Comentários sobre momento de dipolo, torque e força.

(1) Na p. 106, do livro 1 mostramos que o momento de dipolo de uma casca esférica carregada com densidade superficial de carga $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ é

$$\vec{p} = \frac{4\pi\sigma_0}{3} R^3 \hat{z}$$

O potencial desta distribuição de cargas ~~deste dipolo~~ ~~(considerando~~ considerando somente o termo de dipolo é:

$$\varphi_{DIP}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{\cancel{4\pi}\sigma_0 R^3}{\cancel{4\pi}\epsilon_0 3} \frac{\hat{z}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

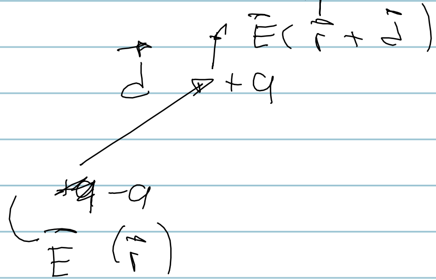
$$= \frac{\sigma_0 R^3}{3\epsilon_0} \frac{r\cos\theta}{r^3} = \frac{\sigma_0 R^3 \cos\theta}{3\epsilon_0 r^2}$$

Agora, da pág. 92 do livro Δ, podemos calcular exatamente o potencial da referida distribuição $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\sigma_0 R^3}{3\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}$$

Note que $\varphi(\vec{r}) = \varphi_{DIP}(\vec{r})$, portanto, esta distribuição de cargas é o dipolo perfeito

Força sobre dipolo



Se $\vec{d}$ é pequeno, chamemos de $d\vec{r}$

$$E_x(\vec{r}+d\vec{r}) = E_x(\vec{r}) + \vec{\nabla} E_x \cdot d\vec{r}$$

$$= E_x(\vec{r}) + d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} E_x$$

Da mesma forma $E_y(\vec{r}+d\vec{r}) = E_y(\vec{r}) + d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} E_y$

$E_z(\vec{r}+d\vec{r}) = E_z(\vec{r}) + d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} E_z$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}+d\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + d\vec{r} \cdot \left[(\vec{\nabla} E_x)\hat{x} + (\vec{\nabla} E_y)\hat{y} + (\vec{\nabla} E_z)\hat{z} \right]$$

Voltando a $d\vec{r} \equiv \vec{d}$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}+\vec{d}) - \vec{E}(\vec{r}) = (\vec{d} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}$$

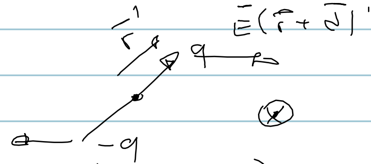
Agora $\vec{F} = q\left[\vec{E}(\vec{r}+\vec{d}) - \vec{E}(\vec{r})\right] =$

$$= q(\vec{d} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}}$$

Torque: Desprezando $(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}$

$$\vec{E}(\vec{r}+\vec{d}) \sim \vec{E}(\vec{r})$$



$$\vec{\tau} = q\,\vec{r}' \times \vec{E}(\vec{r}+\vec{d}) - q(-\vec{r}') \times \vec{E}(\vec{r})$$

$$\sim 2q\vec{r}'\,\vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

torque no sentido de girar no sentido horário alinhando o dipolo com o campo.