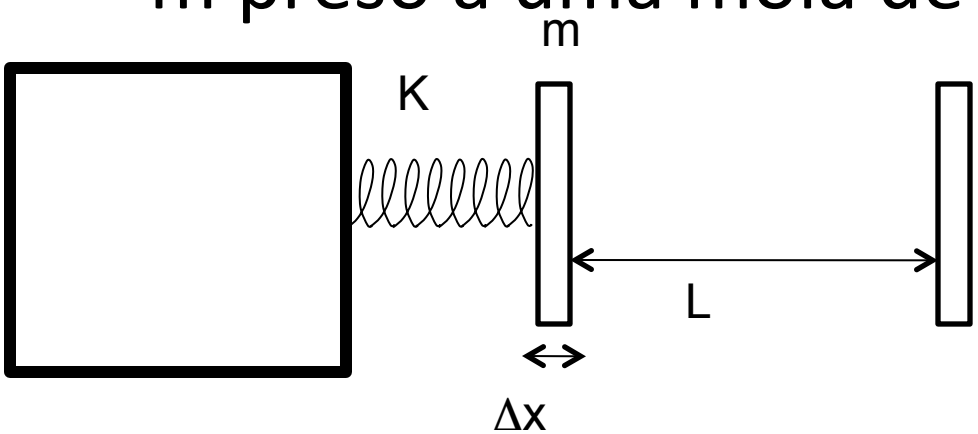
$$F\Delta t v = F\Delta L = -\frac{2E}{c}\frac{\Delta L}{\tau_{rt}} \Rightarrow F = -\frac{2E}{c}\frac{1}{\tau_{rt}}$$

$$F = -\frac{2\hbar\omega_m}{c}\frac{1}{\tau_{rt}} = -\frac{2\hbar m\pi c / L}{c}\frac{c}{2L} \Rightarrow F = -\frac{\hbar m\pi c}{L^2}$$

- O sinal negativo é porque vai no sentido –x.

Acoplamento

- Cavidade Fabry-Perot e um espelho de massa m preso a uma mola de constante K;



- Notem que os sistemas se acoplam pois $\Delta x = F/K = F/(m\omega_0^2)$(ω_0 é a ressonância mecânica) e F é a força aplicada à cavidade e estará relacionada com mudança de frequência da mesma e com a força óptica.(Ainda consideramos a mola clássica)

Modulação (ver artigo de ziper laser - Thiago Alegre et al. e anéis acoplados Gustavo Wiederhecker)

- Considere dois modos da cavidade ω_m e ω_s. Se aumentarmos o número de fótons em ω_m o que ocorre em ω_s?
- O aumento de fótons ΔN em ω_m causa uma força óptica dada por:

$$F_{op} = \hbar \frac{d\omega_m}{dx} \Delta N = \hbar g_m \Delta N$$

- Esta força causa uma variação em x de: $\Delta x = \frac{F_{op}}{K} = \frac{\hbar g_m \Delta N}{K}$
- Esta variação causa uma mudança em ω_s dada por:

$$\Delta\omega_s = \frac{d\omega_s}{dx} \Delta x = g_s \Delta x = \frac{\hbar g_s g_m \Delta N}{K}$$

- Se ΔN é causado por uma potência P_m, temos que:

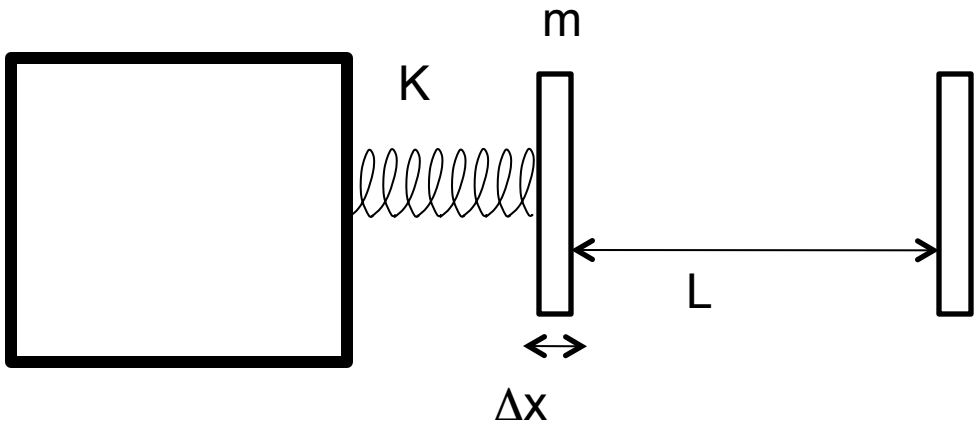
$$\Delta N = \frac{P_m}{\hbar\omega_m}\tau_{Pm} = \frac{P_m}{\hbar\omega_m}\frac{Q_m}{\omega_m}$$

$$\Delta\omega_s = \frac{\hbar g_s g_m \frac{P_m}{\hbar\omega_m}\frac{Q_m}{\omega_m}}{K} = \frac{g_s g_m P_m Q_m}{K\omega_m^2}$$

- Ou seja, ao injetarmos luz em uma ressonância, podemos variar uma outra ressonância;
- Este efeito será tanto maior quanto maior for Q_m e menor K;

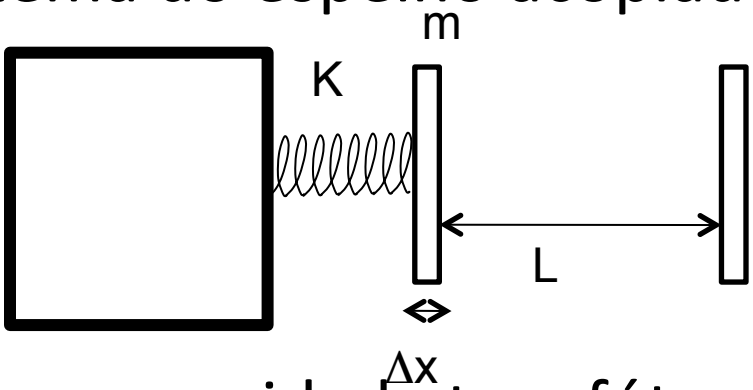
Sistemas mecânicos no estado fundamental

- É interessante pensar na interação do oscilador mecânico (agora quântico) com energias $E_n=(n+1/2)h\omega_0/2\pi$;
- É possível usar a interação com o oscilador e resfriá-lo ao estado fundamental, N=0;

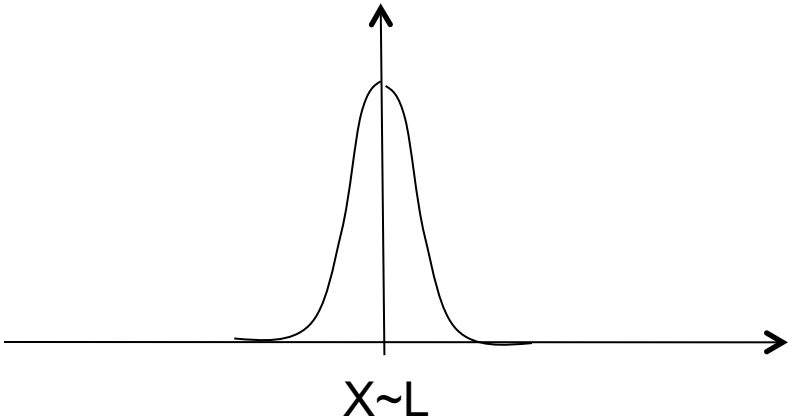


Sistemas mecânicos no estado fundamental(visão clássica)

- Votemos ao sistema do espelho acoplado a um oscilador.



- Consideremos que a cavidade tem fótons num modo ω_M.que ocorre para o L médio da oscilação; a força óptica conforme definimos é esboçada abaixo em função de x.

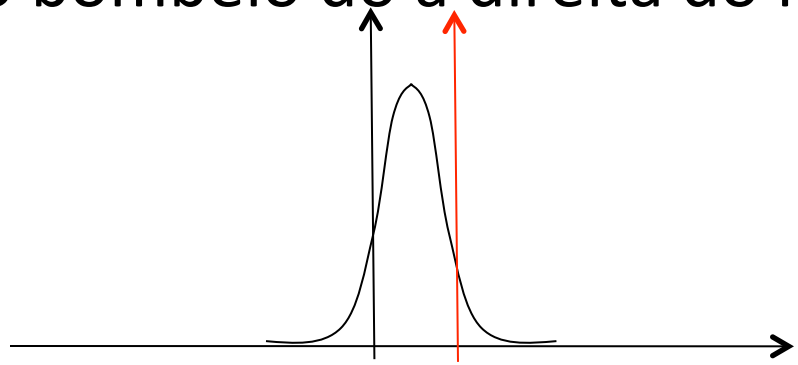


- A força definida como

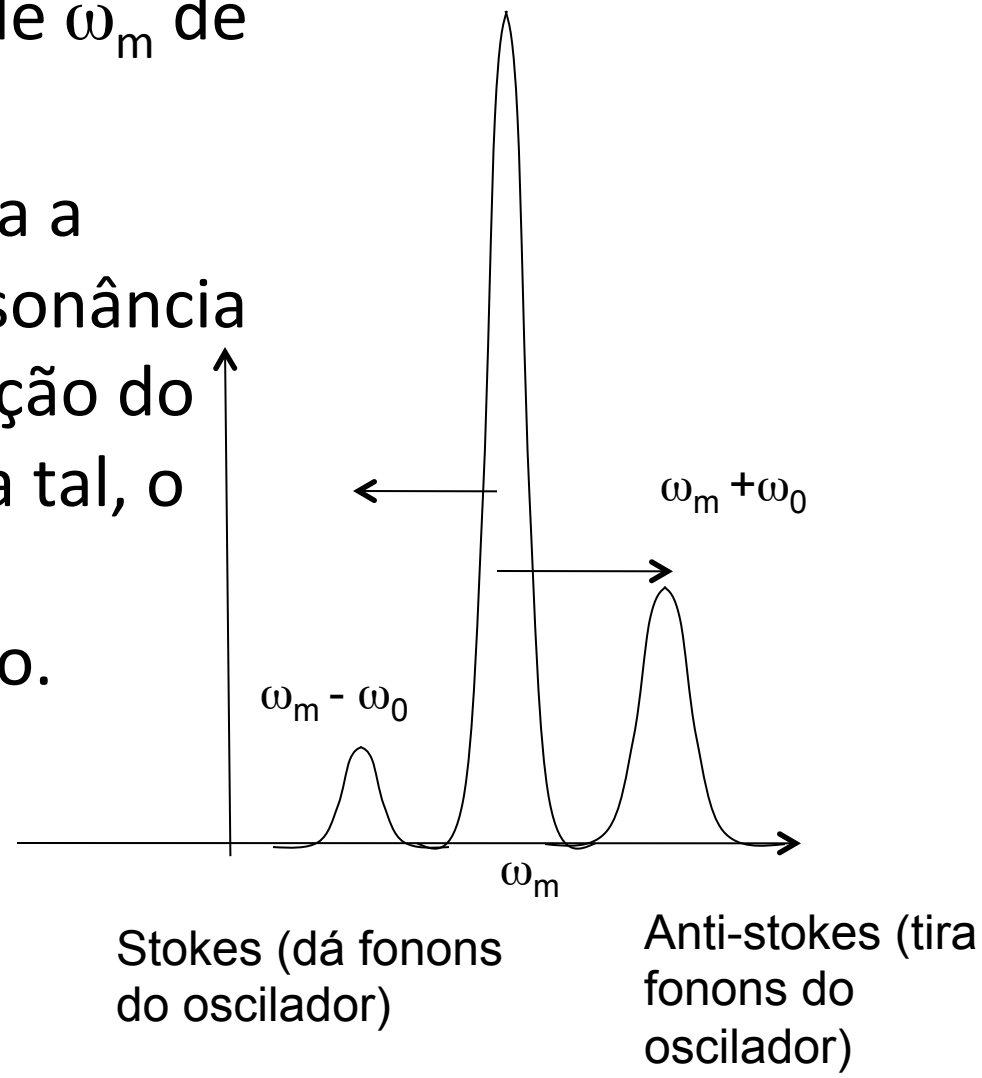
$$F_{op} / foton = \hbar \frac{d\omega_m}{dx}\bigg|_{\omega_m} = \hbar g_m$$

- é resultado do momento transferido pelos fótons acumulado em sua circulação na cavidade; Portanto, existe um “atraso”para que ela ocorra.
- Também, a quantidade de fótons batendo no espelho por unidade de tempo depende de τ_{rt};
- Portanto, ao diminuirmos a cavidade (aumento de x), diminui o τ_{rt} e a quantidade de fótons que batem no espelho por unidade de tempo aumenta. No caso contrário diminui. Portanto, existe uma assimetria que resulta numa força maior para se opor à oscilação para a direita e uma força menor para aumentar a amplitude no movimento à esquerda. Ou seja, os fótons freiam o oscilador.

- Se forçarmos a assimetria, bombeando fótons ligeiramente de-sintonizados com a cavidade tal que o oscilador ao mover-se em x traz L à ressonância, a força de amortecimento é maior. Ou seja, pode-se diminuir mais a amplitude da oscilação. Num limite reduzimos o número quântico relacionado à oscilação e a energia decresce com $E_n=(n+1/2)h\omega_0/2\pi$, tendendo ao estado fundamental $h\omega_0/4\pi$;
- O contrário (amplificação da oscilação mecânica) pode ser feito colocando-se o bombeio do à direita do máximo de gm. (seta vermelha)



- De fato, o oscilador impõe dois picos satélites em torno de ω_m de ω_0.
- Ou seja, o espelho modula a ressonância óptica. A ressonância óptica pode retirar excitação do oscilador harmônica. Para tal, o satélite Stokes deve ser completamente suprimido.



Análise (+/-) Quântica

- Consideremos o sistema de fônons ω_m (oscilações mecânicas) e oscilações eletromagnéticas ω_p.
- Se a oscilação muda a frequência da cavidade, os sistemas estão acoplados:

$$E = n_{op}\hbar\omega_{op}(x) + n_{pho}\hbar\omega_m ; \omega_{op}(x) \approx \omega_{0,op} + g_{om}x \Rightarrow$$

$$E = n_{op}\hbar\omega_{0,op} + n_{pho}\hbar\omega_m + \hbar g_{om} n_{op} x ; x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{eff}\omega_m}}\left(\hat{b} + \hat{b}^\dagger\right)$$

$$H = \hbar\omega_{0,op}\hat{a}^\dagger\hat{a} + n_{pho}\hbar\omega_{0,op}\hat{b}^\dagger\hat{b} + \boxed{\hbar g \hat{a}^\dagger\hat{a}\left(\hat{b} + \hat{b}^\dagger\right)} ; g \equiv g_{om}\sqrt{\frac{\hbar}{2m_{eff}\omega_m}}$$

- Existe uma troca entre criação/aniquilação de fônons e fótons em equilíbrio;
- Lembrando que o sistema, tanto de fótons como de fônons, é dissipativo, temos perdas de fótons para o vácuo e perdas de fônons com a excitação de osciladores do banho térmico.
- Há uma largura de linha relacionada aos processos;
- Injetando-se fótons com frequência ω_L:

$$+ i\hbar\sqrt{k_e}\, a_{in} e^{-iw_l t}(\hat{a} - \hat{a}^{\dagger}) + \ldots$$

- Estes acoplam melhor com os picos Stokes ou anti Stokes; num caso, tira energia dos fônons e coloca nos fótons (resfriamento); no outro, excita fônons tirando energia dos fótons (amplificação);

Resfria, perdendo fônons para acoplar na ressonância

Amplifica, excitando fônons para acoplar na ressonância