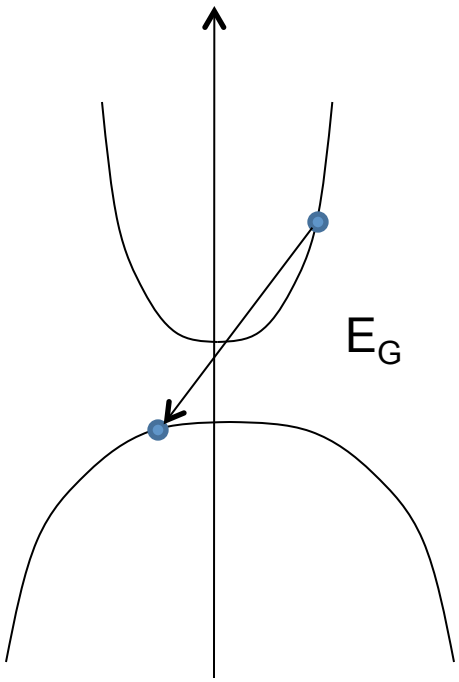
FI-227 Física da Optoeletrônica

Tópico 10 Ganho Óptico

Ganho e emissão estimulada

- Consideremos uma cavidade fechada com um semicondutor;
- Consideremos transições entre a banda de condução (E_c e $\mathbf{k}_c$)e uma banda de valência (E_v e $\mathbf{k}_v$);
- Consideremos os elétrons (lacunas) em quasi-equilíbrio com um quasi-nível de fermi E_{fc}(E_{fv});
- Consideremos no volume V, N(E) modos ressonantes (estados fotônicos) entre E e E+dE;



- A probabilidade de um elétron ocupar o nível E_c é:

$$f_2 = \frac{1}{e^{(E_c - E_{fc})/kT} + 1}$$

- A probabilidade de um elétron ocupar o nível E_v é:

$$f_1 = \frac{1}{e^{(E_v - E_{fv})/kT} + 1}$$

- A probabilidade de um fóton estar num dos estados fotônicos com energia *E* é:

$$P(E) = \frac{1}{e^{E/kT} - 1}$$

- Escrevamos a equação descrevendo elétrons em dois estados $E_c(\mathbf{k_c})$ e $E_v(\mathbf{k_v})$ mais os fótons na cavidade devido às transições entre os níveis E_c e E_v, , considerando emissão espontânea, absorção e emissão estimulada, temos entre os dois estados com população n_c e n_v):

$$\kappa_T = \left[B_{12} f_1 (1 - f_2)\rho(E_{21}) - B_{21} f_2 (1 - f_1)\rho(E_{21}) - A_{21} f_2 (1 - f_1)\right];$$

$$dn_c / dt = \kappa_T n_2; dn_v / dt = -\kappa_T n_2$$

$$\kappa_T = \kappa_{stim} + \kappa_{spon};$$

$$\kappa_{stim} = \left[B_{21} f_2 (1 - f_1) - B_{12} f_1 (1 - f_2)\right]\rho(E);$$

$$\kappa_{spon} = A_{21} f_2 (1 - f_1);$$

$$\rho(E_{21}) = N(E_{21}) P(E_{21}); E_{21} \equiv E_c - E_v$$

- A unidade de B é (E/s) e de A é (1/s)
- Em equilíbrio numa cavidade com N(E) :

  $\kappa_T = dn/dt = 0$ e $\Delta\mu = E_{fc} - E_{fv} = 0$

- $\kappa_{stim} = -\kappa_{spon}$

Portanto:

$$\frac{A_{21} f_2^{eq}(1-f_1^{eq})}{B_{21} f_2^{eq}(1-f_1^{eq}) - B_{12} f_1^{eq}(1-f_2)} = -\frac{N(E_{21})}{e^{E_{21}/kT}-1}$$

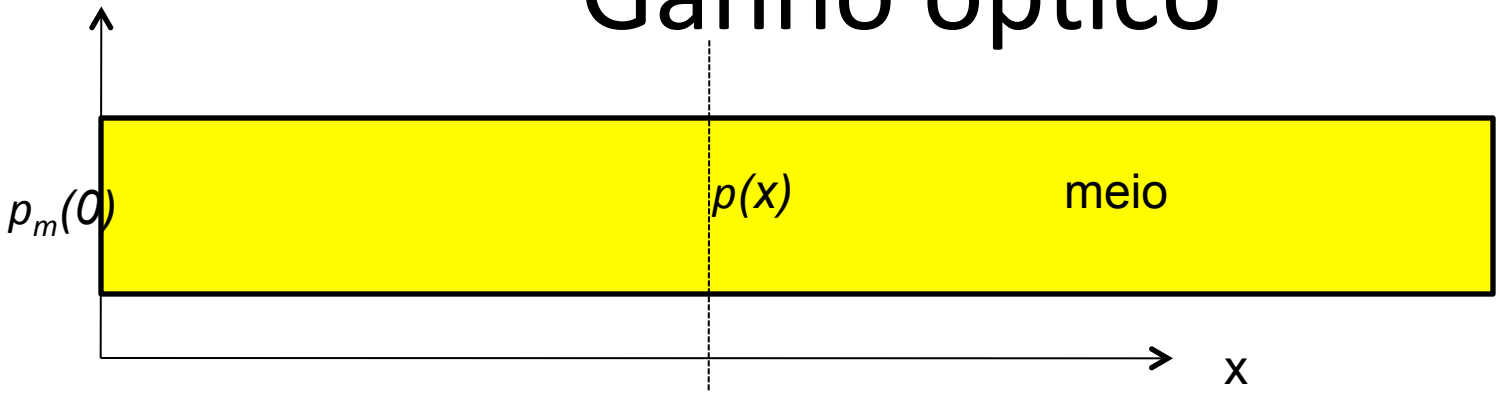
- Que pode ser resolvido se: $B_{12}=B_{21}=B$ e $A_{21}=N(E_{21})B$
- Voltando para o caso fora do equilíbrio, κ_{stim} e κ_{spon} ficam:

$$\kappa_{stim} = B(f_2 - f_1)\rho(E_{21});$$

$$\kappa_{spon} = A_{21} f_2(1-f_1) = BN(E) f_2(1-f_1);$$

- Onde os termos não são necessariamente iguais porque $\Delta\mu = E_{fc} - E_{fv} \neq 0$

Ganho óptico



- Consideremos que uma densidade de fótons (por unidade de volume) num certo modo de propagação m com energia E (largura de linha ΔE) chega em x=0 propagando na direção x num meio com κ_{stim} e κ_{spon}. Consideremos que f_1 e f_2 não dependam da posição nem do tempo;
- Onde β é a fração da emissão espontânea que ocorre no modo m

$$\frac{dp_m}{dx} = \frac{dp_m}{dt}\frac{dt}{dx} = (\beta\kappa_{spon} + \kappa_{stim})\frac{1}{v_G V} \Rightarrow$$

$$\frac{dp_m}{dx} = \frac{\beta A_{21} f_2 (1-f_1)}{v_G V} + \frac{B(f_2 - f_1)\rho_m}{v_G V} = \frac{\beta A_{21} f_2 (1-f_1)}{v_G V} + \frac{B(f_2 - f_1)}{v_G}\frac{p_m}{\Delta E}$$

$$p_m(x) = \left[\frac{\beta \Delta E A_{21} f_2 (1-f_1)}{VB(f_2 - f_1)} + p_m(0)\right] e^{\frac{(B/\Delta E)(f_2 - f_1)x}{v_G}} - \frac{\beta \Delta E A_{21} f_2 (1-f_1)}{VB(f_2 - f_1)}; \frac{B}{\Delta E} \equiv B'$$

- Portanto a a densidade fotônica $p_m(x)$ aumenta exponencialmente com um fator $g=B'(f_2-f_1)/v_g$;
- Este fator g, com unidade de (1/comprimento) chamamos de ganho;
  - quando $f_2>f_1$ ele leva a amplificação exponencial;
  - quando $f_2<f_1$ ele leva a absorção exponencial;
- Ou seja, f_2-f_1 nos dá o nível de inversão de população;
- Note que g depende de B também; de forma geral, g depende do nível de excitação e da energia E do fóton;

$$g(E,f_2,f_1)=\frac{B'(f_2-f_1)}{v_G}=\frac{\kappa_{stim}}{\rho(E)\Delta E v_G}=\frac{\kappa_{stim}}{p(E)Vv_G}$$

- Da página 5, temos que :

$$\kappa_{spon}(E, f_1, f_2) = A_{21} f_2 (1 - f_1) = BN(E) f_2 (1 - f_1) =$$

$$\kappa_{spon}(E, f_1, f_2) = \frac{B(f_2 - f_1) N(E) f_2 (1 - f_1) v_G}{v_G (f_2 - f_1)} =$$

$$g(E, f_1, f_2) \frac{N(E) \Delta E f_2 (1 - f_1) v_G}{(f_2 - f_1)} \Rightarrow g(E, f_1, f_2) = \frac{\kappa_{spon}(E)(f_2 - f_1)}{N(E) \Delta E f_2 (1 - f_1) v_G}$$

$$\frac{(f_2 - f_1)}{f_2 (1 - f_1)} = (1 - e^{(E - (E_{fc} - E_{fv}))/kT}) = (1 - e^{(E - \Delta\mu)/kT});$$

$$g(E, f_1, f_2) = \frac{\kappa_{spon}(E)(1 - e^{(E - \Delta\mu)/kT})}{N(E) \Delta E v_G} \equiv \frac{\gamma_{spon}(E)(1 - e^{(E - \Delta\mu)/kT})}{n(E) v_G};$$

$$\gamma_{spon} \equiv \frac{\kappa_{spon}}{V \Delta E}; n(E) \equiv \frac{N(E)}{V}$$

- Notemos que temos uma relação estreita entre a emissão espontânea e o ganho, relacionado com a estimulada:

$$g(E,\Delta\mu) = \frac{\kappa_{spon}(E)}{N(E)\Delta E v_G}\left[1 - e^{(E-\Delta\mu)/kT}\right]$$

- Lembrando que N(E)ΔE são todos os modos que estão na largura de linha ΔE, em geral estamos interessados em um único modo para a emissão estimulada.
- Também, notemos que podemos obter o ganho em função da tensão na junção (V_{ap}):
- Também g>0 para E< Δμ. g=0 (transparência) para E= Δμ e g<0 (absorção) para E> Δμ.

- Podemos obter g em função da tensão na junção (V) uma vez que esta é igual à diferença dos quase nível de Fermi:

$$g(E,V_{ap}) = \frac{\kappa_{spon}(E)}{N(E)\Delta E v_G}\left[1 - e^{(E-qV_{ap})/kT}\right]$$

- E, no caso de confinamento total (heterojunção) podemos expressaroganhoem função da corrente injetada: $e^{q\ Vap\ /kT}=(i\tau/q(Vol)n_i)^2$:

$$g(E,i) = \frac{\kappa_{spon}(E)}{N(E)\Delta E v_G}\left[1 - \left(\frac{q(Vol)n_i}{i\tau}\right)^2 e^{E/kT}\right]$$

- Quanto maior a corrente, menor o termo negativo.

- Na solução da página6, podemos escrever:

$$p_m(x) = \frac{\beta N(E)\Delta E}{(1-e^{(E-\Delta\mu)/kT})}\left(e^{g(E,\Delta\mu)x}-1\right)+p_m(0)e^{g(E,\Delta\mu)x}$$

- Em geral, β é pequeno.
- Se tivermos E< $\Delta\mu$ teremos amplificação da emissão espontânea no modo.
- Se tivermos E> $\Delta\mu$ teremos absorção da emissão.
- Devemos observar que existe uma taxa de emissão espontânea em outras energias que podem ser amplificadas no meio.
- Vemos também que mesmo com $p_m(0)=0$, podemos gerar amplificação da emissão espontânea neste modo ou em qualquer outro em que haja ganho.

O coeficiente B

- Para obtermos B, temos que saber a probabilidade que a transição entre os níveis ocorra.
- Imaginem um sistema da matéria, definido por um hamiltoniano H_0 , com auto-estados u_{0n} e energias E_{0n} perturbado pela presença de uma onda eletromagnética descrita por um campo ***E*** e um vetor potencial ***A***;
- A perturbação da onda é $W=-(q/m)\mathbf{p}.\mathbf{A}$;
- Seja o campo dado por $\vec{E} = \hat{e}E_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$;
- O fluxo de energia é $S=(1/2)E_0^2 \varepsilon\, c/n$; ($\varepsilon$ é a constante dielétrica ke_0)
- Para incorporar o comportamento corpuscular da luz, um fóton de frequência ω tem: $S=\hbar\omega c/nV$; (V é volume)
- Então a amplitude de uma onda que corresponde a um fóton é:

$$E_0 = \left(\frac{2\hbar\omega}{\varepsilon V}\right)^{1/2}$$

- Agora:

$$\vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \vec{A} = -\hat{e}\left(\frac{2\hbar}{\varepsilon\omega V}\right)^{1/2} sen(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \Rightarrow$$

$$W = \frac{q}{m}\left(\frac{2\hbar}{\varepsilon\omega V}\right)^{1/2} (\vec{p}.\hat{e}) sen(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \approx 2H' sen(\omega t);$$

$$H' \equiv \frac{q}{2m}\left(\frac{2\hbar}{\varepsilon\omega V}\right)^{1/2} (\vec{p}.\hat{e})$$

- Onde consideramos que o comprimento de onda do campo é muito maior que a região que a função de onda varia ***k.r***≈*0*)
- Temos que tratar a perturbação W=*2H'sen(ωt)*

- Considere o hamiltoniano $H=H_0+W$. Podemos expandir uma solução nos auto-estados u_{0n}:

$$\Psi(t) = \sum_n a_n(t) u_{0n} e^{-\frac{iE_{0n}t}{\hbar}}$$

- Agora:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = (H_0 + W)\Psi(t);$$

$$i\hbar \sum_n \dot{a}_n(t) u_{0n} e^{-\frac{iE_{0n}t}{\hbar}} + \cancel{\sum_n E_{0n} a_n(t) u_{0n} e^{-\frac{iE_{0n}t}{\hbar}}} =$$

$$\cancel{\sum_n E_{0n} a_n(t) u_{0n} e^{-\frac{iE_{0n}t}{\hbar}}} + \sum_n a_n(t) W u_{0n} e^{-\frac{iE_{0n}t}{\hbar}}$$

- Fazendo o produto interno com u_{0s}*:

$$i\hbar\dot{a}_s(t) = \sum_n a_n(t)\left(\int u_{0s}^* W u_{0s} d^3r\right)e^{i\omega_{sn}t};$$

$$\omega_{sn} \equiv \frac{i(E_{0s} - E_{0n})}{\hbar}$$

- Temos um sistema de n equações diferenciais acopladas para as n funções $a_n(t)$;
- Consideremos que $\Psi(t=0)= u_{0m}$. Consideremos no lado direito da eq. acima que $a_n(t)\approx a_m(0)=1\delta(m,n)$, *então:*

$$i\hbar a_s(t) = \int\left[\left(\int u_{0s}^* W u_{0m} d^3r\right)\right]e^{i\omega_{sn}t}dt;$$

$$a_s(t) = \frac{-i}{\hbar}\int_0^t \left[\left(\int u_{0s}^* 2H' u_{0m} d^3r\right)\right] sen(\omega t) e^{i\omega_{sn} t} dt;$$

$$a_s(t) = \frac{-i}{\hbar}\int_0^t H'_{sm}\left[e^{i(\omega_{sm}+\omega)t} - e^{i(\omega_{sm}-\omega)t}\right] dt$$

- Para t>>1/ω, somente restam termos onde o expoente de e é nulo (ou seja, consideraremos tempos longos do ponto de vista da da onda eletromagnética, mas curtos do ponto de vista da mudanca do estado):
  - Emissão (o estado *s* tem energia menor que *m*):
    - $\omega_{sm} < 0$ e restará o termo da esquerda;
  - Absorção: (o estado *s* tem energia maior que *m*):
    - $\omega_{sm} > 0$ e restará o termo da esquerda;
- Usemos o termo da esquerda. (Os dois devem dar o mesmo resultado)

- Emissão:

$$P(t) = \left|a_s(t)\right|^2 = 4\left|H'_{sn}\right|^2 \frac{sen^2\left[(E - E_{ms})t/2\hbar\right]}{(E - E_{ms})^2}; E_{ms} = -\hbar\omega_{sm}$$

$$P(t) = 4\left|H'_{sn}\right|^2 \frac{\pi t}{2\hbar} \frac{sen^2\left[(E - E_{ms})t/2\hbar\right]}{(2\hbar/\pi t)(E - E_{ms})^2}; t \to \infty;$$

$$P(t) = \frac{2\pi}{\hbar}\left|H'_{sn}\right|^2 \delta(E - E_{ms})t \Rightarrow B = \frac{2\pi}{\hbar}\left|H'_{sn}\right|^2 \delta(E - E_{ms})$$

- Da página 13, temos H’, então:

$$B(E) = \frac{2q^2}{m^2}\left(\frac{h}{\varepsilon EV}\right)\left|(\vec{p}.\hat{e})_{sn}\right|^2 \delta(E - E_{ms})$$

- Notem que para termos a taxa de emissão deveríamos integrar uma ensidade espectral ρ(E) para todo E:

$$\kappa = \int_0^\infty \frac{2q^2}{m^2}\left(\frac{h}{\varepsilon EV}\right)\left|(\vec{p}.\hat{e})_{sn}\right|^2 \delta(E - E_{ms})dE = \frac{2q^2}{m^2}\left(\frac{h}{\varepsilon EV}\right)\left|(\vec{p}.\hat{e})_{sn}\right|^2 \rho(E_{ms})$$

- Ou seja, :

$$B' = \frac{2q^2}{m^2}\left(\frac{h}{\varepsilon EV}\right)\left|(\vec{p}.\hat{e})_{sn}\right|^2 \delta(E - E_{ms})$$

Emissão espontânea e ganho

- No semicondutor, calculemos a taxa de emissão espontânea e, a partir dela, calculemos ganho.
- Todo o desenvolvimento até aqui deve ser estendido a transições entre estados da banda de condução e banda de valência.
- No caso geral:

$$\frac{\kappa_{spon}(E)}{\Delta E} = (V/8\pi^3)^2 \iint B'(E,\vec{k}_c,\vec{k}_v)N(E)f_2(\vec{k}_c)[1-f_1(\vec{k}_v)]d^3k_c d^3k_v;$$

$$B(E,\vec{k}_c,\vec{k}_v) = C(E,\vec{k}_c,\vec{k}_v)\delta[X]; X(E,\vec{k}_c,\vec{k}_v) \equiv E - E_c(\vec{k}_c) + E_v(\vec{k}_v)$$

- Consideremos somente transições com mesmo ***k*** (uma vez que o momento do fóton é pequeno e, portanto, o momento do eletron se conserva ; de outra forma, deveríamos envolver fônons.

$$\frac{\kappa_{spon}}{V\Delta E} = (1/8\pi^3)\int C(E,\vec{k})\delta[X(E,\vec{k})]N(E)f_2(\vec{k})[1-f_1(\vec{k})]d^3k \equiv \gamma_{spon}$$

- Considerando que temos simetria e as funções dependam só do módulo k:

$$\gamma_{spon} = \frac{1}{2\pi}\int C(E,k)\delta[X(E,k)]N(E)f_2(k)[1-f_1(k)]k^2 dk$$

- *Mudando as variáveis para X(E,k), temos:*

$$\gamma_{spon} = \frac{1}{2\pi}\int (C(E,k(X))\delta[X]N(E)f_2(k(X))[1-f_1(k(X)]\frac{k^2(X)dX}{|dX/dk|}$$

$$\gamma_{spon} = \frac{C(E,k(X))N(E)f_2(k(X))[1-f_1(k(X))]k^2(X)}{2\pi|dX/dk|}\Big|X=0;$$

$$k(X) = [E - E_c(k) + E_v(k)]^{inv}$$

- Considerando a banda parabólica: $E_{c(v)}(k)=\hbar^2k^2/2m_{c(v)} + (E_G$ *para o caso de c)*; então:

$$X(k) = E - (E_G + \hbar^2 k^2 / 2m_r);$$

$$k(X) = \sqrt{2m_r[(E - E_G) - X]/\hbar^2}; k_0 \equiv k(0) = \sqrt{2m_r[(E - E_G)]/\hbar^2};$$

$$dX / dk = -\hbar^2 k / m_r \Rightarrow dX / dk\big|_{X=0} = -\hbar^2 k_0 / m_r;$$

$$m_r \equiv m_c m_v / (m_c + m_v)$$

- Considerando *C* somente função de *E* (vamos falar disto mais adiante:

$$\gamma_{spon}(E, E_{fc}, E_{fv}) = \frac{m_r C(E) N(E) f_2(k_0)[1 - f_1(k_0)]k_0}{\pi\hbar^2}; (E > E_G)$$

$$f_2 = \frac{1}{e^{(E_G + \hbar^2 k_0{}^2/2m_c - E_{fc})/kT} + 1} = \frac{1}{e^{(E_2 - E_{fc})/kT} + 1}; E_2 \equiv [E - E_G(\frac{m_c}{m_r} - 1)]\frac{m_r}{m_c}$$

$$f_1 = \frac{1}{e^{(-\hbar^2 k_0{}^2/2m_v - E_{fv})/kT} + 1}; \frac{1}{e^{(E_1 - E_{fv})/kT} + 1}; E_1 \equiv (E_G - E)\frac{m_r}{m_v}$$

$$k_0 \equiv \sqrt{2m_r[(E - E_G)]/\hbar^2}$$

- Onde multiplicamos por 2 para considerar o spin na soma.

Relaxação intra-banda

- Notem que o efeito artificial, discontínuo para emissão $E>E_G$ deve ser revisto;
- De fato, a posição dos níveis de energia para as transições tem uma incerteza devido ao tempo em que os portadores têm para definir um quasi-equilíbrio. Este tempo é o tempo de termalização em cada banda e ocorre por espalhamento entre os portadores de cada banda: τ_{in};
- Sendo assim, introduzimos um alargamento Lorentziano com largura $\Delta E = \hbar/\tau_{in}$ (τ_{in} é da ordem de 0.1 ps)

$$\bar{\gamma}_{spon}(E, E_{fc}, E_{fv}) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{spon}(E', E_{fc}, E_{fv}) L(E - E') dE';$$

$$L(x) \equiv \frac{(1/\pi)(1/\Delta E)}{1 + (x/\Delta E)^2}; \Delta E = \hbar/\tau_{in}; \frac{1}{\tau_{in}} = \frac{1}{\tau_{in}^c} + \frac{1}{\tau_{in}^v}$$

C(E)

$$C(E) = \frac{2q^2}{m^2}\left(\frac{h}{\varepsilon EV}\right)\left|(\hat{e}.\vec{p})_{sm}\right|^2$$

- Notem que C(E) envolve elementos de matriz do operador momento entre os estados inicial e final;
- Se considerarmos, por exemplo, ê//**x**, temos que obter $(P_x)_{sm}$;
- Considerando que estamos sempre próximos aos extremos da banda (k≈0), vamos temos que o elemento de matriz é bastante próximo àquele das funções atômicas calculados no método k.p, sendo, portanto, independente de k.
- De fato, temos (topico 2, p. 37)

$$|P|^2 \equiv \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_0+\Delta)}{m^*(\varepsilon_0+\frac{2}{3}\Delta)}; P_i \equiv -\frac{i}{m}\langle S|P_i \ |R.i\rangle; i = x, y, z;$$

C(E)

- Portanto, considerando simetria ($P^2=3P_i^2$):
- De fato, temos (topico 2, p. 37)($\varepsilon_0=E_G$)

$$C(E) = \left(\frac{2q^2h}{\varepsilon EV}\right)\frac{E_G(E_G+\Delta)}{3m^*(E_G+\frac{2}{3}\Delta)}$$

- Assim, utilizando-se de parâmetros experimentais da estrutura de banda, temos a matriz de transmissão.

N(E)

- Para cavidades com dimensões >> λ envolvido, N(E) pode ser a distribuição do corpo negro à uma temperatura T;

Polarização

$2\pi/(V)^{1/3}$=volume de um k da cavidade ni espaço k

$$N_{total} = 2.\frac{4\pi}{3}k^3.\frac{V}{(2\pi)^3}; E = \hbar ck/n;$$

$$N(E) = (dN_{total}/dE)$$

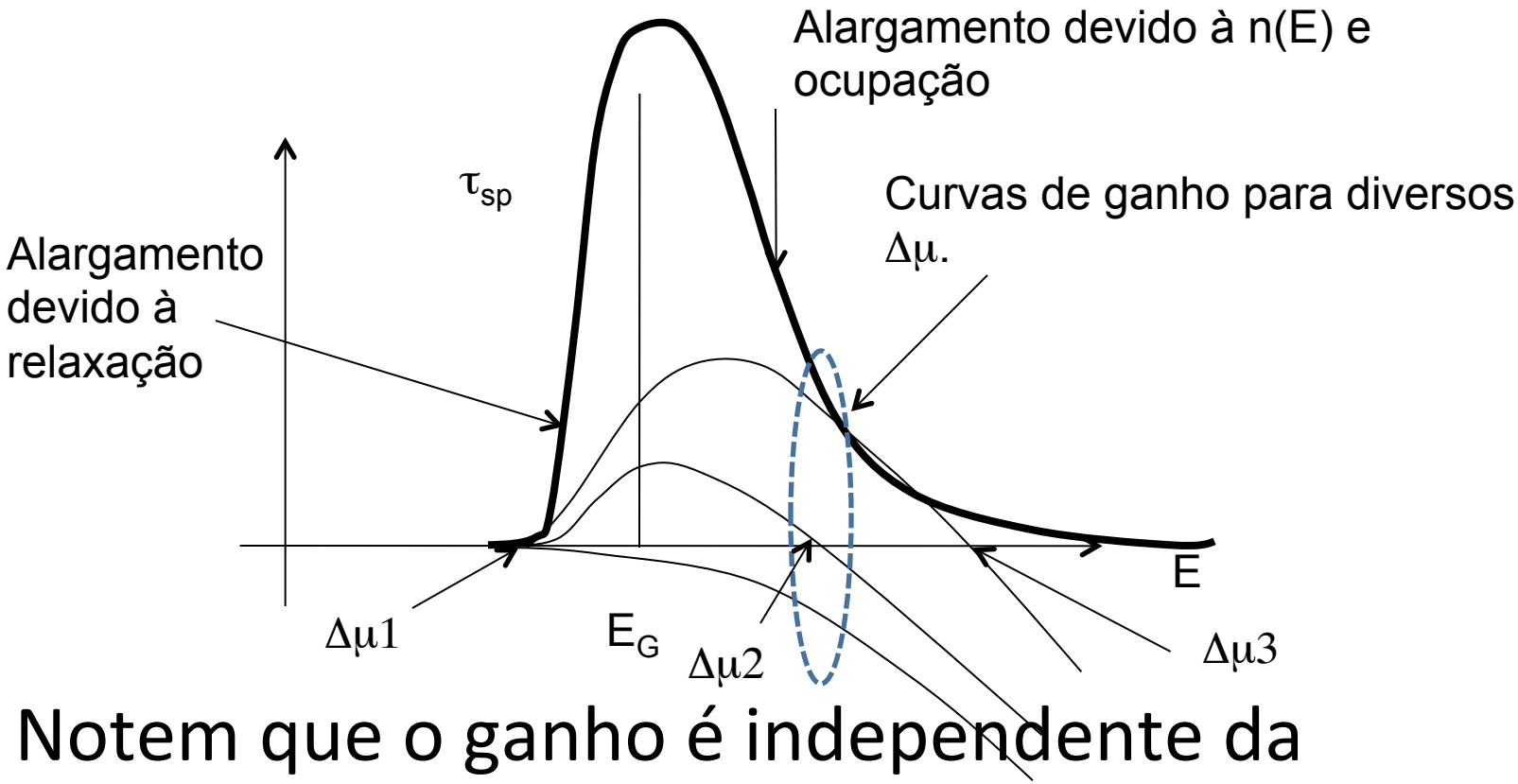
$$N(E) = V\left(\frac{n}{\hbar c}\right)^3 \frac{E^2}{\pi^2}; n(E) = \frac{N(E)}{V} = \left(\frac{n}{\hbar c}\right)^3 \frac{E^2}{\pi^2}$$

- No caso geral, teríamos que obter N(E) caso a caso.

Ganho

- Da página 8 e 23 deste tópico,

$$g(E,E_{fc},E_{fv}) = \frac{\bar{\gamma}_{spon}(E,f_2,f_1))}{n(E)v_G}\left[1-e^{(E-(E_{fc}-E_{fv}))/kT}\right]$$



- Notem que o ganho é independente da polarização.