Experimento 4
Propagação de Erros

Varlei Rodrigues

Vamos supor que em um experimento nós tenhamos medido os parâmetros $x, y, ..., z$ n vezes.

$$\left.\begin{array}{c} x_1, y_1, ..., z_1 \\ x_2, y_2, ..., z_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ x_n, y_n, ..., z_n \end{array}\right\} medidas$$

Devido aos erros experimentais, instrumentais e estatísticos, não é possível saber qual o valor "verdadeiro" destes parâmetros. Mas sabemos que os valores médios $\overline{x},\ \overline{y},\ ...,\ \overline{z}$ são aqueles que melhor se aproximam desses, dentro de uma faixa de confiança $\sigma_x,\ \sigma_y,\ ...,\ \sigma_z$:

$$\begin{array}{cc} \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i & \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i & \sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 \\ \vdots & \vdots \\ \overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i & \sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 \end{array} \tag{1}$$

Mas como achar o valor que se aproxima do "verdadeiro" e a sua faixa de confiabilidade quando a propriedade no qual estamos interessados não puder ser medido diretamente, mas sim através de um modelo matemático? Por exemplo, se quizermos achar uma velocidade baseados em medidas de distância e tempo.
Vamos supor que queremos achar w em função de $x, y, ..., z$:

$$w = w(x, y, ..., z) \tag{2}$$

Uma opção seria calcular todos os w_i para todos os conjuntos $x_i, y_i, ..., z_i$ de medidas e em seguida a média $\overline{w}$ e σ_w^2

$$\left.\begin{array}{c} w_1 = w(x_1, y_1, ..., z_1) \\ w_2 = w(x_2, y_2, ..., z_2) \\ \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \\ w_n = w(x_n, y_n, ..., z_n) \end{array}\right\} medidas$$

$$\overline{w} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i \qquad \sigma_w^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(w_i - \overline{w})^2 \tag{3}$$

Como devemos calcular todos os valores de w_i, esta operação passa a ser bastante trabalhosa, principalmente para um grande número de medidas. Uma pergunta que podemos fazer é se podemos obter $\overline{w}$ diretamennte da média dos parâmetros medidos no experimento:

$$\overline{w} = w(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z})? \tag{4}$$

Para responder a esta pergunta, vamos expandir o valor de w_i em séries de potências dos desvios em torno dos valores médios de $x, y, ..., z$:

$$\begin{aligned} w_i &= w(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}) + \\ &+ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)(x_i - \overline{x}) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)(y_i - \overline{y}) + ... + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)(z_i - \overline{z}) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)(x_i - \overline{x})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)(y_i - \overline{y})^2 + ... + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)(z_i - \overline{z})^2 + \\ &+ ... \end{aligned} \tag{5}$$

Se a função w varia lentamente, nós podemos considerar que os termos de segunda ordem e superiores são despresíveis, ou seja:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)(x_i - \overline{x})^2 \sim 0 \tag{6}$$

Calculando a média e w usando os valores de w_i obtidos na expansão (5) teremos:

$$\begin{aligned} \overline{w} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i \\ &= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} w(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}) + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)(x_i - \overline{x}) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)(y_i - \overline{y}) + ... + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)(z_i - \overline{z})\right] \end{aligned} \tag{7}$$

Rearranjando os termos da equação (7):

$$\begin{aligned} \overline{w} &= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} w(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}) + ... + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sum_{i=1}^{n}(z_i - \overline{z})\right] \end{aligned} \tag{8}$$

Nesta expressão os termos à direita da igualdade são nulos, com exceção do primeiro, pois:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \; - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x} = \overline{x} - \frac{1}{n}n\overline{x} = 0 \tag{9}$$

Desta forma, em primeira aproximação, $\overline{w}$ pode ser obtido usando os valores médios de $x, y, ..., z$:

$$\boxed{\overline{w} = w(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z})} \tag{10}$$

Agora, vamos usar o mesmo raciocínio para calcular o desvio padrão de w:

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(w_i - \overline{w})^2 \tag{11}$$

Usando w_i obtido em (5) até primeira ordem teremos:

$$\begin{aligned}
(w_i - \overline{w})^2 &= [w(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}) + \\
&+ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)(x_i - \overline{x}) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)(y_i - \overline{y}) + ... + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)(z_i - \overline{z}) + \\
&- \overline{w}]^2 = \\
&= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 (x_i - \overline{x})^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 (y_i - \overline{y})^2 + ... + \\
&+ 2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) + 2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)(x_i - \overline{x})(z_i - \overline{z}) + \\
&+ ...
\end{aligned} \tag{12}$$

Entretanto,

$$2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = 0 \tag{13}$$

Por isso, podemos ignorar os termos cruzados na expressão (12) e escrever σ_w^2 como:

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}_{n\sigma_x^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}_{n\sigma_y^2} + ...\right] \tag{14}$$

Desta forma, podemos calcular σ_w^2 a partir das derivadas primeiras da função w e dos σ^2 de cada valor medido:

$$\boxed{\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + ... + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2} \tag{15}$$

Referência Bibliográfica: José Henrique Vuolo, *Fundamentos da Teoria de Erros* (Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1992).

Exemplo:Incerteza no volume de um cilindro:

$$V = \pi L R^2 \qquad\qquad \left.\begin{array}{ll} \overline{R} & \sigma_R^2 \\ \overline{L} & \sigma_L^2 \end{array}\right\} \textit{médias das medidas}$$

Usando a expressão (15) para encontrar σ_V^2:

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2$$

$$\boxed{\sigma_V^2 = \left(2\pi\ \overline{L}\ \overline{R}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\pi\ \overline{R}^2\right)^2 \sigma_L^2} \tag{16}$$

Podemos ainda dividir os dois lados da igualdade por V^2:

$$\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 = \left(\frac{2\pi\ L\ R}{\pi\ L\ R^2}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\pi\ R^2}{\pi\ L\ R^2}\right)^2 \sigma_L^2 \tag{17}$$

$$\boxed{\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 = \left(\frac{2\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2} \tag{18}$$