

Capítulo 1

Unidades, Padrões, Grandezas, Escalas e Tamanhos



1.1 INTRODUÇÃO

Geralmente a ciência procura estabelecer relações entre conjuntos de observações, com as quais tenta desenvolver generalizações e, a partir disso, elaborar conceitos teóricos para as interpretações. As observações e comparações quantitativas geralmente nos levam a generalizações quantitativas, hipóteses e teorias quantitativas. A dificuldade para se fazer generalizações quantitativas está diretamente relacionada com as observações feitas, que muitas vezes são bastante complexas, mas é justamente isso que torna as ciências uma permanente fonte de conhecimentos. As leis do movimento de Newton, a teoria atômica de Dalton e a elaboração dos princípios da hereditariedade de Mendel são exemplos notáveis de que as generalizações a partir de observações deram origem a conhecimentos importantíssimos.

Quando fazemos um conjunto de observações, ou seja, um experimento, dados similares poderão ser obtidos outras vezes se o experimento for repetido nas mesmas condições. A generalização sempre é consequência de uma série de experimentos similares. Na prática, é difícil garantir que dois experimentos sejam exatamente iguais em todas as variáveis, de modo que não podemos assegurar resultados exatamente iguais. Os dados numéricos deverão variar dentro de uma faixa, o que é denominado erro experimental, e as generalizações deverão levar em conta este erro ou incerteza.

A física e a química, ciências com grande tradição experimental, apresentam generalizações baseadas em resultados com um bom grau de reprodutibilidade, pois na maioria dos casos a incerteza pode ser reduzida a proporções desprezíveis. Já na biologia, o problema da incerteza é bastante sério, pois a maioria das experiências é feita com organismos vivos, que são altamente complexos, o que gera resultados altamente variáveis, ou seja, como a incerteza é muito grande, é difícil a reprodução exata de uma experiência. Para minimizar o problema, reduzir essa incerteza seria uma providência imediata, porém a tarefa de identificar e controlar todas as fontes de incerteza é algo impossível. Além disso, seria um risco muito grande supor que qualquer organismo-padrão possa representar toda uma espécie ou população. Ante essa realidade, devemos procurar meios para conduzir nossos experimentos, apresentando observações e analisando os resultados de maneira que possamos extrair conclusões com uma precisão conhecida.

Técnicas experimentais e métodos teóricos típicos da física e da química são extremamente úteis para as generalizações quantitativas feitas na biologia. Procuramos sempre garantir que as incertezas tenham uma influência mínima em nossas observações, e, muitas vezes, só o fato de conseguirmos identificar as prováveis fontes da incerteza permite que estas generalizações quantitativas constituam uma contribuição importante no entendimento da biologia. Nas ciências biológicas, as observações experimentais, que requerem justificativas bastante detalhadas, para se chegar a generalizações quantitativas, exigem um conhecimento muito claro dos fundamentos do cálculo vetorial, diferencial e integral, e também de vários princípios da física e da química. O principal objetivo aqui é entender como métodos e princípios da física são utilizados para se chegar às generalizações quantitativas de observações nas ciências biológicas, utilizando-se ferramentas matemáticas fundamentais e princípios de certas ciências, toda vez que necessário.



1.2 MEDIDAS: UNIDADES FUNDAMENTAIS

Como foi dito anteriormente, a generalização de uma série de observações é conseqüência da repetição de experimentos similares. Isso exige uma certa habilidade para *medir* as grandezas que são variáveis do experimento. Para que a quantidade resultante tenha algum significado, ao se fazer uma *medida*, sua *magnitude* deve estar acompanhada da respectiva *unidade*. Na biologia, à semelhança do que ocorre na física e na química, são bastante diversas as grandezas que medimos. As unidades do Sistema Internacional (SI)⁽¹⁾, ou *unidades métricas*, são as mais utilizadas para expressar as medidas de uma grandeza. Neste texto utilizaremos, para as grandezas que serão definidas, este sistema de unidades. Mas não deixaremos de mencionar, quando for necessário, outras unidades também utilizadas para expressar as medidas de algumas grandezas. As unidades básicas do SI são: o *metro* (*m*), o *quilograma* (*kg*) e o *segundo* (*s*) para medir comprimento, massa e tempo, respectivamente. Muitas grandezas derivadas são expressas em termos destas unidades básicas; por exemplo, as medidas de *energia* têm como unidades o $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$, que é denominado *joule* (*J*). Algumas grandezas exigem outras unidades básicas, além daquelas já

mencionadas. No SI estas são: o *kelvin* (*K*), o *ampère* (*A*), a *candela* (*cd*) e o *mole* (*mol*) para medidas da temperatura termodinâmica, da corrente elétrica, da intensidade luminosa e de quantidades de substância, respectivamente. Na Tabela 1.1 apresentamos as unidades básicas do SI.

Algumas vezes as medidas de uma grandeza são muito pequenas ou muito grandes quando comparadas com os *padrões* das unidades básicas do SI,

Tabela 1.1 Unidades Básicas no SI

Grandeza	Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Intensidade luminosa	candela	cd
Quantidade de substância	mole	mol

como por exemplo 1 milissegundo (ms) = 10^{-3} s; 1 quilômetro (km) = 10^3 m ou 1 microampère (μA) = 10^{-6} A. Quando estes múltiplos dos padrões são expressos em potências de 10, os prefixos das unidades básicas têm nomes específicos, como se vê na Tabela 1.2. Esses prefixos também são aplicáveis a qualquer outro tipo de unidade.

As medidas de grandezas também podem ser expressas em *unidades não pertencentes ao SI, e em unidades derivadas*, ou seja, unidades criadas a partir das unidades básicas do SI. No Apêndice A apresentaremos algumas dessas unidades.

Tabela 1.2 Prefixos e as respectivas potências de 10

Prefixo	Símbolo	Potência de 10
tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
quilo	k	10^3
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}

Exemplo: O número de Reynolds (\mathfrak{R}), indicador do fluxo de um fluido, é definido para um fluido de densidade ρ e coeficiente de viscosidade η como: $\mathfrak{R} = 2\rho a\bar{v}/\eta$, onde a é o raio do tubo de escoamento e \bar{v} , a velocidade média do fluido. Sendo \mathfrak{R} adimensional, determine as unidades de η no SI.

Resolução: No SI, a unidade resultante da quantidade física $\rho a\bar{v}$ será: unidade de $\rho \times$ unidade de $a \times$ unidade de $\bar{v} = \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{m}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$. Para que \mathfrak{R} seja adimensional, a unidade de η no SI deve ser: $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$.



1.3 PADRÕES

Sempre que *medimos* uma grandeza estamos comparando-a com o respectivo *padrão* de referência. Este padrão é a *unidade* da grandeza. Quando o sistema métrico foi estabelecido, a unidade de comprimento *metro* foi definida como 10^7 vezes a distância do Equador ao Pólo Norte, medido ao longo do meridiano que passa por Paris; posteriormente, em 1889, a Conferência Geral de Pesos e Medidas, considerando que todo padrão unitário deve ter *durabilidade e reprodutividade*, definiu o *metro* como a distância entre dois traços paralelos sobre uma determinada barra de platina iridiada. Os inconvenientes deste padrão unitário eram ter de se fazer muitas réplicas do objeto, para disponibilizá-las a outros países, e de ser necessário comparar periodicamente estas réplicas com o padrão internacional. Assim, em 14 de outubro de 1969, a Conferência Geral *alterou* a definição deste padrão internacional, utilizando uma unidade *natural* de comprimento baseada na radiação atômica. É aceito agora, como padrão de medida de comprimento, o *comprimento de onda* da luz vermelho-alaranjada emitida pelos átomos excitados do isótopo criptônio 86. Foi definido que *exatamente* 1 650 763,73 comprimentos desta onda constituem 1 metro. Este

padrão pode ser reproduzido em muitos laboratórios do mundo inteiro, evitando assim a necessidade de deslocamento, para fazer comparações com um padrão.

O *padrão de massa*, por sua vez, é um cilindro de platina iridiada, definido como *um quilograma*. Infelizmente, ainda não foi adotado um padrão atômico de massa, tal como se fez com o padrão internacional de medida de comprimento. Certamente, quando houver condições tecnológicas para se poder determinar com precisão a massa do quilograma-padrão, em termos de uma massa atômica-padrão, uma nova definição deverá surgir.

O *padrão de tempo* é o *segundo*, que originalmente foi definido como o tempo igual a $1/86\,400$ de um *dia solar médio*. Esta definição não era muito conveniente para trabalhos de alta precisão, por depender da velocidade de rotação da Terra. Em 1967 foi estabelecida uma unidade *natural* para o tempo, que, assim como a definição do padrão de comprimento, é um padrão atômico. Desta vez foram utilizadas as características vibracionais do elemento césio 133. Atualmente, *um segundo* é definido como o tempo necessário para que o césio realize $9\,192\,631\,770$ vibrações completas.



1.4 ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS, PRECISÃO E CERTEZA^(2,3)

As medidas nunca são feitas com *precisão absoluta*. Suponha que pretendemos medir a massa de uma tartaruga. Dispomos de uma balança graduada de 1 em 1 g. Esta balança fornece com *precisão* o valor da medida em gramas, e qualquer fração dessa unidade deverá ser *estimada*. Assim, para expressar nossa medida, esta deverá conter todos os *algarismos precisos* mais o *algarismo estimado*. A leitura na balança da Figura 1.1 é 16,5 g. Se a escala desta balança permitisse ler com precisão até décimos de gramas, a leitura seria 16,50 g. Ou seja, teríamos um aumento na *precisão* da medida.



Figura 1.1 Medida da massa de uma tartaruga.

Os algarismos que compõem o resultado de uma medida são chamados de *algarismos significativos*. Deles fazem parte todos os algarismos precisos *mais um e somente um* algarismo estimado. É sobre este último que incide o *desvio absoluto* da medida. Observações:

1. Os zeros à esquerda do primeiro algarismo não nulo *não são significativos*, pois o número de algarismos significativos não depende da unidade adotada. Assim, a medida

$$7,5 \text{ cm} = 0,075 \text{ m} = 0,000075 \text{ km} = 75 \times 10^3 \text{ } \mu\text{m}$$

tem só *dois* algarismos significativos nos quatro casos acima.

2. Os zeros à direita do último algarismo não nulo *serão significativos* se indicarem um valor realmente medido. Assim, a medida

$$0,0750 \text{ m}$$

$$7,5000 \text{ cm}$$

tem *três* algarismos significativos e *cinco* algarismos significativos.

Para *medir uma grandeza*, podemos fazer apenas uma ou várias medidas repetidas, dependendo das condições experimentais particulares ou ainda da postura adotada frente ao experimento. Em qualquer caso, deve-se extrair do processo de medida um valor que *melhor represente* a grandeza e ainda um *limite de erro*, dentro do qual deve estar compreendido o valor real. Veja ao lado uma explicação sobre *desvios e limites de erro*.

Teremos uma *precisão maior* quanto menor for o desvio absoluto. Sempre é desejável obter a maior precisão possível. Se, ao fazer a medida de uma grandeza, encontrarmos um desvio absoluto muito grande e o diminuirmos arbitrariamente, então essa redução arbitrária da faixa de desvio lança dúvidas sobre a *certeza* de que o valor da medida feita estará dentro da nova faixa de valores, pois esta se tornou mais estreita. Portanto, *precisão e certeza* estão relacionadas, e não podemos modificar arbitrariamente uma delas sem que a outra seja modificada. Vejamos, com um exemplo, como esta relação aparece quando lidamos com várias medidas de uma mesma grandeza:

Para fazer medidas, sob condições de repouso, do potencial de Nernst devido aos íons Na^+ no axônio de um nervo de lula, utilizamos um voltímetro graduado em décimos de milivolt (mV). Foram feitas dez medidas; veja abaixo os resultados em mV encontrados:

$$\begin{array}{cccc} V_1 = 54,20 & V_2 = 54,16 & V_3 = 54,15 & V_4 = 54,15 \\ V_5 = 54,17 & V_6 = 54,20 & V_7 = 54,23 & V_8 = 54,25 \\ V_9 = 54,22 & V_{10} = 54,24 & & \end{array}$$

Queremos encontrar o melhor valor para expressar este potencial de Nernst e saber qual é o desvio sobre este valor.

♦ O melhor valor é certamente o *valor médio ou valor mais provável*:

$$\bar{V} = \frac{1}{10} \sum_i V_i = 54,20 \text{ mV}$$

♦ Vamos supor que, para ter boa *precisão*, consideramos um desvio pequeno, por exemplo 0,01 mV. Neste caso, somente duas medidas, entre as dez feitas, estão no intervalo $(54,20 \pm 0,01)$ mV, ou seja, 80% dos valores estão fora deste intervalo. Dizemos que este resultado nos dá muito pouca *certeza*, pois só duas em dez medidas têm o mesmo resultado. Se considerarmos o desvio como 0,02 mV, teremos *quatro medidas* dentro do intervalo $(54,20 \pm 0,02)$ mV. Com um desvio de 0,03 mV, serão *seis medidas* dentro do novo intervalo. Se considerarmos o desvio como 0,05 mV, teremos *todas as medidas* dentro do intervalo $(54,20 \pm 0,05)$ mV. Neste último caso, teremos uma *certeza* total, mas a *precisão* diminui muito.

Desvios e limites de erro

Se x_1, x_2, \dots, x_n são os valores de uma série de n medidas de uma grandeza, o *valor mais provável* da grandeza medida é dado pela *média aritmética* ou *valor médio* do conjunto de medidas, ou seja,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

O *desvio absoluto* de cada medida é definido como o módulo da diferença da medida considerada e o valor médio da grandeza:

$$\Delta x_i = |x_i - \bar{x}|$$

Enquanto o *desvio médio absoluto* do conjunto de n medidas de uma grandeza é a média aritmética dos desvios de cada medida:

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i$$

o *desvio padrão* desse conjunto de n medidas é definido como:

$$\sigma_x = \pm \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}$$

O *resultado final* da medida da grandeza pode-se admitir, com um alto grau de confiança, que está compreendido no intervalo $\bar{x} - \Delta \bar{x}$ e $\bar{x} + \Delta \bar{x}$. É comum representar o valor final da grandeza pela notação $x = \bar{x} \pm \Delta \bar{x}$.

Na prática, o intervalo $\pm \Delta \bar{x}$ do valor final da grandeza corresponde ao valor maior entre o desvio médio absoluto e o desvio avaliado absoluto. Sendo que o *desvio avaliado absoluto* é o valor correspondente à metade da menor divisão da escala do instrumento utilizado nas medidas. Isso faz com que esse desvio tenha um único algarismo significativo.

Por exemplo, se depois de fazer várias medidas do diâmetro médio de um olho humano chegamos ao valor $(2,87 \pm 0,05)$ cm, o *desvio absoluto* dessas medidas é $\pm 0,05$. Isto significa ser *pouco provável* que o verdadeiro valor seja menor que 2,82 cm ou maior que 2,92 cm. O termo *provável* é empregado aqui em termos estatísticos.

♦ Como para conciliar *certeza e precisão* não adianta ter uma certeza muito grande e uma precisão pequena, ou vice-versa, então podemos expressar este potencial de Nernst de duas maneiras: $(54,20 \pm 0,03)$ mV ou $(54,20 \pm 0,04)$ mV. No primeiro caso a precisão é boa, e a certeza é de 60% (seis em dez medidas); no segundo, a certeza aumenta para 80%, mas a precisão diminui.



1.5 ESCALA E TAMANHO DOS OBJETOS

Vamos considerar o conceito de *escala*, partindo de objetos com formas geométricas regulares. Na Figura 1.2 mostramos dois cubos, um com lado l , e outro com lado $l' = 2l$; e duas esferas, uma com raio r , e outra com raio $r' = 3r$. Neste caso, um cubo tem o lado duas vezes maior que o outro; este fator 2, ou L , em geral é denominado *fator de escala*. Ao comparar o tamanho de seus raios, o *fator de escala* L para as esferas será 3. Se compararmos as áreas das superfícies externas e os volumes destas figuras de *formas semelhantes*, veremos que:

♦ a razão entre *áreas superficiais* dos cubos é $6l'^2 : 6l^2 = 4 : 1$, ou em função do fator de escala $L^2 : 1$. Ao compararmos as superfícies das esferas, encontraremos o mesmo resultado com a diferença de que no segundo caso temos $9 : 1$, pois $L = 3$. Em geral,

área superficial \propto (comprimento característico)².

♦ a razão entre os *volumes* dos cubos é $l'^3 : l^3 = 8 : 1$, ou em função do fator de escala $L^3 : 1$. O mesmo resultado é encontrado ao compararmos os volumes das esferas, lembrando que neste caso $L = 3$. Em geral,

volume \propto (comprimento característico)³.

Quando dois objetos têm *densidade uniforme*, formas geométricas semelhantes e um fator de escala L , a comparação entre suas *massas* satisfaz a razão $L^3 : 1$. Em geral,

massa \propto (comprimento característico)³.

Normalmente, para objetos com densidade uniforme, formas semelhantes e fator de escala L , é satisfeita a razão:

$$\frac{\text{área superficial}}{\text{volume}} \propto \frac{(\text{comp. característico})^2}{(\text{comp. característico})^3} \propto (\text{comp. característico})^{-1}$$

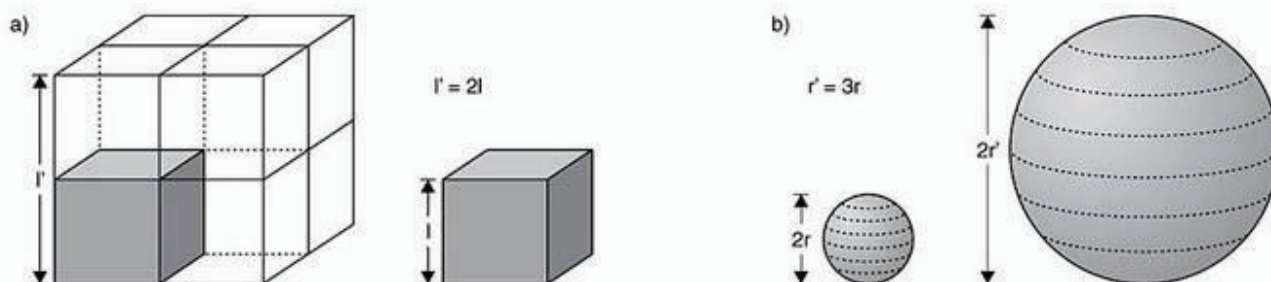


Figura 1.2 a) cubos com lados l' e l e fator de escala $L = l'/l = 2$;
b) esferas com raios r' e r e fator de escala $L = r'/r = 3$.

As relações entre comprimento característico de um objeto com sua área, volume ou massa podem ser igualmente aplicadas a partes do mesmo objeto, de modo que, ao compararmos estas partes com regiões similares de outro objeto de *forma semelhante*, as razões encontradas em função do fator de escala L sejam satisfeitas. Na Figura 1.3, por exemplo, as áreas $A \propto l^2$ e $A' \propto l'^2$ satisfazem a razão $A'/A \propto L^2$.

Com muita cautela, também podemos utilizar estes procedimentos para comparar objetos irregulares, mas de *formas similares*. Por exemplo, na Figura 1.4, uma vez definido o comprimento característico dos objetos e o correspondente fator de escala, pode-se concluir que $A'/A \propto L^2$. É fácil definir o *comprimento característico* de objetos com formas regulares. Porém, no caso de objetos irregulares – freqüentemente encontrados –, a escolha do comprimento característico do objeto normalmente é algum *comprimento predominante* do objeto. Mesmo assim, esta escolha pode não ser a única. Na Figura 1.5 mostramos três corpos típicos da biologia⁽⁴⁾, e os *comprimentos característicos* escolhidos são l para o osso, h para o leão e d para o cachorro.

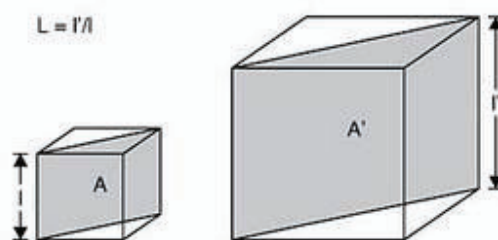


Figura 1.3 Cubos com lados l' e l e fator de escala L . A razão entre as áreas A' e A é L^2 .

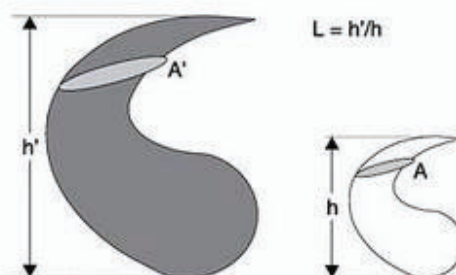


Figura 1.4 Objetos com forma semelhante e fator de escala L . A razão entre as áreas A' e A é L^2 .

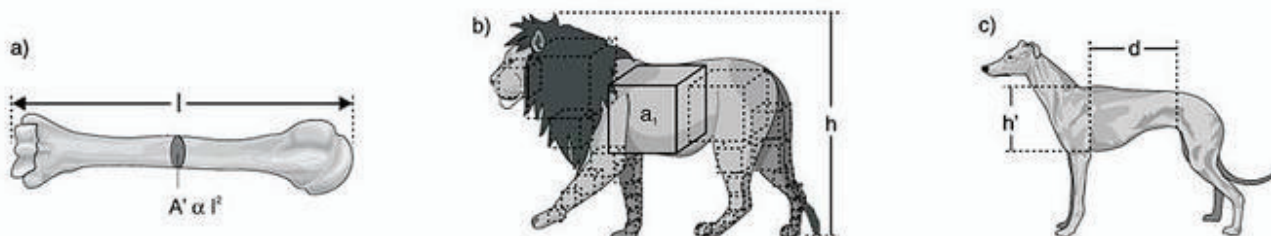


Figura 1.5 a) osso de vertebrado com comprimento característico l , e área de uma seção transversal $A' \propto l^2$;
 b) corpo de forma irregular com comprimento característico h , e lado do cubo $a_i \propto h$; logo seu volume é $V \propto h^3$;
 c) quadrúpede com comprimento característico d . A altura h' do tronco pode ser relacionada com d .

A Figura 1.5a mostra o fêmur de um mamífero, com *comprimento característico* l . Tanto o volume como a massa desse osso serão $\propto l^3$; a área superficial A e de uma seção transversal A' serão $\propto l^2$. Na figura 1.5b mostramos o corpo de um animal, representado por um conjunto de cubos de tamanhos diferentes, cada um com lado a_i . Escolhendo a *altura* h do animal como *comprimento característico*, os lados de cada cubo podem ser escritos como $\propto h$. Poderíamos ter escolhido o comprimento l do corpo do animal, ou sua largura w , como comprimento característico, que o raciocínio seguinte não se modificaria:

Se V é o volume total dos cubos que cabem dentro do corpo, este poderá representar, com um erro de aproximação relativamente pequeno, o volume do corpo do animal, ou seja,

$$V = v_1 + v_2 + \dots + v_n = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = \sum_{i=1}^n a_i^3$$

onde v_i é o volume de um cubo com lado a_i . Como $a_i = c_i h$, sendo c_i um fator numérico positivo, então: $a_i^3 = c_i^3 h^3$, logo

$$V = h^3 \sum_{i=1}^n c_i^3 \propto h^3.$$

Tanto h como a_i e V são quantidades variáveis. Para qualquer valor da dimensão linear h , o lado a_i e o volume V estão univocamente determinados. Por um raciocínio similar, podemos subdividir a *superfície* do corpo do animal em um número grande de quadrados com lados diferentes. Se A é a superfície total do corpo, então pode-se provar que $A \propto h^2$.

Na Figura 1.5c, mostramos outro critério para escolher o *comprimento característico* do corpo de um animal. Neste caso, optamos pela distância entre dois pontos de seu corpo, como a *distância d* ombro-quadril. Esse comprimento característico é muito usado em animais quadrúpedes, pois facilita a comparação entre espécies com formas semelhantes, a partir da razão $d : h'$, sendo h' a altura do tronco.



PROBLEMAS

Para as grandezas físicas das primeiras dez questões adotamos as unidades do Sistema Internacional. As respostas a estas questões deverão ser dadas em função das unidades básicas do SI.

1. A *força* resultante F , experimentada por uma partícula de massa m quando tem aceleração a , é $F = ma$. A unidade da força é o newton (N). Escreva explicitamente esta unidade.
2. A *energia cinética* K , de uma partícula de massa m , com velocidade v , é $K = mv^2/2$. A unidade da energia é o joule (J). Escreva explicitamente esta unidade.
3. Duas massas m_1 e m_2 estão separadas por uma distância r ; a *energia potencial* U deste sistema é $U = -Gm_1m_2/r$. A unidade da energia é o joule (J). Escreva as unidades da constante universal G .
4. A *taxa metabólica* R em animais, quando realizam uma quantidade de trabalho w , no tempo t , pode ser escrita como $R = w/et$, onde a eficiência do animal e é uma quantidade sem unidades. Escreva as unidades de R .
5. A magnitude da *força de empuxo* E , exercida por um fluido de densidade ρ sobre um corpo de volume V , é ρgV , onde g é a aceleração devido à gravidade. Escreva as unidades de ρ .
6. A *viscosidade* η , de um líquido que flui através de um tubo de comprimento L e raio r , pode ser representada por $\eta = F_v/4\pi v_m L$, onde F_v é a força de viscosidade

do fluido, e v_m é a velocidade do fluido ao longo do centro do tubo. A unidade de η é o poiseuille (PI). Escreva explicitamente esta unidade.

7. A pressão osmótica p_{os} de uma solução, à temperatura absoluta T , é dada por cRT , onde c , a concentração molar da solução, é o número de moles do soluto por unidade de volume do solvente, e R é uma constante. Escreva as unidades de R .
8. Em um meio sólido de densidade ρ , a velocidade do som é dada por $v = \sqrt{Y/\rho}$, onde Y é o módulo de Young do sólido. Escreva as unidades de Y .
9. A intensidade da força elétrica F_e , entre duas cargas q_1 e q_2 , separadas por uma distância r , é dada por $F_e = kq_1q_2/r^2$, onde k é uma constante elétrica universal. Escreva as unidades de k .
10. Uma corrente I percorre um fio metálico de raio r e comprimento L . Se a corrente por unidade de área é proporcional à diferença de potencial V por unidade de comprimento, então $(I/A) = \sigma(V/L)$, onde σ é a condutividade do metal. Escreva as unidades de σ .
11. Quantos algarismos significativos tem cada uma das seguintes quantidades:

a) 2;	b) 2,00;	c) 0,136;	d) 2,483;
e) $2,483 \times 10^3$;	f) 310;	g) $3,10 \times 10^2$;	h) $3,1 \times 10^2$.
12. Faça as seguintes operações considerando os algarismos significativos:

a) $0,23 + 450,25 + 20,5 + 5,1517$;	b) $99,543 - 2,75$;
c) $3,19463 \times 2,75$;	d) $68,72 : 23,1$.
13. Na medida dos lados a e b de um prisma retangular, obtivemos os seguintes resultados: Lado a : 20,2 cm; 20,1 cm; 19,7 cm; 20,2 cm; e 19,8 cm.
Lado b : 10,3 cm; 9,8 cm; 10,0 cm; 9,7 cm; e 10,2 cm.
Determine a maneira correta para exprimir:

a) o lado a ;	b) o lado b ;
c) a área do retângulo;	d) o perímetro do retângulo.
14. Supondo que o cálculo envolvendo diversas medidas forneceu os resultados abaixo, faça o arredondamento dos algarismos significativos para uma casa decimal:

a) 23,532 cm;	b) 57,478 mm;	c) 1,45481 m;
d) 36,555 mm;	e) 2,3590 cm;	f) 3,1416 mm.
15. Temos um conjunto de medidas da massa de uma pessoa: 61,235 kg; 61,915 kg; 60,781 kg; e 61,008 kg. Calcule o valor médio da massa e seu desvio absoluto.
16. Se $x = (23,5 \pm 0,1)\text{cm}$, $y = (17,8 \pm 0,4)\text{cm}$ e $z = (93,9 \pm 0,2)\text{cm}$, determinar o valor de $x + y - z$ e o desvio absoluto desta quantidade.
17. Se $x = (0,743 \pm 0,005)\text{s}$ e $y = (0,384 \pm 0,005)\text{s}$, calcule $2x + 5y$ e o desvio absoluto desta quantidade.
18. Foram feitas doze medidas do comprimento de uma barra metálica, por doze pessoas. Cada uma utilizou uma régua cuja menor escala é a de milímetros. Os resultados obtidos foram: 16,3 cm; 16,2 cm; 16,3 cm; 16,5 cm; 16,4 cm; 16,1 cm; 16,2 cm; 16,3 cm; 16,0 cm; 16,3 cm; 16,1 cm; e 16,5 cm. Determine o valor médio do comprimento da barra e seu desvio absoluto.

19. Em um trabalho de laboratório, foi utilizado um voltímetro cuja escala estava graduada em décimos de volt. Os estudantes tomaram as seguintes medidas para o potencial aplicado a um músculo: 5,40 V; 5,42 V; 5,39 V; 5,42 V; 5,43 V; 5,41 V; 5,39 V; 5,42 V; 5,42 V; 5,39 V; 5,40 V; 5,45 V; 5,40 V; 5,40 V; e 5,38 V. Calcule o valor médio do potencial aplicado e seu desvio absoluto.
20. Uma célula de forma esférica, com volume V , tem uma área externa A .
 - a) Expressar V em função de A .
 - b) Se duplicarmos V , qual a variação em A ?
 - c) Se duplicarmos A , qual a variação em V ?
21. As dimensões lineares de um corpo de forma geométrica regular aumentam uniformemente, de modo que seu volume aumenta 60%. Quanto aumentará sua superfície externa?
22. Uma pulga de massa m salta com facilidade uma altura H , cem vezes maior que seu tamanho. A energia necessária para este salto é mgH . Se a pulga fosse dez vezes maior em seu tamanho, poderia saltar proporcionalmente mais alto? Admita que os músculos envolvidos no salto têm uma resistência proporcional a seu volume.
23. Suponha que todas as dimensões lineares de um animal aumentem em 10%. Qual será o incremento de sua superfície, volume e peso?
24. Os comprimentos d e h na Figura 1.5c, para uma pantera adulta, são: $d = 89$ cm e $h = 45$ cm. Encontre uma relação empírica entre d e h , de modo que a razão $d : h^n$ seja da ordem de 7,03. Utilizando esta relação empírica entre d e h , para um lhama adulto, qual será o valor de h para este quadrúpede, se $d = 125$ cm?

Referências Bibliográficas

1. EDITOR'S PAGE. International System of Units. *Health Physics*, v. 59, n.1, p. 5-7, July, 1990.
2. BEVINGTON, P.R; ROBINSON, D.K. *Data reduction and error analysis for the physical science*. New York: McGraw-Hill, 1992.
3. VUOLO, J.H. *Fundamentos da teoria de erros*. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
4. ALEXANDER, R.M. Design by numbers. *Nature*, v. 412, n. 6847, p. 591, August, 2001.

Capítulo 2

Gráficos, Decaimento Exponencial, Crescimento Exponencial e Escala na Biologia



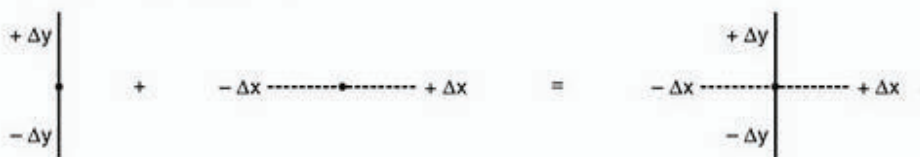
2.1 GRÁFICOS

Normalmente um conjunto de valores teóricos ou mesmo as medidas feitas em *trabalhos experimentais* são colocados no papel (ou no computador) para compor *gráficos*. Dessa maneira, podemos ter uma idéia imediata do comportamento das grandezas observadas. Assim, o *gráfico* é um dos modos mais convenientes para visualizar e/ou interpretar uma relação entre duas ou mais grandezas. Um gráfico pode evidenciar uma relação entre grandezas, que seria difícil de estabelecer só inspecionando uma tabela. Antes de levar os valores das grandezas para a folha de gráfico, é necessário definir dois ou mais eixos que servirão para representar os valores das grandezas. Para construirmos um gráfico, devemos estabelecer uma *escala* para cada eixo, de modo que os pares de valores possam ser colocados no gráfico, independente do intervalo de variação desses valores e dos comprimentos dos eixos. As folhas para gráficos mais utilizadas apresentam *dois tipos de escalas*: a milimetrada e a logarítmica. A combinação dessas *escalas* dá origem a três tipos de folha para gráficos:

- ◆ *Milimetrado*: a folha apresenta *escalas* lineares.
- ◆ *Mono-log*: a folha apresenta uma *escala* logarítmica e outra linear.
- ◆ *Di-log*: a folha apresenta *escalas* logarítmicas.

A seguir daremos algumas regras muito úteis para a construção de um gráfico:

- ◆ Em uma mesma folha é possível construir vários *gráficos*; basta usar símbolos diferentes (♣, ♦, ♥, ▲...) e uma legenda que identifique cada tipo de ponto.
- ◆ Quando o valor das grandezas já tem seu desvio absoluto definido, o gráfico deve trazer esta informação. Por exemplo, se a grandeza representada no *eixo y* tem desvio $\pm \Delta y$ e a representada no *eixo x* tem desvio $\pm \Delta x$, então a representação desses desvios na folha para gráfico será



♦ Na medida do possível, convém representar os gráficos por uma reta. Muitas vezes, para isso, basta fazermos mudanças convenientes das grandezas que definem o gráfico.



2.2 CONSTRUÇÃO DE ESCALAS^(1,2)

Escala Linear

Considere um eixo de comprimento L . Nesse eixo queremos colocar um conjunto de valores positivos e negativos de uma *grandeza* X . Se a diferença entre os valores máximo e mínimo da grandeza é Δ , o *passo da escala* a ser utilizado é o seguinte: $p = L/\Delta$. Na medida do possível, convém *arredondarmos* o valor de Δ , a fim de que p seja inteiro ou, pelo menos, semi-inteiro. Com o passo da escala definido, há condições para colocar todos os valores da grandeza X no eixo. Por exemplo, para uma *escala linear* o passo é p , como mostra a Figura 2.1.

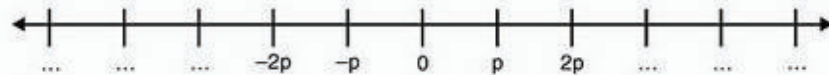


Figura 2.1 Escala linear com passo p .

Considere um conjunto de medidas de duas grandezas G e G' , sendo u e u' , respectivamente, as unidades dessas grandezas. Agora vamos levar os valores dessas grandezas para a folha de gráfico cujas escalas são *lineares*.

Inicialmente definimos os passos p_x e p_y para os eixos horizontal e vertical, respectivamente. Colocamos os dados de G e G' na folha e finalmente traçamos o gráfico. A Figura 2.2 mostra uma *relação linear* entre as grandezas G e G' .

Para encontrarmos uma *relação funcional* entre G e G' a partir do gráfico destas grandezas, procedemos da seguinte maneira:

♦ Determinamos o *declive (inclinação) da reta*

$$m = \frac{15 - 5}{8 - 0} = \frac{10 \text{ u}'}{8 \text{ u}} = 1,25 \text{ u}'/\text{u}.$$

♦ Determinamos o valor de G' quando $G = 0$

$$G = 0 \Rightarrow G' = 5 \text{ u}'.$$

♦ Como o gráfico das grandezas G e G' é *uma reta*, teremos

$$G' = 5 \text{ u}' + 1,25 \frac{\text{u}'}{\text{u}} \cdot G.$$

Em geral, toda vez que o gráfico correspondente a duas grandezas G e G' for uma reta, a relação funcional entre essas grandezas será

$$G' = b + mG,$$

onde b é o valor de G' quando $G = 0$; e m é o declive ou inclinação da reta.

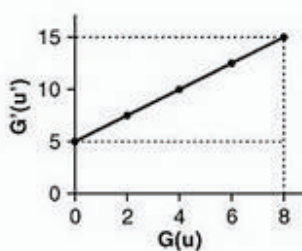


Figura 2.2 Relação linear entre as grandezas G e G' .

Exemplo: A velocidade de um animal em função do tempo foi medida. Os dados encontrados são apresentados a seguir.

v(m/s):	9	13	17	21	25	29
t(s):	2	4	6	8	10	12

- Em uma folha milimetrada faça o gráfico $v \times t$.
- Que relação há entre velocidade e tempo?
- Encontre uma relação funcional entre essas grandezas.

Resolução: Colocaremos os valores de v no eixo vertical e os de t , no horizontal. Os *passos das escalas* dos eixos vertical e horizontal serão, respectivamente,

$$p_v = L_v/\Delta_v \quad \text{e} \quad p_t = L_t/\Delta_t,$$

onde L_v e L_t são os comprimentos dos eixos vertical e horizontal, respectivamente,

$$\Delta_v = 29 \text{ m/s} - 9 \text{ m/s} = 20 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad \Delta_t = 12 \text{ s} - 2 \text{ s} = 10 \text{ s}.$$

- A Figura 2.3 mostra o gráfico das grandezas velocidade e tempo.
- A inclinação da reta será

$$m = AB/BC = (25 \text{ m/s} - 17 \text{ m/s})/(10 \text{ s} - 6 \text{ s}) = 2 \text{ m/s}^2.$$
- Quando $t = 0$, teremos $v = 5 \text{ m/s}$; logo, a relação funcional entre essas grandezas será

$$v = 5 + 2t, \text{ em m/s.}$$

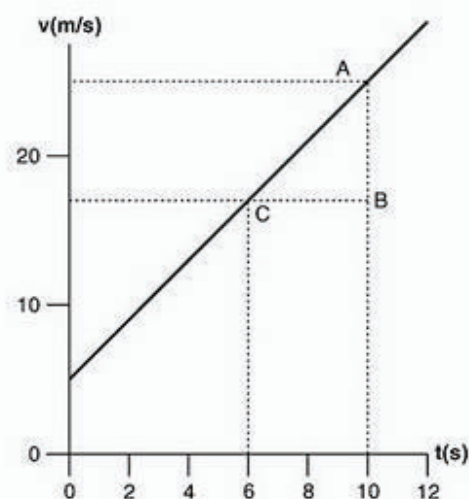


Figura 2.3 Gráfico das grandezas velocidade e tempo.

Escala Logarítmica

Se tivermos um conjunto de valores x_1, x_2, \dots, x_n , e quisermos colocar em um eixo os logaritmos na base decimal desses valores, então podemos calcular os logaritmos de cada um dos x_n valores e colocá-los em um *eixo cuja escala é linear* ou ainda colocar os x_n valores diretamente em um *eixo de escala logarítmica*.

Na Figura 2.4 mostramos um eixo horizontal de comprimento L , que será denominado *ciclo da escala*. Esse ciclo será dividido em intervalos proporcionais à diferença $\log(m + 1) - \log m$, sendo $m = 1, 2, \dots, 9$. Dessa forma, teremos construído um *eixo logarítmico*. Em geral as folhas para gráfico com escalas logarítmicas *têm vários ciclos* nos eixos vertical e/ou horizontal.

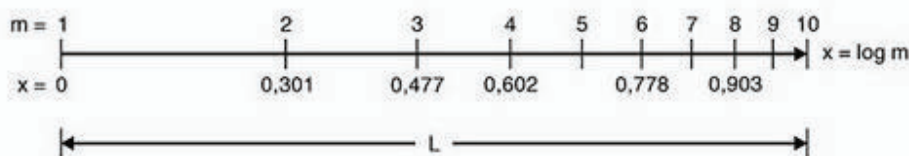


Figura 2.4 Escala logarítmica em um ciclo de escala L.

O comprimento L do ciclo é proporcional à diferença $\log 10 - \log 1 = 1$; ou, em geral, L é proporcional à diferença $\log 10^{n+1} - \log 10^n$, onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Se $x = \log m$ e $L = 10$ cm, então dentro de cada ciclo a diferença entre os logaritmos de

- ♦ $m = 2$ e $m = 1$ será 0,301 e portanto $L = 3,01$ cm.
- ♦ $m = 3$ e $m = 1$ será 0,477 e portanto $L = 4,77$ cm.
- ♦ $m = 9$ e $m = 1$ será 0,954 e portanto $L = 9,54$ cm.

Quando a folha para gráfico tem vários ciclos, como se vê na Figura 2.5, os extremos de cada ciclo tomam valores correspondentes a potências inteiras de 10.

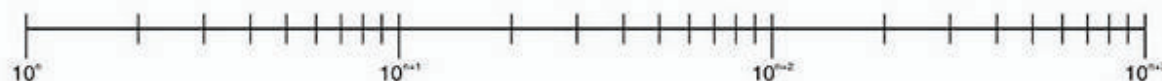


Figura 2.5 Eixo logarítmico, com três ciclos. Os extremos de cada ciclo são potências inteiras de 10.

Novamente temos um conjunto de medidas de duas grandezas G e G' , sendo u e u' as respectivas unidades dessas grandezas. Ao levarmos essas medidas para uma folha de gráfico cuja escala é linear, obtemos uma curva que corresponde a uma função potência, então, a relação geral entre essas grandezas será

$$\blacktriangleright G' = BG^m, \tag{2.1}$$

onde B e m são constantes, podendo assumir valores positivos ou negativos. Se, além do gráfico, precisarmos determinar a relação funcional entre G e G' , será necessário determinar os valores das constantes B e m . Às vezes a escala linear contém o valor 1 da grandeza G ; nesse caso, o valor correspondente de G' será B . Quando isso não acontece, para determinar B e m , recorreremos ao gráfico onde os valores dessas grandezas são apresentados em uma folha de gráfico di-log.

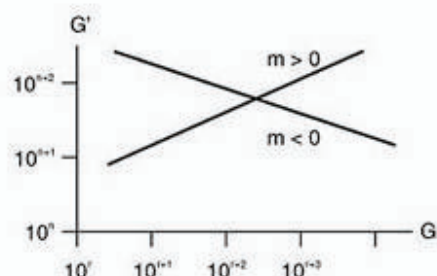


Figura 2.6 Gráfico em uma folha di-log de uma função potência. A inclinação da reta pode ser positiva ($m > 0$) ou negativa ($m < 0$) e n e r podem ter valores inteiros $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Na Figura 2.6 mostramos em uma folha di-log as possíveis formas do gráfico das grandezas G e G' , quando a função potência é a relação funcional entre elas. Se em (2.1) tomarmos os logaritmos, teremos

$$\log G' = \log B + m \log G.$$

Fazendo $\log G' = y$; $\log G = x$ e $\log B = b$, teremos a equação

$$\blacktriangleright y = b + mx, \tag{2.2}$$

que é a equação de uma reta com inclinação m . O valor de b é igual ao de y , quando $G = 1$.

Exemplo: A taxa metabólica R de um espécime com massa M indica a quantidade de energia que um organismo usa por unidade de tempo para executar uma função. A seguir apresentamos alguns valores de R ,

Espécimes:	rato	coelho	gato	cão	homem
R (kcal/h):	2,5	5,4	7,3	24,3	85,5
Massa (kg):	0,7	2,0	3,0	15,0	80,0

- Encontre uma relação funcional para essas grandezas.
- Quais serão os valores de R para um camundongo de 20 g e para um cavalo de 800 kg?

Resolução:

- A Figura 2.7 mostra o gráfico $R = f(M)$ construído em uma folha com *escalas lineares*, onde M é a massa do espécime. Esse gráfico representa uma *função potência*, logo a relação funcional entre essas grandezas é: $R = BM^m$. Nesse caso, a escala da grandeza M contém o valor $M = 1$ kg; assim, podemos determinar o correspondente valor de R que, por sua vez, também será o valor de B . Logo,

$$M = 1 \text{ kg} \Rightarrow R = B = 3,25 \text{ kcal/h} \therefore R = 3,25 M^m.$$

A Figura 2.8 mostra o gráfico $R = f(M)$ feito em uma folha com *escalas logarítmicas*. Esse gráfico é uma *reta*, cuja inclinação m é determinada a partir do ΔABC :

$$m = AB/BC = (\log 18 - \log 5)/(\log 10 - \log 1,78) = 0,742 \cong 3/4.$$

Logo, a relação funcional entre essas grandezas será

$$R = 3,25 M^{3/4}.$$

- Admitindo que a extrapolação é válida e utilizando essa relação funcional, encontramos, para o camundongo, $R = 0,173$ kcal/h e, para o cavalo, $R = 488,9$ kcal/h.

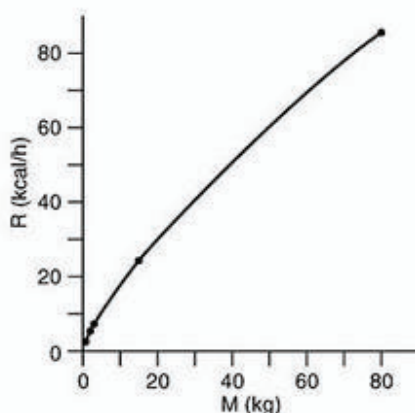


Figura 2.7 As grandezas R e M seguem uma relação de potência. Quando $M = 1$ kg, temos $R = 3,25$ kcal/h.

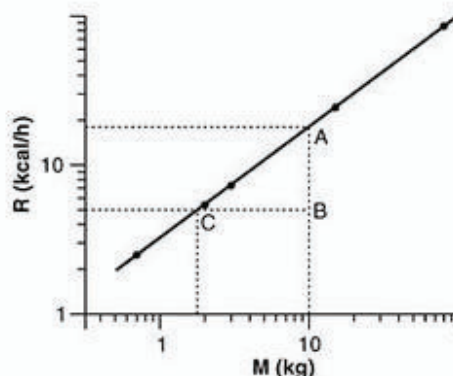


Figura 2.8 Gráfico das grandezas R e M feito em uma folha di-log. Do ΔABC calculamos que a inclinação da reta é $m = 0,742$.

2.3 DECAIMENTO E CRESCIMENTO EXPONENCIAL

Toda função da forma $y = Bq^x$ é denominada *função exponencial*. Nessa função, tanto y quanto x são quantidades variáveis; sendo x uma quantidade real e B e q , dois parâmetros, onde $q > 0$. Muitas observações experimentais na biologia têm comportamentos que seguem uma *função exponencial*. Essa função é muito importante nos tratamentos matemáticos e estatísticos de vários problemas nas ciências da vida, sendo, por isso, conveniente conhecer suas principais propriedades. A *função exponencial* na forma $y = Bq^x$ não é prática para ser diferenciada e/ou integrada, a menos que seja introduzida uma base especial, como o número $e = 2,718281828459\dots$. Com essa base, a *função exponencial* toma a forma $y = Be^{ax}$, onde e é uma base natural, e a , um parâmetro positivo ou negativo.

Tendo um conjunto de medidas de duas grandezas G e G' e, levando esses dados a uma folha de gráfico com *escala linear*, se o gráfico obtido corresponder a uma *função exponencial*, então a relação funcional entre essas grandezas será da forma

$$G' = B \cdot \exp(aG) = B e^{aG}, \quad (2.3)$$

onde B e a são constantes, podendo assumir valores positivos ou negativos. Nas Figuras 2.9 e 2.10 mostramos a *forma da função exponencial*, usando *escalas lineares* para os casos em que o parâmetro a respectivamente é positivo ou negativo. Se:

♦ $a > 0$, então G tem um *crescimento exponencial* com relação a G' , caso da Figura 2.9.

♦ $a < 0$, então G tem um *decaimento exponencial* com relação a G' , caso da Figura 2.10.

Na equação (2.3), note que, ao fazer $G = 0$, o valor de G' correspondente será o valor do parâmetro B .

Para que a *relação funcional* entre essas grandezas esteja completamente determinada, falta conhecer o valor do parâmetro a . Para isso, recorreremos ao gráfico dos valores dessas grandezas construído em uma folha *mono-log*.

Na Figura 2.11 temos a *forma do gráfico* apresentado em uma folha *mono-log* das grandezas G e G' . Se em (2.3) tomarmos os logaritmos, teremos

$$\log G' = \log B + (a \cdot \log e)G. \quad (2.4)$$

Fazendo em (2.4) $\log G' = y$; $\log B = b$ e $a \cdot \log e = m$, teremos

$$y = b + mx, \quad (2.5)$$

que é a equação de uma reta com inclinação m . Entretanto, como a escala de G' é logarítmica, deve-se lembrar que, para dois valores g'_2 e g'_1 lidos diretamente na escala logarítmica, sua diferença $(\log g'_2 - \log g'_1)$ é o valor que será utilizado no cálculo de m .

O parâmetro a é determinado a partir da relação

$$a = m / \log e = m / 0,4343. \quad (2.6)$$

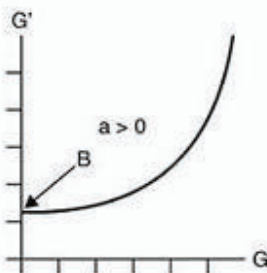


Figura 2.9 Função crescimento exponencial. O valor de B é o valor de G' , quando $G = 0$.

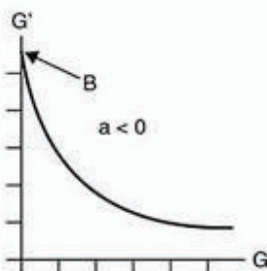


Figura 2.10 Função decaimento exponencial. O valor de B é o valor de G' , quando $G = 0$.

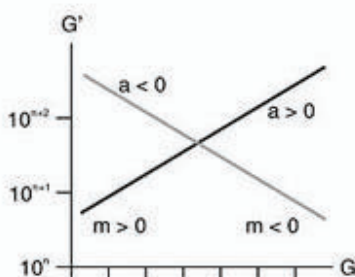


Figura 2.11 Gráficos em uma folha *mono-log* das funções: crescimento (—) e decaimento (—) exponencial.

Assim, vemos que o uso de uma folha mono-log evita o cálculo dos logaritmos das medidas da grandeza G' , além de permitir, por um cálculo bastante simples, a determinação do parâmetro a .

Exemplo: Um organismo unicelular se reproduz por *divisão binária* a uma taxa constante. Se, inicialmente, há *duas bactérias* e cada uma se divide em *duas* a cada 20 minutos, teremos o resultado a seguir.

Número de bactérias N :	2	4	8	16	32	...
Tempo t (minutos):	0	20	40	60	80	...

- Determinar, a partir de um gráfico de N e o tempo t , uma relação funcional entre essas grandezas.
- Calcular o número de bactérias quando $t = 1$ h e $t = 2$ h.

Resolução:

a) A Figura 2.12 mostra o gráfico $N = f(t)$ construído com *escalas lineares*. Este gráfico representa uma *função de crescimento exponencial*; portanto, a relação funcional entre essas grandezas será $N = B \cdot \exp(at)$ ou $N = B \cdot e^{at}$, com $a > 0$. Do gráfico obtemos $N = 2$ bactérias, quando $t = 0$; isto implica que $B = 2$. Logo a relação funcional entre N e t será $N = 2 \exp(at)$ ou $N = 2 \cdot e^{at}$.

Na Figura 2.13 tem-se o gráfico $N = f(t)$ apresentado em uma folha *mono-log*. Este gráfico é uma *reta*, cuja inclinação m é determinada a partir do ΔABC :

$$m = AB/BC = (\log 16 - \log 4)/(60 - 20) = 0,015$$

Utilizando a equação (2.6), calculamos $a = 0,0346$. $\therefore N = 2 \exp(0,0346t)$ ou $N = 2 \cdot e^{0,0346t}$ será a relação funcional entre N e t . Note que a taxa de variação *do número total* de bactérias é proporcional a esse número, ou seja, $(dN/dt) = 0,0346 N$.

Observe que a unidade de $a = 0,0346$ é t^{-1} .

- Da equação determinada em (a), encontraremos:
 - ♦ 1 hora depois de iniciada a *divisão*, 16 bactérias
 - ♦ 2 horas depois de iniciada a *divisão*, 128 bactérias.

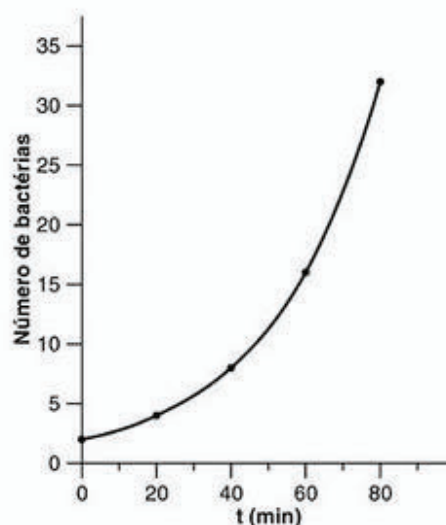


Figura 2.12 As grandezas N e t seguem uma lei de crescimento exponencial. Quando $t = 0$, temos $N = 2$ bactérias.

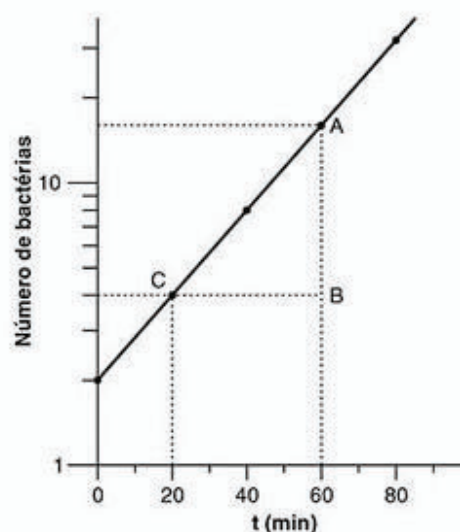


Figura 2.13 Gráfico $N = f(t)$ em escala mono-log. Do ΔABC calculamos que a inclinação da reta é $m = 0,015$.

Exemplo: Considere uma substância que contém átomos radioativos de tecnécio (^{99}Tc). Foram feitas medidas da atividade relativa (A) desse átomo (a definição da *atividade* de uma amostra é dada no final do exemplo) a cada 2 horas, e foram encontrados os valores abaixo:

A:	1	0,79	0,63	0,50	0,40	0,32	0,25
t(h):	0	2	4	6	8	10	12

Determine:

- A partir do gráfico $A = f(t)$, a relação funcional entre essas grandezas.
- Os tempos em que a atividade relativa do ^{99}Tc é 0,5 (50%) e $0,3679 = e^{-1}$.

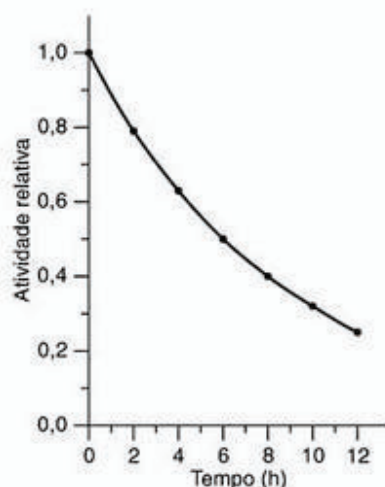


Figura 2.14 As grandezas A e t seguem uma lei de decaimento exponencial. Quando $t = 0$, temos $A = 1$.

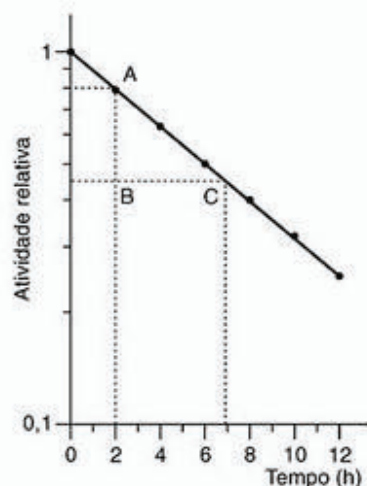


Figura 2.15 Gráfico $A = f(t)$ em escala mono-log. Do ΔABC calculamos que a inclinação reta é $m = -0,05$.

Resolução:

- A Figura 2.14 mostra o gráfico $A = f(t)$ construído com *escalas lineares*. Este gráfico representa uma *função de decaimento exponencial*; portanto, a relação funcional entre essas grandezas será: $A = B \cdot \exp(at)$ ou $A = B \cdot e^{at}$, com $a < 0$. Do gráfico obtemos $A = 1$, quando $t = 0$; isto implica que $B = 1$. Logo a relação funcional entre A e t será $A = \exp(at)$ ou $A = e^{at}$.

Na Figura 2.15 tem-se o gráfico $A = f(t)$ construído em folha *mono-log*. Este gráfico é uma *reta*, cuja inclinação m é determinada a partir do ΔABC :

$$m = AB/BC = (\log 0,8 - \log 0,45)/(2 - 7) = -0,05$$

Utilizando a equação (2.6), calculamos

$a = -0,115$. $\therefore A = \exp(-0,115t)$ ou $A = e^{-0,115t}$ será a relação funcional entre A e t .

- Da equação determinada em (a), encontraremos:

- ◆ $A = 0,5$, quando $t = 6$ horas (tempo de meia-vida dos átomos)
- ◆ $A = 0,3679$, quando $t = 8,69$ horas (tempo de vida média)
- ◆ A *atividade* A de uma amostra de qualquer material radioativo é a taxa pela qual *os núcleos* dos átomos que constituem essa amostra *decaem*. Se em um dado instante t a amostra tem N núcleos, sua atividade A é dada por $A = -dN/dt$. A é expresso em desintegrações/s. A Figura 2.15 mostra que a variação da atividade em função do tempo segue uma *lei de decaimento exponencial*, ou seja, $A = A_0 \cdot \exp(-\lambda t)$ ou $A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$. Onde λ é a constante de decaimento radioativo desses átomos e A_0 é a atividade em $t = 0$.
- ◆ O *tempo de meia-vida* $T_{1/2}$ desses átomos é o tempo necessário para que a atividade A caia a $1/2 A_0$ ou $A_0/2$ ou metade. $\therefore T_{1/2} = \ln 2/\lambda = 0,693/\lambda$. No caso do ^{99}Tc , $T_{1/2} = 0,693/0,115 = 6$ horas.
- ◆ O *tempo de vida média* T , característico do decaimento, é o tempo médio que um núcleo sobrevive antes de decair. $\therefore T = 1/\lambda = T_{1/2}/0,693$. Para o ^{99}Tc , $T = 8,69$ horas. (observe que os produtos $\lambda \cdot \text{tempo}$ são constantes, $\lambda T_{1/2} = \ln 2 = 0,693$ e $\lambda T = 1$.)



2.4 ESCALAS NA BIOLOGIA⁽³⁾

Os cientistas às vezes podem ser classificados como os que *ajuntam ou separam* fatos que ocorrem na natureza. Os que *ajuntam*, geralmente os *físicos*, descobrem leis que ligam fenômenos aparentemente diversos entre si. Os que *separam*, geralmente os das *ciências da vida*, relatam mais a diversidade. Mas há exceções, como é o caso do problema da *escala biológica*, em que ambas as tendências reunidas permitem melhorar a compreensão de fatos conhecidos.

Como relacionar as mudanças de várias características de organismos vivos (duração da vida, frequência cardíaca, rapidez com que convertem energia, etc.) com o tamanho de seus corpos? Para relacionar a *função biológica* dos organismos com seu *tamanho*, recorremos ao conceito de *escala*.

Na biologia o *tamanho* de um *organismo* está diretamente relacionado com suas características e *funções*. Assim, vários problemas da biologia podem ser analisados de maneira simples, relacionando a *forma* e/ou o *tamanho* e/ou o *peso* dos organismos com algumas de suas funções biológicas. Quando nos referimos a um *organismo*, este pode ser único ou constituído de organismos menores.

As propriedades biológicas de um *organismo* são bastante dependentes de seu comprimento, área superficial, volume e massa. Tendo em vista um *comprimento característico* para um organismo complexo, interessa à biologia saber como suas diversas partes dependem desse comprimento. Por exemplo, ao considerarmos 1,80 m de altura como *comprimento característico* para um ser humano, suas diversas partes ou constituintes terão tamanho, volume ou massa associados ao valor desse *comprimento característico*. Como as *funções* dessas partes ou do organismo total podem estar relacionadas com esse comprimento característico? Poderíamos tentar avançar um pouco mais, fazendo o seguinte questionamento: considerando alguma função biológica de um ser humano de *comprimento característico* l , podemos prever essa mesma função biológica para outro ser humano de *comprimento característico* l' ? Ou ainda: podemos prever essa mesma função biológica para uma parte correspondente de outro ser vivo com forma semelhante à do ser humano? Alguns exemplos que apresentamos a seguir ajudarão a chegar a uma resposta.

Crescimento de uma célula

Vamos admitir que uma *célula* tem forma esférica de raio r . Quando esta célula cresce, sua área superficial aumenta ao longo de duas dimensões ($\propto r^2$), mas o volume aumenta ao longo de três dimensões ($\propto r^3$). Sua *sobrevivência* exige uma certa harmonia entre crescimento superficial e de volume. Isso é devido ao fato de que o fluxo de íons e moléculas como O_2 e CO_2 ou, generalizando, o fluxo de nutrientes através de sua superfície desenvolve-se com ritmo mais lento que o de sua *capacidade metabólica*, que é proporcional ao seu volume.

Além disso, vamos admitir também que as propriedades físico-químicas dos componentes celulares não experimentam alterações importantes que possam influenciar seu mecanismo de sobrevivência.

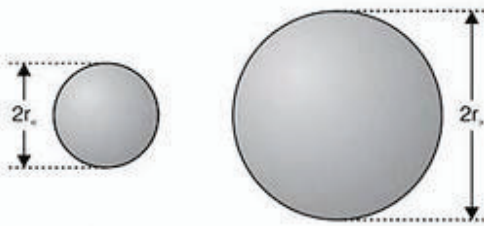


Figura 2.16 Dimensões críticas de uma célula. Toda célula de raio r terá condições para sobreviver, se $r_c < r < r_s$.

Se as dimensões críticas de uma célula são caracterizadas pelos raios r_c e r_s , como se vê na Figura 2.16, então toda célula com raio r *colapsará* se:

- ♦ $r < r_c$, pois seu metabolismo não será suficiente para dar conta do influxo de nutrientes através de sua superfície;
- ♦ $r > r_s$, pois o fluxo de nutrientes através de sua superfície não acompanhará sua capacidade metabólica.

Logo, somente as células com raio $r_c < r < r_s$ conseguirão *sobreviver*. O *fator de sobrevivência* f_s de uma célula pode ser avaliado pela razão entre o fluxo de nutrientes através da superfície celular e sua capacidade metabólica. Isto significa que o desempenho do radiador biológico deve acompanhar o desempenho do motor biológico.

Se o *comprimento característico* desse organismo é r , então o fator de sobrevivência será $f_s \propto 1/r$. Enquanto a célula está *crescendo*, teremos $f_s > 1$, mas quando $r \rightarrow r_s$ o valor de f_s decresce continuamente até chegar a $f_s \equiv 1$.

Considere uma célula com raio igual a r_s e outra com raio r sendo $r_c < r < r_s$. O *fator de escala* entre estas células com formas semelhantes será $L = r_s/r$. Enquanto a célula de raio r estiver crescendo, teremos $L > 1$, e o valor limite do *fator de escala* será $L = 1$. Biologicamente, quando $L < 1$, a célula que está crescendo não conseguirá sobreviver. Logo, quando esta célula atingir um raio $r \equiv r_s$, ela deverá *parar de crescer ou se dividir*. Se a célula se *dividir*, as novas células terão cada uma $f_s > 1$, repetindo-se novamente o ciclo de vida desse organismo.

Resistência em organismos de tamanhos diferentes

As aplicações mais comuns do conceito de *escala* às atividades de animais relacionam-se com a *capacidade*:

- ♦ que seu esqueleto tem para suportar o próprio peso; e
- ♦ para suportar pesos externos, sem afetar seu funcionamento normal.

Há questões relacionadas com o *tamanho de seres vivos*. Por exemplo, pode um rato ser do *tamanho* de um gato ou uma formiga do *tamanho* de um ser humano? Há também questões relacionadas com o *peso* que esses seres vivos podem suportar ou carregar. Estas poderão ser respondidas com *precisão razoável* se encontrarmos uma relação entre o *tamanho* do ser vivo e alguma propriedade relacionada com o *conjunto de atividades* que ele realiza para sobreviver. Os ossos e/ou músculos destes seres são os principais elementos responsáveis por sua *resistência* aos diversos esforços a que são submetidos. Apresentaremos a seguir alguns argumentos que utilizam os conceitos de *comprimento característico* e *escala*, que permitiram esclarecer o papel dos ossos e dos músculos nas atividades desses seres vivos.

- ♦ A *capacidade de um osso* para suportar uma compressão direta ou uma tensão de carga é proporcional à área de sua seção transversal, ou seja, $\propto l^2$, onde l é o comprimento característico do organismo que contém o osso. Conseqüentemente, um animal duas vezes mais alto que outro animal semelhante terá membros capazes para suportar quatro vezes mais carga que o animal menor.

♦ A massa suportada pelos membros de um ser vivo é proporcional a seu volume, ou seja, $\propto l^3$. Portanto, um animal três vezes mais alto que outro animal semelhante suportará uma massa 27 vezes maior que o animal menor.

Na natureza os *pequenos mamíferos* têm formas geométricas diferentes daquelas observadas nos mamíferos de *grande porte*; estes últimos têm ossos avantajados e se sustentam mantendo os membros eretos e pouco vulneráveis a esforço de arqueamento. A Figura 2.17 mostra o que acontece ao úmero no membro anterior de um cavalo, quando este osso experimenta uma força **F** devido à compressão de suas articulações e uma força **P** devido à massa do animal. A seção transversal do osso de área **A** e com diâmetro médio **d** experimenta os efeitos das forças **F** e **P**. O osso se encontra em equilíbrio, logo tomando o momento em relação ao ponto **O**:

$$F \cdot d = P \cdot b \Rightarrow F = Pb/d,$$

sendo $P \propto l^3$, $d \propto l$ e $b \propto l$, então $F \propto l^3$. Como $A \propto l^2$, a força **F** que produz o momento capaz de dobrar o osso *cresce* com taxa maior que a capacidade para resistência do osso. Em resumo, *as forças capazes de dobrar um osso, assim como as forças de carga que o comprimem, crescem com taxa maior que a capacidade de resistência deles.*

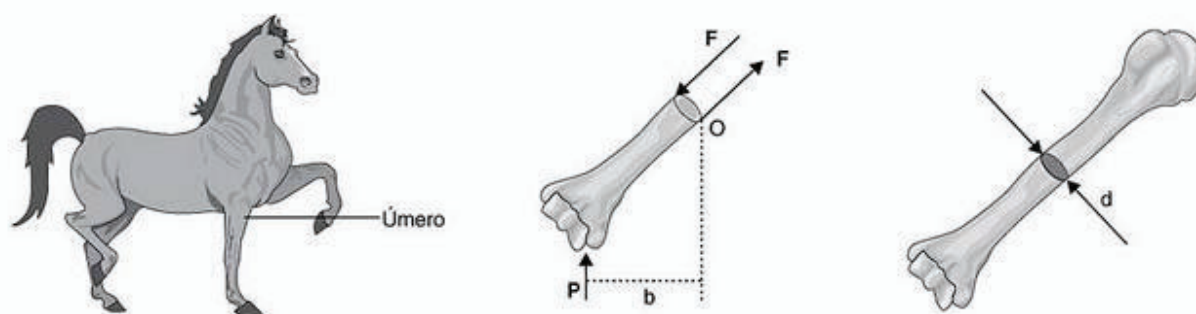


Figura 2.17 Análises das forças transmitidas ao úmero de um cavalo em repouso e seu efeito na seção transversal de diâmetro **d**. A força $F \propto l^3$ deve ser transmitida através de uma área **A** do osso, que é $\propto l^2$.

♦ Os músculos, assim como os ossos, também contribuem *para a resistência* dos seres vivos aos esforços externos e internos. Esse tecido contrátil, além de converter energia química em movimento, assegura a resistência às forças externas. Os músculos estriados dos vertebrados estão organizados em células alongadas ou pacotes de fibras.

A *resistência R* de um músculo é, com grande aproximação, diretamente proporcional ao *número de fibras* no músculo, ou seja, à área de sua seção transversal que, por sua vez, é proporcional à área de sua seção transversal característica (como se vê na Figura 2.18). $\therefore R \propto l^2$.

Quando *comparamos* a resistência muscular a esforço, ou compressão, entre seres vivos de formas semelhantes, a *grandeza mais significativa* é a que mede a razão entre resistência e massa do ser vivo, que denominaremos *resistência específica* R_e . Em função do comprimento característico **l** do ser vivo, teremos

$$R_e = \frac{\text{Resistência}}{\text{Massa}} \propto \frac{l^2}{l^3} = l^{-1}.$$

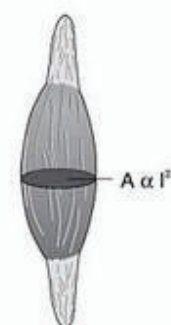


Figura 2.18 Músculo estriado de um vertebrado.

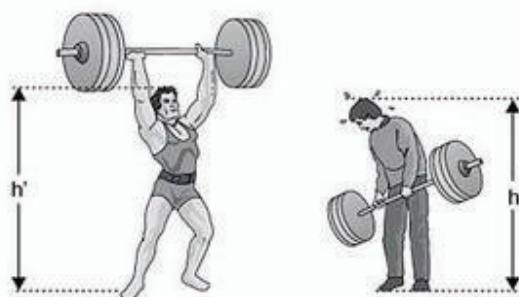


Figura 2.19 A resistência específica de dois organismos pode ser comparada a partir do fator de escala $L = h'/h$.

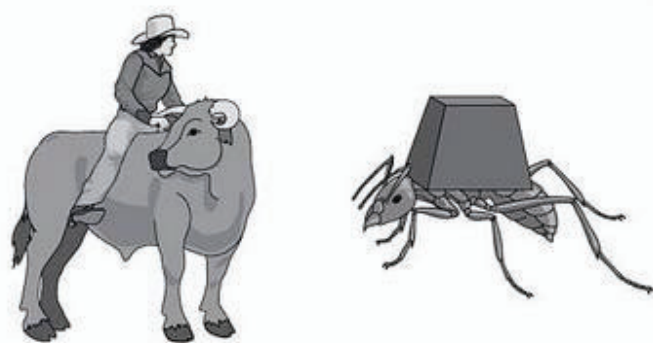


Figura 2.20 O esforço específico dos organismos vivos depende da capacidade muscular deles.

Ao comparar a *resistência específica* de dois seres vivos a partir do fator de escala, como mostra a Figura 2.19, devemos levar em conta que alguns seres vivos utilizam sua capacidade muscular de maneira mais eficiente. Para avaliarmos a *massa* que um ser vivo pode levantar em relação a seu tamanho, devemos analisar a razão entre essa massa e a massa do próprio organismo. Essa razão se denomina *esforço específico* E_e .

Em função do comprimento característico l do organismo teremos

$$E_e = \frac{\text{Massa máxima que levanta}}{\text{Massa do organismo}} \propto \frac{l^2}{l^3} = l^{-1}.$$

Observe que a força experimentada pelo ser vivo, devido à massa máxima que ele pode levantar, dependerá da seção transversal de seus músculos; ou seja, essa força será $\propto l^2$. De acordo com a Figura 2.20, para comparar os *esforços específicos* de dois seres vivos, pode-se usar fator de escala L ; mas, como veremos a seguir, as formas dos organismos também são variáveis a serem consideradas.

Forma e tamanho

Tanto os animais como as plantas crescem até atingir a altura adulta, de modo a suportar a massa corporal nas diversas fases do ciclo de vida. Desenvolver regras, utilizando o conceito de *escala* para explicar a *forma e o tamanho* desses organismos, enquanto suas *proporções se alteram*, tem como ponto de partida as regras de Kleiber⁽⁴⁾. Regras essas resultantes das observações da energia calorífica irradiada por animais com relação a sua massa, para animais com tamanho variando desde um rato até um novilho (boi novo). As conclusões obtidas são um caso em que, *excepcionalmente*, uma lei biológica é derivada de forma muito simples, de leis físicas; e mostram que na biologia, quando há dados suficientes e são usadas as ferramentas matemáticas adequadas, também é possível fazer generalizações quantitativas como talvez seja mais freqüente na física e na química. A Figura 2.21 mostra, em um formato *di-log*, as observações de Kleiber, sendo a inclinação dessa reta $\frac{3}{4}$ (ou 0,75).

À medida que o tamanho dos animais aumenta, desde o pequeno musaranho à enorme baleia-azul, a freqüência cardíaca diminui e a duração da vida aumenta. Um rato simplesmente usa essas pulsações mais rapidamente do que um novilho. Este e vários outros fenômenos variam com o tamanho do corpo, de acordo com um princípio matemático preciso: a *escala de um quarto de potência*. O modelo físico proposto para explicar o que causa certos tipos de escala de quarto de potência pode estender-se ao reino vegetal.

A lei de Kleiber diz que a taxa metabólica de um gato é cerca de 31,6 maior do que a de um camundongo. Mas essa relação, dependente da massa corporal, parece manter-se em todo o reino animal, desde o musaranho até a baleia-azul, e foi posteriormente generalizada aos organismos unicelulares e até mesmo às mitocôndrias presentes no interior das células.

A seguir, utilizando o conceito de *escala*, analisaremos a relação que deve existir entre a *altura h*, que as árvores podem atingir, e o *diâmetro d*, de seu tronco. E logo aplicaremos as conclusões ao caso dos animais. Vamos utilizar o modelo físico de um *cilindro* de altura *h*, suficientemente fino com diâmetro *d*, e com massa *W* atuando no centro de massa do cilindro. Aplicando-se os conceitos de esforço e deformação (a definição desses conceitos encontra-se no Capítulo 3, Seção 3.5) a um material de densidade ρ , mostrou-se⁽⁶⁾ que a altura crítica h_{cr} , para a coluna começar a curvar-se, tem a seguinte dependência em relação a seu diâmetro *d*:

$$\blacktriangleright \quad h_{cr} = 0,851[Y/\rho]^{1/3} d^{2/3}, \quad (2.7)$$

onde *Y* é um parâmetro relacionado com a elasticidade do material. Para chegarmos à equação (2.7), considerou-se que o cilindro é *suficientemente fino*, equivalendo a uma relação $\lambda = (h/d) > 25$. Essa razão se aplica à grande maioria das árvores. Se considerarmos que a massa *W* está distribuída ao longo de toda a extensão do cilindro, a equação (2.7) sofre uma pequena alteração, sendo, nesse caso,

$$\blacktriangleright \quad h_{cr} = 0,792[Y/\rho]^{1/3} d^{2/3}. \quad (2.8)$$

Guardadas as diferenças entre as equações (2.7) e (2.8) pode-se dizer com muita prudência, que, para a estabilidade elástica do cilindro considerado, a *altura crítica do cilindro é proporcional a seu diâmetro elevado à potência 2/3*. Ao aplicarmos essa relação a um *tronco (pedúnculo) de árvore (gramínea)*, a altura crítica do cilindro em (2.7) ou (2.8) será a própria altura da árvore (gramínea).

Vejamos o exemplo a seguir. Um *caule de gramínea* muda suas proporções geométricas quando cresce substancialmente. Seu crescimento é caracterizado pelo parâmetro $\lambda = h/d$ comentado na equação (2.7). Como seria de esperar, o valor de λ para uma família de árvores é um valor médio.

A Tabela 2.1 traz as alturas médias e os valores máximos de λ para algumas *gramíneas*. Para o pé de centeio considerou-se que $d \approx 0,3$ cm, de modo que $\lambda_{max} \approx 500$ caracteriza seu crescimento. Para que o pinheiro tenha $\lambda_{max} = 42$, seu diâmetro deverá ser $\approx 1,70$ m.

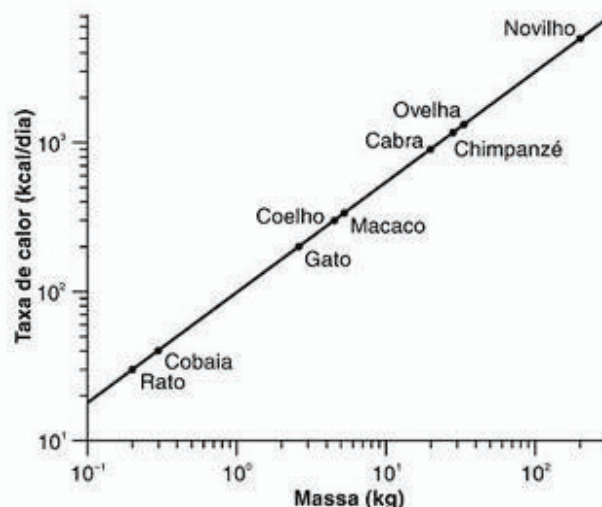


Figura 2.21 Calor produzido por um animal em função de sua massa. A reta tem inclinação $\frac{3}{4}$ — adaptação de Kleiber⁽⁵⁾.

Tabela 2.1 Valores máximos de λ para algumas gramíneas e árvores⁽⁷⁾

	h (m)	λ_{max}
Centeio	1,5	500
Bambu	25 - 40	133
Palmeira	30 - 40	60
Pinheiro	70	42
Eucalipto	130	28

É pouco provável encontrar na natureza uma árvore com diâmetro dessa magnitude. Mas como encontraremos um valor de λ que corresponda aos diâmetros dessas árvores? A resposta exige que saibamos qual é a relação mais freqüente entre h e d para essas árvores. As equações (2.7) ou (2.8) terão a resposta?

Se admitirmos uma forma *cilíndrica* para o tronco, pelo conceito de *escala*, para uma estrutura de altura h , seu volume será $V \propto h^3$, sua massa será $M \propto h^3$, e a resistência interna do tronco $R \propto$ área A da seção transversal será $\propto h^2$. Assim, enquanto h aumenta, M aumenta com taxa maior do que a de R . Logo, a árvore chegará a uma certa altura acima da qual *colapsará* devido a seu próprio peso. Para evitar isso é necessário que a área da seção transversal *aumente com taxa maior* que a de h^2 . Se, por tentativa, considerarmos que $A \propto h^3$, como $A \propto d^2$, então $d^2 \propto h^3$ ou $d \propto h^{3/2}$, essa é a relação que está mais de acordo com os valores encontrados para h e d da maioria das árvores. Além disso, *coincide* com a equação (2.8) e satisfaz a *condição de suficientemente fino*, ou seja, $\lambda = (h/d) > 25$.

Na Tabela 2.2 mostramos valores típicos da altura h de diversas árvores, onde os valores dos diâmetros d são valores médios. Acrescentamos, também, uma coluna dos valores correspondentes de λ . Esses valores de λ estão de acordo com a regra $d^2 \propto h^3$ e principalmente com as estruturas biológicas dos sistemas vivos. Assim, podemos concluir que, *enquanto h aumenta, λ diminui drasticamente*.

No gráfico $d = f(h)$ (com escalas logarítmicas), apresentado na Figura 2.22, a inclinação da reta é $\cong 3/2$.

Tabela 2.2 Valores mais comuns de altura de árvores e os valores de λ correspondentes

h (m)	d (m)	λ
1,5	0,003	500
3,0	0,008	375
9,0	0,04	225
18	0,12	144
36	0,35	102
72	1,0	72
144	2,8	52
288	8,0	36

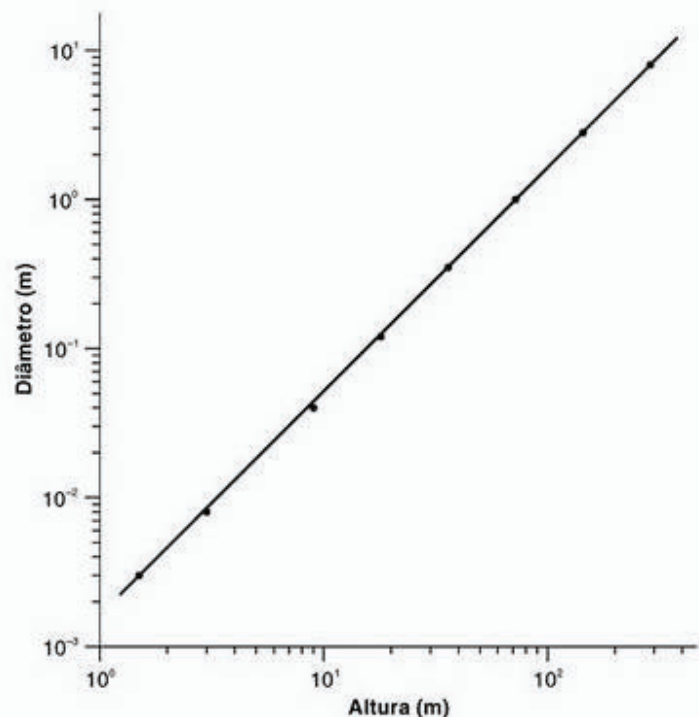


Figura 2.22 Gráfico do diâmetro médio de árvores em função de sua altura. Confirma-se a relação $d^2 \propto h^3$.

Agora considere o quadrúpede da Figura 2.23. Nesses animais, pode-se considerar que a parte onde se concentra a maior massa é a região destacada na figura.

Admitiremos que o comprimento l do quadrúpede é a medida entre seu ombro e o quadril, e d , a largura, mede a espessura média do corpo do animal. O tronco do animal é comparado a um cilindro de diâmetro d e comprimento l , sustentado em seus extremos. Rashevsky⁽⁸⁾ admite que o tronco é como uma viga carregada de modo uniforme e utiliza teoria linear para analisar a relação entre l e d , tendo em vista evitar o dobramento axial da viga. Assim, mostrou que

$$l \propto d^{2/3}. \quad (2.9)$$

Nesse modelo, ao considerar o tronco do animal como uma viga, é o próprio peso da viga que poderá fazê-la ceder ou vergar. Considere, também, que a área da seção transversal dos membros do animal é proporcional ao peso do tronco. A razão $\eta = l/d^{2/3}$ está limitada até um certo valor η_{cr} , de modo que, para todo $\eta > \eta_{cr}$, a viga colapsará. Na Tabela 2.3, apresentamos valores de η para cinco quadrúpedes. Esses valores dependem das unidades de l e de d . É claro que o tronco de um animal é bem mais complexo que uma simples viga, pois tem ossos, músculos e outros órgãos. Portanto, ao aplicarmos à equação (2.9) as dimensões de um quadrúpede, esta nos limitará de modo bastante aproximado os valores de l e d . A Tabela 2.3 mostra que o comprimento do arminho é três vezes sua largura. Se fosse 10 \times maior, $l = 1,20$ m, $d \approx 0,40$ m e $\eta \approx 2,2$; a equação (2.9) prevê que o animal seria tão compacto, que provavelmente não conseguiria se deslocar. Seu tronco ficaria encostado no chão.

Se W é a massa do animal, considerando que suas partes (cabeça, tronco e membros) se alteram na mesma proporção, conforme varia seu tamanho, a massa de qualquer dessas partes será uma fração de W . Pelo conceito de escala $W \propto ld^2$ e pela equação (2.9),

$$l \propto W^{1/4}; d \propto W^{3/8}. \quad (2.10)$$

Esta equação (2.10) tem sido utilizada em trabalhos^(10,11) que verificaram esta proporcionalidade entre l , d e W .

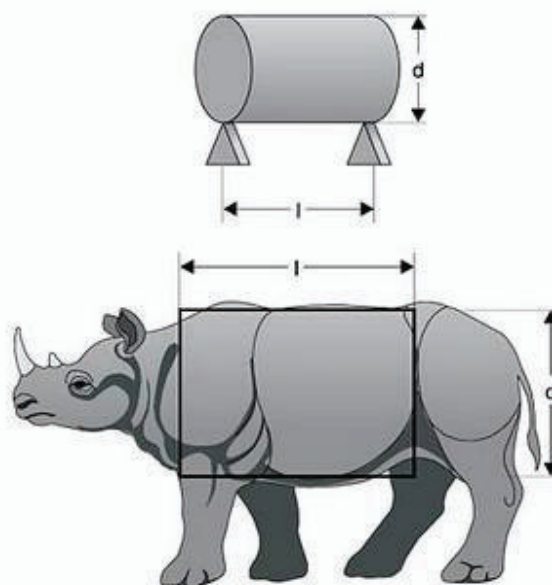


Figura 2.23 Formato típico de um animal quadrúpede. Seu comprimento é l , e sua altura é d .

Tabela 2.3 Valores de l , d e $\eta^{(9)}$ para cinco quadrúpedes.

	l (m)	d (m)	η
Arminho	0,12	0,04	1,03
Cachorro	0,35	0,12	1,44
Tigre da Índia	0,90	0,45	1,53
Lhama	1,22	0,73	1,51
Elefante da Índia	1,53	1,35	1,25



PROBLEMAS

1. A experiência feita com dois conjuntos A e B de pés de milho, para verificarmos o efeito do adubo, está resumida na tabela abaixo. Admita que as alturas são valores médios.

t (semana)	Altura das plantas (cm)	
	A	B
0	0	0
1	15	28
2	28	58
3	47	82
4	60	110

- a) Encontre uma relação entre altura e tempo.
b) Calcule a taxa de crescimento para os conjuntos A (plantas controle, cultivadas sem adubo) e B (cultivadas com adubo).

2. A taxa de mortalidade M em certas populações (número de mortes por unidade de população, por unidade de tempo) aumenta linearmente com a idade t , ou seja, $M = \alpha + \beta t$, onde α e β são constantes. Encontre a população P em função do tempo t , sendo P_0 a população inicial.

3. Na tabela abaixo temos a massa molecular M e o raio r de algumas moléculas.

Substâncias	M (Da)	$r \times 10^{-10}$ (m)
Glicose	180	3,9
Sacarose	390	4,8
Rafinose	580	5,6
Inulina	5 000	12,5
Ribonuclease	13 500	18,0
Lactoglobulina	35 000	27,0
Hemoglobina	68 000	31,0

- a) Faça um gráfico que permita chegar a uma relação linear entre M e r .
b) Determine o raio das moléculas para $M = 250.000$ (catalase), $M = 18$ (H_2O) e $M = 32$ (O_2).

4. Guttman⁽¹²⁾ fez medidas da dependência do tempo t em relação à temperatura T , necessários para que um pulso de corrente contínua excite o axônio de uma lula. As medidas a seguir foram obtidas nesta experiência.

T (°C):	5	10	15	20	25	30	35
t (ms):	4,1	3,4	1,9	1,4	0,7	0,6	0,4

- a) Faça um gráfico com estes dados.
b) Encontre uma relação empírica entre T e t .
5. Os dados a seguir são valores de concentração C de etanol no sangue, em função do tempo t , após a ingestão do etanol (Lynn, et al).⁽¹³⁾

C (mg/dl):	134	120	106	93	79	65	50
t (min):	90	120	150	180	210	240	270

- a) Faça um gráfico a partir desses dados.
 - b) Discuta a taxa de metabolização do álcool.
6. Uma fonte de ouro radioativo (^{198}Au) tem inicialmente 1×10^8 átomos. Passados 2,7 dias, a fonte terá 5×10^7 átomos radioativos; após 5,4 dias, ela terá 25×10^6 átomos; após 8,1 dias, terá $12,5 \times 10^6$ átomos, e assim por diante.
- a) Faça um gráfico desses dados.
 - b) Determine o tempo de *meia-vida* desse elemento.
7. Uma dose D de uma droga, depois de ser aplicada em uma pessoa, faz aumentar a sua concentração plasmática de 0 para C_0 . Depois, a concentração C começa a ter um *decaimento exponencial*.
- a) Em um certo instante τ , que dose da droga deve ser aplicada na pessoa, para elevar sua concentração plasmática novamente a C_0 ?
 - b) O que acontecerá se a dose original for administrada sempre em intervalos τ ?
8. Suponha que células cancerígenas no interior do corpo se reproduzem a uma razão r , tal que o número N de células tem um *crescimento exponencial*, em relação ao tempo t . Em determinado momento, um agente quimioterápico é aplicado para destruir uma fração f das células existentes.
- a) Faça um gráfico de N em função de t , para várias administrações de droga em intervalos de tempo T .
 - b) Que casos diferentes podem ser considerados para relacionar T e r ?
9. Uma célula esférica de raio R divide-se em duas células filhas iguais, cada uma com raio r .
- a) Encontre o fator de escala das células.
 - b) Determine a razão entre a área superficial da célula filha e da célula mãe.
 - c) Qual é a razão entre o volume da célula filha e da célula mãe?
10. Compare a força muscular de pessoas com formas semelhantes, tendo 1,5 m e 1,8 m de altura.
11. Uma mulher tem 1,6 m de altura e 55 kg de massa. Tomando esses dados como referência, qual deverá ser a massa de outra mulher com forma semelhante, tendo 1,7 m de altura?
12. Compare a força relativa de uma formiga gigante (tamanho de um humano adulto) com a de uma formiga normal. Calcule a massa que a formiga gigante conseguiria carregar.
13. Em mamíferos, o volume do coração vezes seu ritmo cardíaco (número de batidas por segundo) é proporcional a sua *taxa metabólica*. Se o fator de escala entre um homem e um determinado macaco for L , qual será a relação entre seus ritmos cardíacos?
14. A energia usada por um mamífero marinho durante o mergulho é igual a sua *taxa metabólica* vezes o tempo que dura a imersão. Se o fator de escala entre dois mamíferos semelhantes for L , qual será a relação entre os tempos em que ambos os mamíferos podem ficar dentro da água?

15. Um homem normal pode levantar objetos com massa de até metade de sua própria massa. Já um gafanhoto pode levantar objetos com massa até 15 vezes maior que a sua. Explique, usando o conceito de *escala*, se isso significa que o gafanhoto é mais forte que o homem.
16. Compare o número de passos por unidade de tempo e o tempo gasto para dar um passo entre animais de formas semelhantes, porém de tamanhos diferentes. Aplique seu raciocínio ao caso de dois homens com 1,8 m e 1,5 m de altura.
17. Qual é a razão entre a altura máxima a que uma pessoa de 1,3 m pode elevar uma massa e a maior massa que uma pessoa de 1,65 m pode levantar? Admita formas e estruturas semelhantes para estas pessoas.
18. Discuta, usando o conceito de *escala*, se é possível que um rinoceronte adulto seja do tamanho de um cachorro adulto.
19. Qual é a relação entre a velocidade de caminhada de duas pessoas com alturas h e h' , sendo $h' > h$.
20. Discuta, utilizando o conceito de *escala*, se é biologicamente possível haver um rato:
 - a) com dimensão linear 10 vezes maior que a de um rato normal; e
 - b) com dimensão linear 10 vezes menor que a de um rato normal.
21. Há árvores com mais de 100 m de altura, com parâmetro λ tendo um valor máximo de 15. Qual será o valor máximo dos diâmetros dessas árvores?
22. Animais que vivem no deserto andam grandes distâncias sem beber água. Usando o conceito de *escala*, encontre uma relação entre a distância máxima que um animal pode caminhar no deserto e seu tamanho.

Referências Bibliográficas

1. MAYNARD, SMITH J. *Mathematical ideas in Biology*. Cambridge University Press, 1980.
2. BATSCHLET, E. *Introduction to mathematics for life scientists*. New York: Springer-Verlag, 1973.
3. STAHL, W.R. Similarity and dimensional methods in biology. *Science*. v.137, n. 3525, p. 205, 1962.
4. KLEIBER, M. *The fire of life: An introduction to animal energetic*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1961.
5. Idem, ibidem.
6. McMAHON, T. Size and shape in biology. *Science*. v. 179, n. 4079, p. 1201-1204, 1973.
7. RASHEVSKY, N. *Mathematical biophysics: Physico-Mathematical Foundations of biology*. 3 rd edition. New York: Dover, 1960. v. I and v. II.
8. Idem, ibidem.
9. BATSCHLET, Op. cit
10. BRODY, S. *Bioenergetics and Growth*. Reinhold, New York, 1945.
11. STAHL, W.R.; GUMMERSON, J.Y. Systematic allometry in 5 species of adult primates (systematic allometry in primates). *Growth*. v. 31, n. 1, p. 21, 1967.
12. GUTTMAN, R. Temperature characteristics of excitation in space-clamped squid axons. *J. Gen. Physiol.* v. 49, n. 5, p. 1007, 1966.
13. LYNN, J.; BENNION, M.D.; TING-KAI, M.D.L. Alcohol metabolism in American Indians and whites. *New England J. Med.* v. 294, n. 1, p. 9-13, 1976.

Capítulo 3

Movimentos, Biomecânica e Elasticidade



3.1 INTRODUÇÃO

Para realizar suas tarefas cotidianas, freqüentemente os seres vivos precisam se *movimentar*. Muitas vezes, esses movimentos são importantes para a própria sobrevivência – seja para se alimentar ou se defender. Aplicando-se as leis físicas aos corpos em movimento, estes *movimentos* geralmente são bastante simples de ser analisados. Na física, os movimentos mais simples são os unidimensionais, sendo um pouco mais complexos os compostos ou bidimensionais. Qualquer análise de um movimento exige determinações das variáveis *deslocamento*, *velocidade* e *aceleração*. Essas variáveis são *quantidades vetoriais*; portanto, representadas por um *vetor*. A seguir faremos um resumo das principais propriedades dessas quantidades⁽¹⁾ (veja a Figura 3.1 e a Figura 3.2).

Para representar uma quantidade vetorial, é necessário conhecer sua magnitude, ou intensidade, e sua direção (normalmente é o ângulo em relação à direção horizontal), sendo sua representação um *vetor*. Por exemplo, na Figura 3.1, o vetor **V** tem magnitude de 3 unidades e inclinação de 30° em relação à direção horizontal.

Para fazermos operações usando *quantidades vetoriais*, é conveniente que os vetores sejam representados por um sistema de eixos cartesianos.

Por exemplo, na Figura 3.2, está representado o vetor **V**, de magnitude *V* e direção θ .

Os componentes desse vetor nas direções *x* e *y* são

$$V_x = V \cos \theta ; V_y = V \sin \theta,$$

e sua inclinação é

$$\theta = \text{tg}^{-1} (V_y / V_x).$$

Logo, o vetor **V** terá a seguinte representação

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j},$$

onde **i** e **j** são vetores unitários (magnitude um) nas direções *x* e *y*, respectivamente.

Note que $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$.

♦ Se temos um conjunto de *n* vetores: **A**₁, **A**₂, ..., **A**_{*n*}, cada um com os componentes, *A*_{*i**x*} e *A*_{*i**y*}, (*i* = 1, 2, ..., *n*), então a soma desses vetores será o vetor

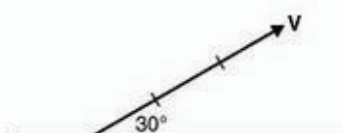


Figura 3.1 Vetor **V** de magnitude 3 e direção de 30°.

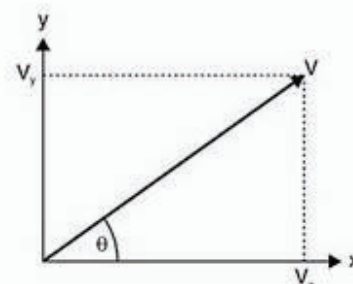


Figura 3.2 Vetor de magnitude *V* e direção θ com os componentes *V*_{*x*} e *V*_{*y*}.

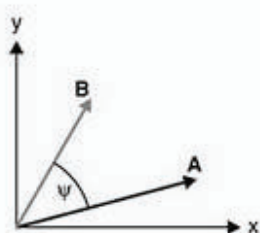


Figura 3.3 Vetores **A** e **B** formando um ângulo ψ .

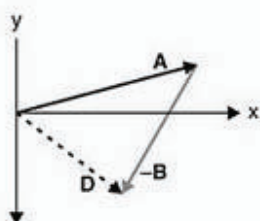


Figura 3.4 Vetor diferença $D = A + (-B) = A - B$.

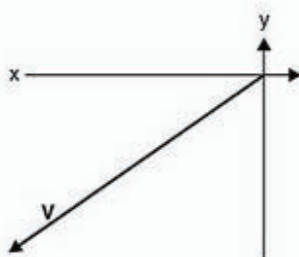


Figura 3.5 Vetor produto vetorial $V = AB \text{ sen}\psi \mathbf{i} \times \mathbf{j}$.

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{S} = S_x \mathbf{i} + S_y \mathbf{j} = \sum_i \mathbf{A}_i = \left(\sum_i A_{ix} \right) \mathbf{i} + \left(\sum_i A_{iy} \right) \mathbf{j} \quad (3.1)$$

de magnitude $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$ e inclinação $\theta = \text{tg}^{-1}(S_y/S_x)$.

♦ Se considerarmos os vetores $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j}$, então

• a *diferença* entre esses vetores será

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x) \mathbf{i} + (A_y - B_y) \mathbf{j};$$

• o *produto escalar* desses vetores será

$$E = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y = AB \cos\psi;$$

• o *produto vetorial* desses vetores será

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{i} \times \mathbf{j} = AB \text{ sen}\psi \mathbf{i} \times \mathbf{j}.$$

Na Figura 3.3 estão representados os vetores **A** e **B** e nas figuras 3.4 e 3.5, os vetores **D** e **V**, respectivamente.

Note que o produto escalar de vetores é uma quantidade *escalar*, enquanto o produto vetorial é um *vetor*, de magnitude $AB \text{ sen}\psi$, orientado na direção perpendicular ao plano formado pelos vetores **A** e **B**.



3.2 MOVIMENTO NO PLANO

Movimento no plano é o movimento que um corpo realiza ao longo de uma *trajetória curva* sobre um plano fixo. Quando conhecemos

♦ *o movimento*, então podemos encontrar a velocidade, a aceleração e a força aplicada ao corpo que está se movimentando;

♦ *a força aplicada ao corpo*, então podemos conhecer a equação do movimento.

Deslocamento e velocidade média

A Figura 3.6 apresenta uma trajetória curva em um plano xy . Quando um corpo se *desloca* do ponto **P** até **Q**, ao longo de sua trajetória, esse *deslocamento* é representado pelo vetor $\Delta \mathbf{r}$. Se Δt é o tempo que o corpo gasta para ir de **P** até **Q**, então definimos o vetor *velocidade média* como

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{V}_m = \Delta \mathbf{r} / \Delta t, \quad (3.2)$$

onde \mathbf{V}_m tem a mesma direção de $\Delta \mathbf{r}$, e \mathbf{V}_m é o mesmo para qualquer trajetória que leve o corpo de **P** até **Q** no tempo Δt .

Velocidade instantânea

Velocidade instantânea é definida em módulo, direção e sentido, como o limite para o qual tende \mathbf{V}_m , quando **Q** se aproxima cada vez mais de **P**. Ou seja,

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{r} / \Delta t) = d\mathbf{r} / dt. \quad (3.3)$$

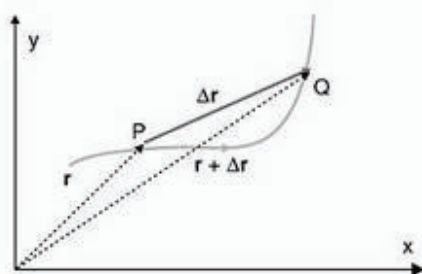


Figura 3.6 Trajetória curva de um corpo em movimento. **P** e **Q** são pontos dessa trajetória, com vetores na posição \mathbf{r} e $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$, respectivamente.

À medida que $Q \rightarrow P$, a direção de $\Delta \mathbf{r}$ se aproxima da direção da tangente da trajetória em P. Portanto, a velocidade instantânea \mathbf{V} em qualquer ponto da trajetória é tangente à trajetória nesse ponto. Na Figura 3.7 mostramos as velocidades instantâneas \mathbf{V} e \mathbf{V}' nos pontos P e Q, respectivamente.

Aceleração

De acordo com a Figura 3.7, a velocidade do móvel, ao ir de P até Q, experimentou uma variação $\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V}' - \mathbf{V}$. Como o tempo gasto é Δt , sua aceleração média será

$$\mathbf{a}_m = \Delta \mathbf{V} / \Delta t, \tag{3.4}$$

quando Q se aproxima cada vez mais de P. Ou seja, quando $\Delta t \rightarrow 0$, a aceleração em P é a *aceleração instantânea*, isto é,

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{V} / \Delta t) = d\mathbf{V}/dt. \tag{3.5}$$

A Figura 3.8 mostra os vetores velocidade e aceleração instantâneas no ponto P da trajetória.

Em geral, de acordo com a Figura 3.9, \mathbf{a} pode ser decomposto em componentes nas direções *normal* (a_n) e *tangencial* (a_t) à trajetória. O componente a_t surge da variação no *módulo* de \mathbf{V} , enquanto a_n surge da variação na *direção* de \mathbf{V} .

Todo movimento realizado com \mathbf{a} constante é denominado *movimento uniformemente acelerado* (MUA). As equações (3.5) e (3.3), depois de integradas, nos darão a velocidade e a posição em qualquer instante t :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \tag{3.6}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2} \mathbf{a}t^2, \tag{3.7}$$

onde \mathbf{v}_0 e \mathbf{r}_0 são, respectivamente, a velocidade e a posição no instante $t = 0$. Sendo $\mathbf{a} = \text{constante}$, tanto a direção como o módulo do vetor aceleração não mudam. Se o MUA gerar uma trajetória na direção horizontal x , ou seja, $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$ e $\mathbf{a} = a_0\mathbf{i}$, então as equações (3.6) e (3.7) ficam simplificadas para a forma

$$v = v_0 + a_0t \tag{3.8}$$

e

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2} a_0t^2, \tag{3.9}$$

onde v_0 e x_0 são, respectivamente, a velocidade e a posição no instante $t = 0$. Os termos nas equações (3.8) e (3.9) são *escalares*, pois o movimento, por ser unidimensional, não exige variáveis vetoriais. Nas Figuras 3.10 e 3.11 estão representados, respectivamente, os gráficos das equações 3.8 e 3.9.

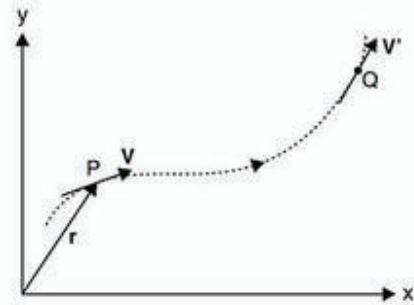


Figura 3.7 Os vetores velocidade instantânea \mathbf{V} e \mathbf{V}' são respectivamente tangentes à trajetória nos pontos P e Q.

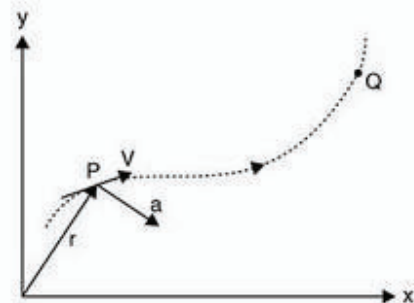


Figura 3.8 O vetor aceleração instantânea \mathbf{a} no ponto P da trajetória do movimento.

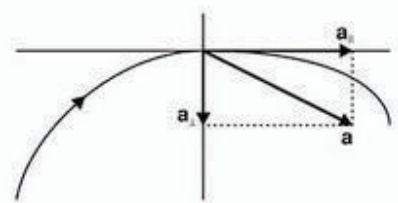


Figura 3.9 O vetor aceleração instantânea \mathbf{a} tem componentes normal (a_n) e tangencial (a_t) à trajetória.

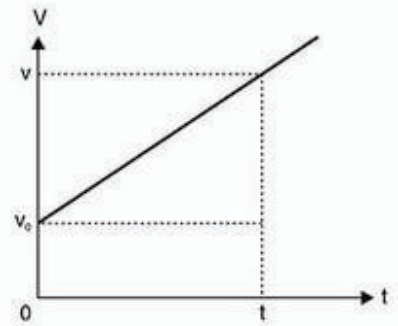


Figura 3.10 Gráfico $V = f(t)$ para um MUA; a inclinação da reta é o valor a_0 da aceleração.

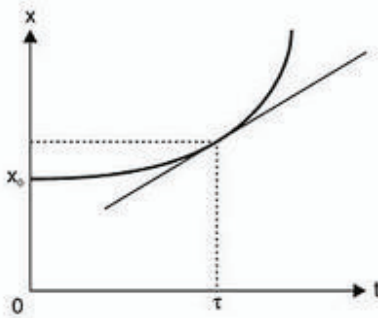


Figura 3.11 Gráfico $x = f(t)$ para um MUA; a inclinação da tangente ao gráfico, no instante τ , é a velocidade neste instante.

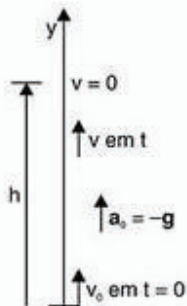


Figura 3.12 MUA com aceleração negativa, para uma trajetória vertical no sentido de baixo para cima.

Na Figura 3.10 encontramos $a_0 = (v - v_0)/t$, ou $t = (v - v_0)/a_0$. Substituindo este valor do tempo em (3.9), encontramos a seguinte relação para a velocidade:

$$\blacktriangleright \quad v^2 = v_0^2 + 2a_0(x - x_0). \quad (3.10)$$

O movimento de *queda livre* gera uma trajetória vertical (direção y); nesse tipo de movimento os corpos experimentam uma aceleração constante $a_0 = g = 9,8 \text{ m/s}^2$, na direção vertical e no sentido de cima para baixo. Logo trata-se de um MUA que, de acordo a Figura 3.12, terá as seguintes equações quando o movimento for de baixo para cima:

$$\blacktriangleright \quad v = v_0 - gt \quad (3.11)$$

$$\blacktriangleright \quad y = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2. \quad (3.12)$$

Como o corpo está sofrendo uma desaceleração constante, em determinado momento sua velocidade poderá ser nula ($v = 0$). Quando isto acontecer, ele terá alcançado uma altura h , que dependerá da velocidade inicial v_0 :

$$\blacktriangleright \quad v_0^2 = 2gh. \quad (3.13)$$

Primeira aplicação: velocidade da caminhada

Considere uma pessoa cuja *perna* tem comprimento l , e T é o tempo necessário para que o mesmo pé toque o chão em duas passadas consecutivas. Logo $T/2$ será o tempo necessário para dar só um passo. Segundo o conceito de *escala*, podemos dizer que, ao dar um passo, o humano avança aproximadamente l . Se N for o número de passos por unidade de tempo, então $N = 1/(T/2) \propto 1/T$. Como a caminhada pode ser considerada um movimento periódico de amplitude l e período T , assim como está representado na Figura 3.13, então $T \propto \sqrt{l}$. A *velocidade de caminhada* v_c é N vezes a distância correspondente a um passo, logo,

$$v_c = N \cdot l \propto l / \sqrt{l} \propto \sqrt{l}.$$

Discussões baseadas no custo energético da forma *bipedal*, usada pelos seres humanos para caminhar, argumentam que assim é possível cobrir grandes distâncias de maneira econômica^(2,3). Porém, alguns biólogos sustentam que, devido a essa forma de caminhar, a locomoção dos seres humanos é mais *ineficiente* se for comparada com a de outros animais.

O conceito de *andadeiro* tem sido aplicado principalmente à locomoção terrestre sobre pernas ou patas, porém é usual aplicar-se a outras formas de locomoção^(4,5).



Figura 3.13 Jovens caminhando: cada passo é $\approx l$, onde l é o comprimento da perna.

Segunda aplicação: velocidade de corrida dos seres humanos

Inicialmente devemos saber se a corrida é de *longa, média ou curta distância*, pois, em cada caso, a velocidade média \bar{v} alcançada pelos atletas é diferente. Durante um tempo limitado, geralmente o atleta mantém uma velocidade igual a sua velocidade máxima. Se calcularmos as velocidades médias \bar{v} correspondentes às provas típicas das *competições de atletismo*, notaremos que, no caso dos homens, \bar{v} *aumenta* em corridas de até $d \approx 200$ m, enquanto em corridas para $d > 200$ m \bar{v} *decrece*. A Figura 3.14 mostra esse comportamento de \bar{v} em função da distância d . Os valores de \bar{v} foram calculados com base nos últimos tempos *recordes mundiais* conseguidos nas respectivas provas de atletismo.

Na Figura 3.15 mostramos como varia a velocidade v de um atleta em função do tempo t para uma prova de 200 m. Após $t \approx 2$ s, o atleta atinge uma velocidade próxima de 10,5 m/s, sua *velocidade máxima*. Para essa distância, a velocidade média é *menor* que a velocidade máxima e, se o período de aceleração é aproximadamente *o mesmo* para um corredor de distâncias curtas, então, como mostra a Figura 3.14, a velocidade média para $d = 200$ m é *maior* que para $d = 100$ m.

Para *médias e longas distâncias*, a velocidade média do atleta começa a *decrecer* à medida que a distância *aumenta*, pois o suprimento de O_2 começa a diminuir, tornando-se insuficiente para a demanda. O atleta inicia seu esgotamento de O_2 entre 200 m e 400 m.

Observações feitas em primatas^(6,7), correndo com dois ou quatro membros, mostram que o consumo de energia é o mesmo em ambas as situações. Como o custo energético para transportar o corpo é o *mesmo*,

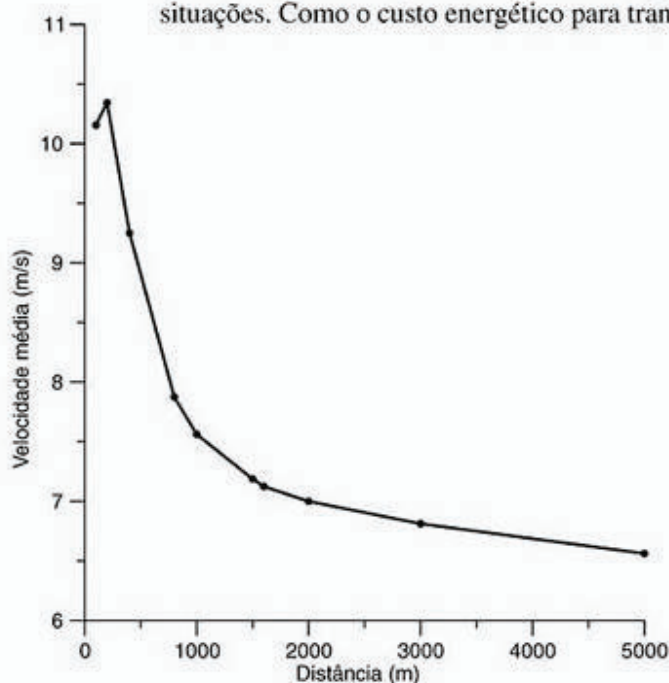


Figura 3.14 Velocidades médias observadas nas corridas de curta, média e longa distância. Os tempos correspondem aos recordes mundiais para cada distância em agosto de 2002.

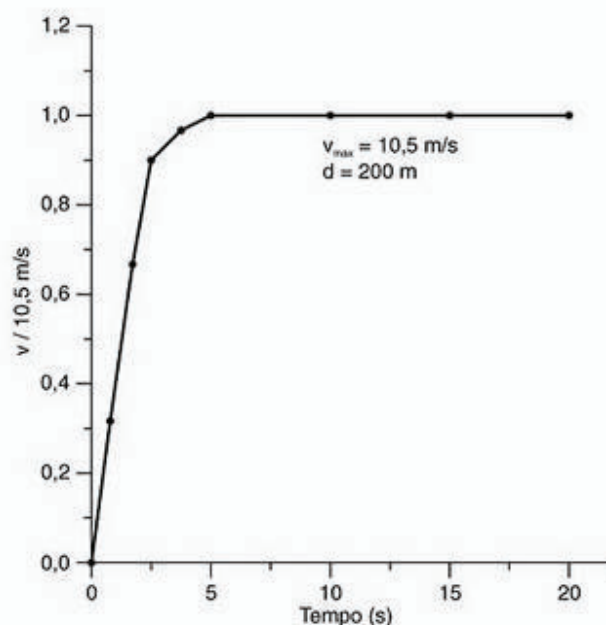


Figura 3.15 Variação do valor v normalizado em função de t para uma corrida de curta distância (200 m).

seja usando quatro ou dois membros, é preciso outro argumento para explicar a vantagem ou a desvantagem que o ser humano teria por se locomover com dois membros^(8,9). Logo adiante analisaremos a transformação da energia nas diferentes formas de locomoção de animais e seres humanos.

Exemplo: Um objeto com velocidade constante $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ m/s iniciou seu movimento da origem de um plano xy . Qual será sua posição 10 s depois de ter iniciado o movimento?

Resolução: A velocidade tem componentes constantes: $v_x = 2$ m/s e $v_y = 4$ m/s. Logo após 10 s, o objeto terá avançado nas direções

$$\text{horizontal: } x = v_x t = 20 \text{ m}$$

$$\text{e vertical: } y = v_y t = 40 \text{ m}$$

\therefore a posição do objeto será

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = 20\mathbf{i} + 40\mathbf{j} \text{ m.}$$

Exemplo: Admita que a posição de um objeto movimentando-se na direção x seja dada por $x = 5 + 2t + 10t^2$, sendo x expresso em metros e t , em segundos. Em relação ao objeto, qual será sua

- Posição inicial?
- Velocidade em qualquer instante?
- Aceleração?

Resolução:

a) Quando $t = 0$, a posição do objeto será $x_0 = 5$ m.

b) Para determinar a velocidade em qualquer instante, tomamos a derivada da posição em relação ao tempo, ou seja,

$$v = \frac{dx}{dt} = 2 + 20t \text{ m/s.}$$

c) A aceleração será a derivada da velocidade em relação ao tempo, ou seja,

$$a = \frac{dv}{dt} = 20 \text{ m/s}^2.$$

Logo, o objeto tem um MUA.

Exemplo: Um gato precisa se deslocar 100 m para alcançar um ratinho morto. Quando o gato começa a correr, com aceleração uniforme de 1 m/s^2 , uma coruja, que está 20 m acima do gato, tem uma velocidade de 5 m/s. Se a coruja seguir uma trajetória retilínea, qual deverá ser sua aceleração para alcançar o ratinho juntamente com o gato?

Resolução: O gato tem uma velocidade inicial nula, e um MUA, com $a = 1 \text{ m/s}^2$. Logo, se t for o tempo necessário para o gato chegar até o ratinho, então

$$100 \text{ m} = \frac{1}{2} (1 \text{ m/s}^2)t^2 \Rightarrow t = 14,14 \text{ s.}$$

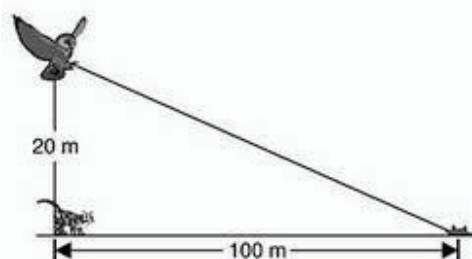
A coruja, para alcançar o ratinho nesse mesmo tempo t , precisa percorrer uma distância

$$d = \sqrt{20^2 + 100^2} = 101,98 \text{ m.}$$

Como a coruja tem MUA, velocidade inicial de 5 m/s e aceleração desconhecida, então

$$101,98 \text{ m} = (5 \text{ m/s})(14,14 \text{ s}) + \frac{1}{2} a(14,14 \text{ s})^2 \Rightarrow a = 0,31 \text{ m/s}^2.$$

Esta deve ser sua aceleração para alcançar o ratinho juntamente com o gato.



Exemplo: Quanto tempo leva um objeto para cair de uma altura de 40 m , partindo do repouso? Que distância esse mesmo objeto percorreria no dobro do tempo?

Resolução: O objeto tem um movimento de queda livre, com velocidade inicial nula,

$$\therefore 40 \text{ m} = \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2)t^2 \Rightarrow t = 2,86 \text{ s}$$

será o tempo necessário para cair 40 m . Para um tempo $2t = 5,72 \text{ s}$, o objeto terá uma queda de

$$H = \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2)(5,72 \text{ s})^2 = 160 \text{ m.}$$



3.3 MOVIMENTO COMPOSTO OU PARABÓLICO

Movimento composto é o movimento resultante da *composição* de um movimento com *velocidade uniforme* na direção horizontal, e um MUA com aceleração uniforme $a = g$ na direção vertical. A trajetória resultante é *parabólica*, como mostra a Figura 3.16. As equações desse movimento são as seguintes

direção x : $a_x = 0$

$$v_x = v_{0x}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t,$$

direção y : $a_y = -g$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2} gt^2.$$

A Figura 3.16 mostra a posição (x_0, y_0) , a velocidade inicial (v_{0x}, v_{0y}) e a velocidade em qualquer instante t .

Note que, no movimento de subida e descida, as velocidades para uma mesma altura têm o mesmo módulo.

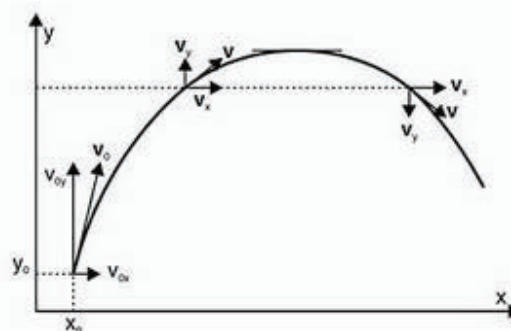


Figura. 3.16 Trajetória parabólica de um movimento composto, com velocidade inicial v_0 e posição inicial (x_0, y_0) .

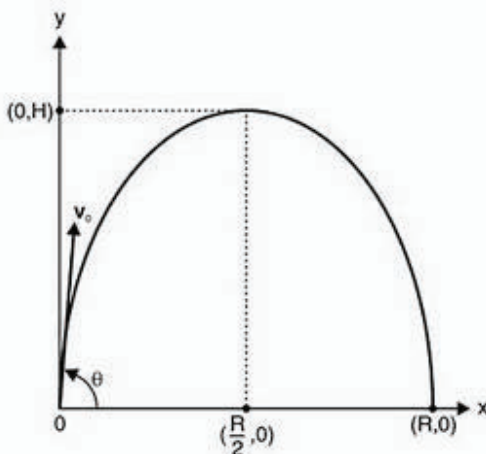


Figura 3.17 Movimento parabólico com velocidade inicial v_0 . A trajetória alcança a altura e o afastamento máximos H e R , respectivamente.

Considere $x_0 = y_0 = 0$, conforme a Figura 3.17. Se a velocidade inicial v_0 tem inclinação θ , então

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

A altura máxima dessa trajetória tem coordenadas $x = R/2$ e $y = H$. Nessa posição, $v_y = 0$, logo,

$$v_{0y} = g\tau,$$

ou seja,

$$\tau = v_0 \sin \theta / g \quad (3.14)$$

será o tempo empregado para alcançar a *altura máxima* H , portanto,

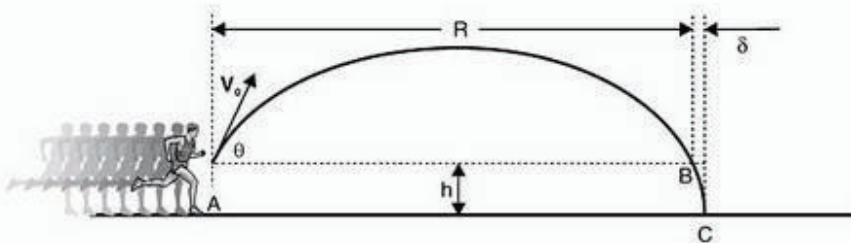
$$H = (v_0 \sin \theta)\tau - \frac{1}{2} g\tau^2 = v_0^2 \sin^2 \theta / 2g. \quad (3.15)$$

No instante 2τ a trajetória atinge seu *afastamento máximo* R , portanto,

$$R = 2\tau v_{0x} = v_0^2 \sin 2\theta / g. \quad (3.16)$$

Primeira aplicação

Um atleta vai realizar um *salto em distância*. Quando iniciar o salto, ele terá uma velocidade de 10,5 m/s. Se o seu centro de massa estiver a 60 cm do chão, a que distância o atleta saltará? Não considere o efeito da resistência do ar.



Discussão: No ponto A da trajetória AC do *centro de massa* do atleta, a velocidade inicial v_0 terá os componentes

$$v_{0x} = 10,5 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad v_{0y} = 3,43 \text{ m/s},$$

pois, ao iniciar o salto, ele está com uma velocidade $v = 10,5$ m/s na direção horizontal. Como, ao iniciar o salto, o *centro de massa* está a 0,6 m do chão, o componente vertical de v_0 será

$$v_{0y} = \sqrt{2(9,8 \text{ m/s}^2)(0,6 \text{ m})} = 3,43 \text{ m/s}.$$

A inclinação e a magnitude de v_0 serão, respectivamente,

$$\theta = \text{tg}^{-1}(v_{0y}/v_{0x}) = \text{tg}^{-1}(3,43/10,5) = 18,09^\circ$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 11,05 \text{ m/s}.$$

No ponto B da trajetória, a velocidade do atleta também será 11,05 m/s. Logo, usando a equação (3.16), poderemos calcular o afastamento máximo

$$R = v_0^2 \sin 2\theta / g = (11,05 \text{ m/s})^2 \sin 36,18^\circ / (9,8 \text{ m/s}^2) = 7,35 \text{ m.}$$

O ponto C da trajetória é a posição do *centro de massa* do atleta ao bater no chão. Se τ é o tempo necessário para fazer a trajetória BC, então

$$0,6 \text{ m} = v_{0y}\tau + \frac{1}{2} g\tau^2 = (3,43 \text{ m/s})\tau + \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2)\tau^2 \Rightarrow \tau = 0,145 \text{ s.}$$

Logo, o afastamento horizontal δ será

$$\delta = v_{0x}\tau = (10,5 \text{ m/s}) 0,145 \text{ s} = 1,52 \text{ m.}$$

Assim, o salto em distância do atleta será $R + \delta = 8,87 \text{ m}$. Esse resultado não levou em consideração o efeito da resistência do ar. *Normalmente* os atletas que praticam essa modalidade de esporte não são corredores de curta distância (com a honrosa exceção do norte-americano C. Lewis). Assim, considerar $v_{0x} = 10,5 \text{ m/s}$ está um pouco além da velocidade inicial que esses atletas podem alcançar. Os recordes mundiais (até julho de 2002) de 8,95 m para homens e 7,52 m para mulheres mostram que os atletas dessa modalidade, além de aumentarem a velocidade com que iniciam o salto, tentam aproveitar favoravelmente o efeito da resistência do ar durante o salto.

Segunda aplicação

Observações do salto de uma pulga⁽¹⁰⁾ mostraram que a trajetória do salto é parabólica e que a velocidade inicial v_0 é próxima de 1,3 m/s, com uma inclinação θ de aproximadamente 87° . Com esses dados, mais a Figura 3.18, discuta qual deve ser a aceleração produzida pelas patas da pulga para que ela realize este salto.

Discussão: Considerando $v_0 = 1,3 \text{ m/s}$ e $\theta = 87^\circ$, então, de acordo com as equações (3.15) e (3.16), a *altura e o afastamento* máximos do salto serão, respectivamente,

$$H = (1,3 \text{ m/s})^2 (\sin^2 87^\circ) / 2(9,8 \text{ m/s}^2) \approx 9 \text{ cm}$$

$$R = (1,3 \text{ m/s})^2 (\sin 174^\circ) / (9,8 \text{ m/s}^2) \approx 2 \text{ cm.}$$

Da Figura 3.18 extraímos que a pulga, para dar este salto, encolheu suas patas durante um tempo médio de aproximadamente 1,25 ms. Logo, usando (3.8), encontramos que a aceleração, devido à ação dos músculos das patas, será

$$a = v_0/t = (1,3 \text{ m/s}) / (1,25 \times 10^{-3} \text{ s}) \approx 100 \text{ g.}$$

Ou seja, aproximadamente cem vezes maior que a aceleração da gravidade terrestre.

No caso do salto de um gafanhoto^(11,12) observou-se que o afastamento máximo de seu salto é cerca de 80 cm, e a inclinação da trajetória em seu ponto inicial é $\approx 55^\circ$. Logo, usando (3.16), podemos calcular a velocidade inicial do salto

$$v_0^2 = gR / \sin 2\theta = (9,8 \text{ m/s}^2)(0,8 \text{ m}) / \sin 110^\circ.$$

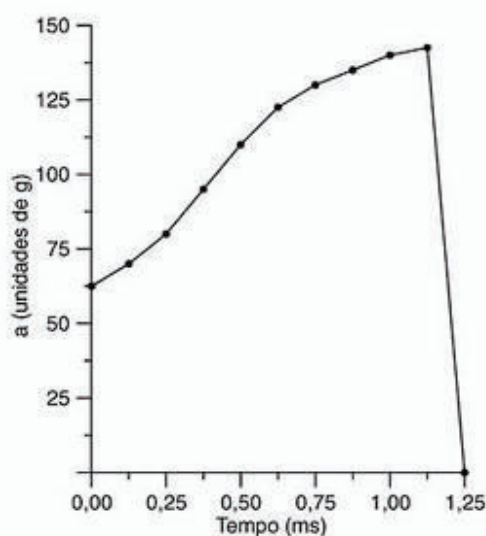
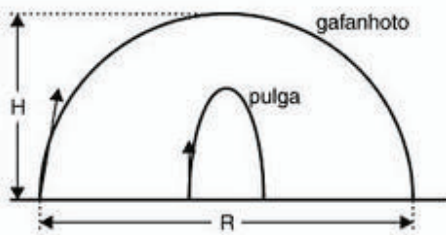


Figura 3.18 Variação da aceleração durante os primeiros ms do salto da pulga. (Adaptado de Rothschild et al, Op. Cit.)



Logo, $v_0 \approx 2,89$ m/s. Com essa velocidade, calculamos que a altura máxima H que o salto do gafanhoto alcança é ≈ 30 cm. Como ≈ 30 ms é o tempo médio durante o qual os músculos de suas patas se encolheram para dar o salto, a aceleração devido à ação desses músculos será

$$a = v_0/t = (2,89 \text{ m/s})/(30 \times 10^{-3} \text{ s}) \approx 10 \text{ g},$$

ou seja, aproximadamente 10 vezes maior que a aceleração da gravidade terrestre.

O movimento composto de um sapo foi analisado por Marsh⁽¹³⁾, através de uma visualização obtida com filme de alta velocidade.

3.4 MOVIMENTO RELATIVO

Muitas vezes, um objeto que está em movimento encontra-se em um meio que também está se movimentando. É o caso de um passageiro caminhando no corredor de um trem em movimento ou o caso de um peixe nadando em um rio com correnteza. Estes meios também podem estar em movimento em relação a um terceiro, e assim por diante. Esses movimentos são denominados *movimentos relativos*. Nestas situações, tanto a posição quanto a velocidade do objeto somente podem ser especificadas em relação a um meio.

Por exemplo, se um trem, puxando uma longa plataforma, tem uma velocidade v_{PT} em relação à Terra, e se nesta plataforma um automóvel se deslocar com velocidade v_{AP} em relação à plataforma, então a velocidade do automóvel em relação à Terra será

$$\blacktriangleright \quad v_{AT} = v_{AP} + v_{PT}. \quad (3.17)$$

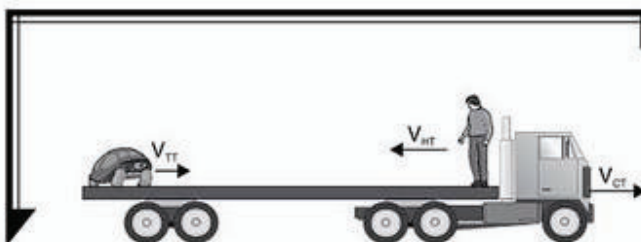
Se uma barata caminha sobre o assoalho de um automóvel com velocidade v_{BA} em relação ao automóvel, então sua velocidade em relação à Terra será

$$\blacktriangleright \quad v_{BT} = v_{BA} + v_{AT} = v_{BA} + v_{AP} + v_{PT}. \quad (3.18)$$

Matematicamente, qualquer *velocidade relativa* pode ser transferida de um lado para outro de uma equação, bastando, para isso, trocar o sinal do vetor em (3.17),

$$\blacktriangleright \quad v_{AP} = v_{AT} - v_{PT} = v_{AT} + v_{TP} \quad (3.19)$$

pois, geralmente, $v_{PQ} = -v_{QP}$.



Exemplo: Sobre a plataforma de um caminhão que se desloca com velocidade uniforme de 15 m/s, uma tartaruga avança na razão de 0,2 m/s, e um homem caminha em direção à tartaruga com velocidade de 1 m/s. Quais serão as velocidades da tartaruga e do homem em relação à Terra?

Resolução: Admita que o movimento dos três corpos ocorre na direção x . Os vetores velocidades do caminhão em relação à Terra e da tartaruga e do homem em relação ao caminhão, serão respectivamente

$$v_{CT} = 15\mathbf{i}; \quad v_{TC} = 0,2\mathbf{i} \quad \text{e} \quad v_{HC} = -1\mathbf{i}.$$

Os módulos desses vetores estão em m/s.

Portanto, a velocidade da tartaruga em relação à Terra será

$$v_{TT} = v_{TC} + v_{CT} = 15,2\mathbf{i} \text{ m/s}$$

e a velocidade do homem em relação à Terra será

$$v_{HT} = v_{HC} + v_{CT} = 14\mathbf{i} \text{ m/s}.$$



3.5 FORÇAS E BIOMECÂNICA

Na *biomecânica*, usando leis e conceitos da mecânica, interpretamos e explicamos uma série de fenômenos que ocorrem quando um *ser vivo* está em repouso ou em *movimento*. Todo corpo que está inicialmente em *repouso*, acionando alguns de seus músculos, poderá se locomover. Por análise mecânica, é possível entender total ou parcialmente o *movimento* desse corpo. Esta ação sinérgica de ossos e músculos, no caso dos vertebrados, se manifesta como *forças*. São os *efeitos* dessas forças sobre um corpo que o faz movimentar-se.

A simplicidade ou complexidade das forças que atuam sobre um corpo em movimento depende do tipo de movimento e da estrutura do corpo. Um beija-flor ao voar realiza movimentos que algumas outras aves não conseguem realizar. Isso se deve a diversos fatores físicos e biológicos que influenciam esse tipo de locomoção; também existem no reino animal, animais que *correm* mais rapidamente que outros. A *biomecânica*, utilizando leis gerais da física e mais especificamente da mecânica, tenta explicar essa diferença nos *movimentos* de seres vivos. Mas como utilizar estas leis? Essa é a discussão que iniciamos a seguir.

Forças fundamentais e derivadas

Como a força é uma *grandeza vetorial*, para descrevê-la, qualquer que seja sua natureza, é necessário conhecer a *direção* em que ela atua e também sua *intensidade* (valor quantitativo em termos de uma unidade-padrão de força). No SI a força é expressa em *newton* (N), e no sistema cgs, em *dina*. A Figura 3.19 representa uma força de 3 N, orientada a θ° em relação à horizontal. Para operar forças matematicamente, seguimos todas as regras aplicadas às quantidades vetoriais.

As *forças fundamentais* são forças de interação entre corpos macroscópicos e/ou partículas elementares. Essas forças podem ser:

- ◆ *Gravitacionais*, resultantes da interação entre massas.
- ◆ *Eletromagnéticas*, resultantes da interação entre cargas elétricas.
- ◆ *Nucleares fortes*, de curto alcance, resultantes da interação entre *núcleons* (nêutron ou próton).

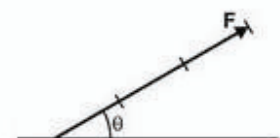


Figura 3.19 Vetor F com 3 N de intensidade e orientado θ° .

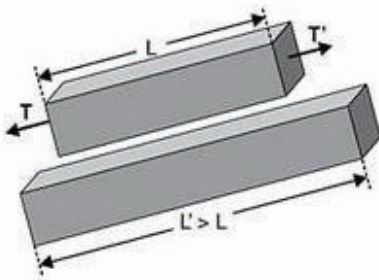


Figura 3.20 Corpo de comprimento L , submetido a esforço de tração.

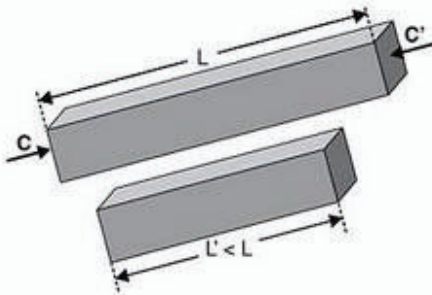


Figura 3.21 Corpo de comprimento L , submetido a esforço de compressão.

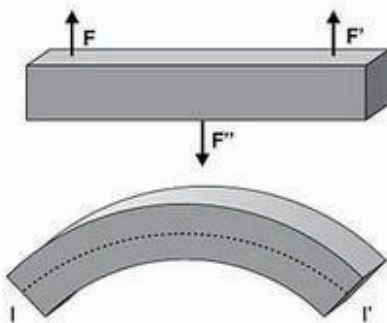


Figura 3.22 Corpo submetido a esforço de flexão.



Figura 3.23 Corpo submetido a um esforço de torção.

♦ *Nucleares fracas*, de curto alcance, que provocam instabilidade em núcleos e partículas elementares.

Qualquer outra forma de força é uma *força derivada*, como, por exemplo, as forças elásticas, de contato, musculares, moleculares, etc.

Na *biomecânica*, analisamos principalmente os efeitos das forças denominadas *derivadas*; estas podem ser de origem externa ao corpo onde agem ou resultantes do efeito de vários componentes do corpo.

Forças elásticas

Ao serem submetidos a certos *esforços*, geralmente os corpos sofrem *deformação* em suas dimensões lineares. Nestas condições, a deformação sofrida dependerá do esforço aplicado, de sua forma geométrica e da natureza do material de que é constituído. Esses esforços deformantes podem ser:

♦ *Tração*: quando o corpo é submetido à ação de duas forças, com sentidos relativos de *afastamento*, aplicadas em pontos diferentes. Como se vê na Figura 3.20, o corpo sofrerá um *alongamento* na direção em que agem as forças e um *encurtamento* perpendicularmente a essa direção.

♦ *Compressão*: quando o corpo é submetido à ação de duas forças, com sentidos relativos de *aproximação*, aplicadas em pontos diferentes. Como se vê na Figura 3.21, o corpo será *encurtado* na direção das forças e experimentará um *alongamento* perpendicularmente a essa direção.

♦ *Flexão*: quando o corpo é submetido pelo menos à ação de três forças, sendo duas no mesmo sentido e outra em sentido contrário. Como se vê na Figura 3.22, o corpo sofrerá *compressão* em uma superfície e *tração* em outra, devido à distribuição das forças na parte interna do corpo. O corpo deformado apresentará uma *linha neutra* II', onde a ação de força resultante é nula.

♦ *Torção*: quando um corpo é submetido à ação de *pares de força*, que agem em sentidos opostos e em planos diferentes. Na Figura 3.23 está representado o efeito de dois pares de força; as partes externas do corpo serão *torcidas* na direção da sua parte interna, que formará o eixo de torção.

A *elasticidade* de um corpo, ou seja, sua capacidade de retornar à forma inicial (depois que um esforço deformador deixou de agir) pode ser caracterizada por um parâmetro denominado *constante de força* ou *de elasticidade*. Na Figura 3.24, a força de deformação F , aplicada a um corpo que tem um comprimento inicial L_0 , o alongará em ΔL .

Enquanto a intensidade da força aplicada satisfaz a relação

$$\blacktriangleright F = \kappa \cdot \Delta L, \quad (3.20)$$

sendo κ a constante elástica do material que constitui o corpo, estamos na *região elástica do corpo*. Ao retirarmos F , o corpo voltará a sua dimensão inicial. A equação (3.20) é denominada *lei de Hooke*; lei que caracteriza a elasticidade dos materiais em geral. Essa lei é válida para materiais de composição homogênea.

É usual avaliar-se o *grau de elasticidade* de um material usando-se uma constante Y , denominada *módulo de Young* e definida como

► $Y = \text{Tensão/Deformação} = (F/A)/(\Delta L/L_0)$, (3.21)

onde Y terá unidades de N/m^2 . Note que em (3.21), e como se vê na Figura 3.24, entendemos como *deformação* a relação $\Delta L/L_0$, ou seja, a variação da dimensão do corpo em relação a seu tamanho antes de o esforço ser aplicado. A *tensão* é a relação entre o esforço aplicado e a área A da seção do corpo onde aplicamos F . Nas Figuras 3.25 e 3.26, mostramos as áreas A e A' , respectivamente.

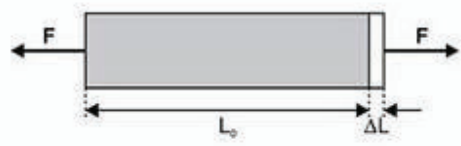


Figura 3.24 Corpo de constante elástica κ experimenta um esforço F , que produz uma deformação ΔL .

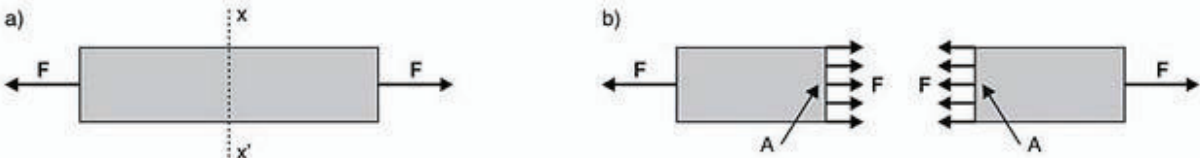


Figura 3.25 a) Esforço de tração F aplicado a um corpo de seção transversal uniforme. xx' é um plano transversal ao corpo.
b) A tração F distribui-se de maneira uniforme na área A .

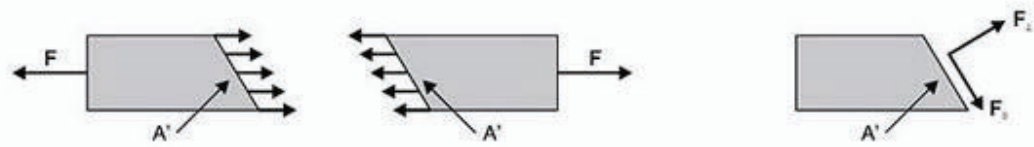


Figura 3.26 O esforço de tração F aplicado em uma seção de corpo de área A' pode ser decomposto em esforço tangencial $F_{||}$ e normal F_{\perp} .

Quando analisamos o efeito do esforço na seção do corpo de área A' , como se vê na Figura 3.26, o esforço é decomposto em um componente normal F_{\perp} e outro tangencial $F_{||}$, de modo que temos uma tensão normal $= F_{\perp}/A'$ e uma tangencial $= F_{||}/A'$, onde

$$F^2 = F_{\perp}^2 + F_{||}^2.$$

A Figura 3.27 mostra um gráfico característico *tensão = f(deformação)*, que se aplica a um grande número de materiais sólidos. Nesse gráfico, o trecho $0 \rightarrow 1$ é a região de *proporcionalidade*. Nessa região, o módulo de elasticidade do material é constante, dependendo apenas da natureza do material. No trecho $1 \rightarrow 2$, a relação entre a tensão e a deformação não é linear. O trecho $0 \rightarrow 2$ define a *região elástica* do material. No trecho $2 \rightarrow 3$, o corpo está permanentemente deformado até chegar ao valor em 3, conhecido como *ponto de ruptura*. O trecho $2 \rightarrow 3$ define a *região inelástica* do material.

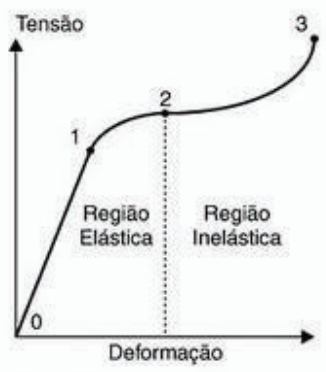


Figura 3.27 Forma característica do gráfico tensão = f (deformação) para um material sólido.

Por exemplo, no *intervalo linear*, para o aço duro e para o osso compacto (tíbia de boi), temos os seguintes valores experimentais:

	Tração máxima (N/m ²)	Compressão máxima (N/m ²)	Y (N/m ²)
Aço duro	$82,7 \times 10^7$	$55,2 \times 10^7$	$2,07 \times 10^{11}$
Osso compacto	$9,8 \times 10^7$	$14,7 \times 10^7$	$1,79 \times 10^{10}$

No caso dos *ossos*, como este material normalmente faz parte de uma estrutura em *movimento*, estará permanentemente submetido a forças intrínsecas ou extrínsecas. Este osso possui uma grande resistência física, porém uma pequena resistência fisiológica. A *resistência física* é determinada pelas forças internas que se opõem às forças externas, mantendo o corpo em equilíbrio.

A constituição de um osso é de aproximadamente 70% de componentes minerais e 20% de proteínas, sendo o restante substâncias de adesão e água.

O componente mineral são os cristais inorgânicos de *hidroxiapatita*, enquanto o componente protéico são as fibras orgânicas de *colágeno*. As propriedades viscoelásticas do osso devem-se a estes dois componentes. A Figura 3.28 é um gráfico típico da *região linear* da tensão e deformação, para um osso e seus componentes mineral e protéico. Notamos que seu componente mineral é o que garante a resistência desse material a um esforço. O colágeno contribui muito pouco para a resistência à compressão e pode ter contribuição expressiva para a resistência à tração.

A propriedade dos ossos de *resistir* aos esforços recebidos é consequência do arranjo de suas lâminas trabeculares; são esses arranjos que dão origem à força interior que se opõe à exterior, dando a este material uma grande *resistência física*. Como as *estruturas ósseas* dos animais são diferentes entre si, geralmente a *resistência* dos ossos a esforços de tração ou de compressão varia de uma espécie para outra.

Por exemplo, no caso do *fêmur* humano e de outros animais, este osso apresenta diferentes *resistências* às tensões deformadoras de tração ou de compressão que são mostradas a seguir⁽¹⁴⁾:

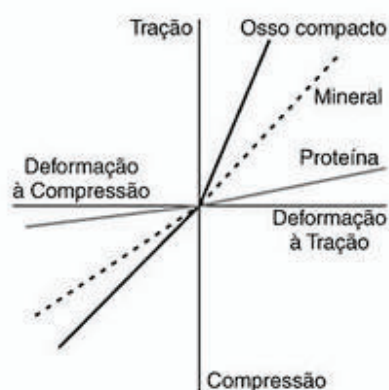


Figura 3.28 Relação linear entre tensão e deformação para um osso compacto e seus componentes mineral e protéico.

O primeiro quadrante refere-se ao caso em que a tensão é uma tração, e o terceiro, ao de uma compressão.

Espécie	Tração $\times 10^7$ N/m ²	Compressão $\times 10^7$ N/m ²
Homem	12,4	17,0
Cavalo	12,1	14,5
Boi	11,3	14,7
Cervo	10,3	13,3
Javali	10,0	11,8
Porco	8,8	10,0
Avestruz	7,1	12,0

Note que a variação máxima da *resistência* deste osso entre as espécies anteriormente citadas é um fator da ordem de 1,7. Uma discussão interessante foi feita por Bonser⁽¹⁵⁾ para calcular o *módulo de Young* aplicado aos constituintes da pata de uma avestruz.

Nos humanos, os ossos resistem às tensões de modo diferente. Além dos arranjos das trabéculas, há outros fatores. Por exemplo, nas *vértebras* é importante a curvatura da coluna vertebral; na *clavícula* são importantes as duas curvaturas e as duas bordas; no *úmero* é importante a concavidade no terço inferior do eixo longitudinal; no *fêmur* são importantes as formas da diáfise e duas epífises; na *tíbia* são importantes a forma da diáfise com uma concavidade dirigida para fora em seu terço superior e outra dirigida para dentro em seu terço inferior, ambos girando sobre o seu eixo longitudinal.

Exemplo: Um músculo sofre uma força de compressão; o gráfico tensão-deformação das fibras musculares é apresentado na figura ao lado.

o gráfico tensão-deformação das fibras musculares é apresentado na figura ao lado.

- Determine o módulo de Young, para tensões de $1; 2,5$ e $3,5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$.
- Faça o gráfico do módulo de Young em função do esforço aplicado.

Resolução: Do gráfico tensão-deformação, vemos que, para as tensões $1; 2,5$ e $3,5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, as deformações são, respectivamente, $0,18; 0,79$ e $1,5$.

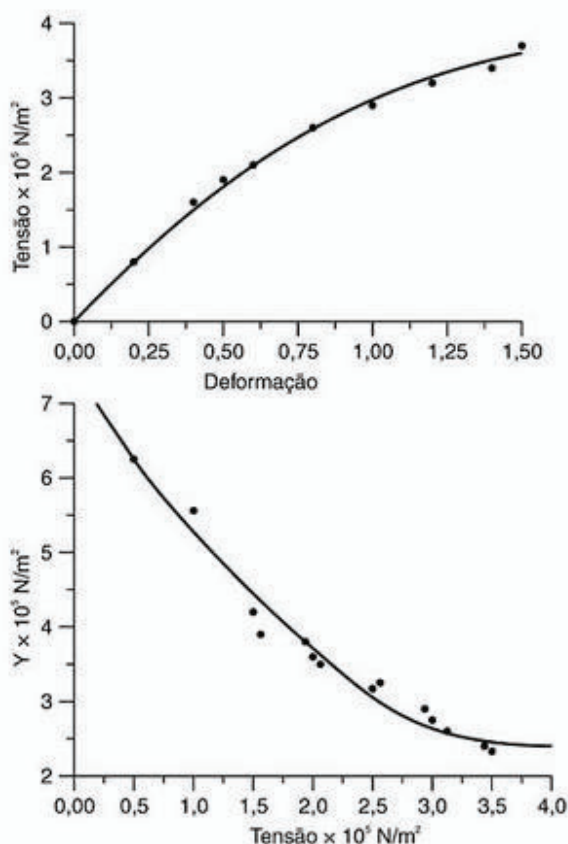
Portanto, os módulos de Young serão respectivamente:

$$Y = 1,0 \times 10^5 / 0,18 = 5,56 \times 10^5 \text{ N/m}^2;$$

$$Y = 2,5 \times 10^5 / 0,79 = 3,17 \times 10^5 \text{ N/m}^2;$$

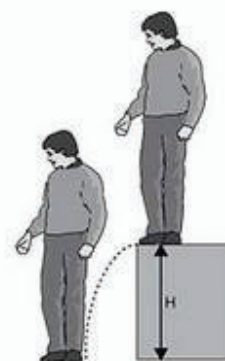
$$Y = 3,5 \times 10^5 / 1,50 = 2,33 \times 10^5 \text{ N/m}^2.$$

- Do gráfico Y-tensão, concluímos que, quando a tensão *decrece*, o módulo de Young *Y aumenta*.



Exemplo: A *tíbia* é o osso mais vulnerável da perna do ser humano. Esse osso sofre fratura para esforços de *compressão* da ordem de $5 \times 10^4 \text{ N}$. Suponha que um homem com 75 kg de massa salte de uma altura H e, ao cair no chão, *não dobre os joelhos*. O esforço que a tíbia sofre faz com que ela tenha um encurtamento $\Delta l \approx 1 \text{ cm}$. Qual deverá ser o valor máximo de H para que esse osso não frature?

Resolução: Com (3.13) determinamos a velocidade v , com a qual os pés do homem chegam ao chão: $v^2 = 2gH$. Ao tocar o chão, a tíbia sofre uma força



média de compressão F , que provoca uma deformação Δl . Esta deformação acontece com uma aceleração média a ; assim, de acordo com a (3.10)

$$2gH = 2a\Delta l \Rightarrow a = g(H/\Delta l).$$

A intensidade da compressão será

$$F = mgH/\Delta l;$$

onde m é a massa do humano.

Se $F = 5 \times 10^4 \text{ N}$, então temos que

$$H = (5 \times 10^4 \text{ N})(0,01 \text{ m}) / (75 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) \approx 0,7 \text{ m}.$$

Assim, ignorando a ação muscular, se um homem com 75 kg saltar de alturas menores que 70 cm e cair de pé, não terá sua tíbia fraturada.

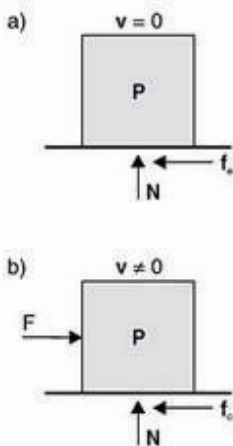


Figura 3.29 Corpo de peso P em repouso (a) e em movimento (b); as forças de atrito são, respectivamente, a estática f_e e a cinética f_c .

Forças de atrito

Outro tipo de *força derivada* bastante comum é a *força de contato*. A origem dessa força é o contato físico entre dois corpos. As *forças de atrito* são um caso típico de forças de contato. A intensidade dessa força depende do coeficiente de atrito entre as superfícies dos corpos que estão em contato.

Na Figura 3.29 temos um corpo de peso $P = mg$, em repouso e em movimento. A massa do corpo é m . Em qualquer dessas situações:

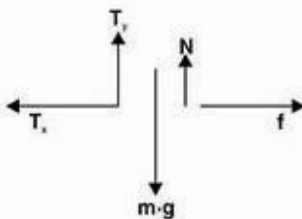
$N = P$: componente de vínculo ou força normal de contato.

Quando o corpo está em *repouso*, $f_e = \mu_e N$: força de atrito estático.

Quando o corpo está em *movimento*, devido à ação da força externa, F , $f_c = \mu_c N$: força de atrito cinético. μ_c e μ_e são respectivamente os coeficientes de atrito cinético e estático. Para a mesma superfície, geralmente $\mu_c < \mu_e$.



Exemplo: Considere um paciente com 70 kg submetido a um esforço de *tração*, como se vê na figura ao lado. Qual será o valor máximo da massa M , para que o esforço T produzido não desloque o paciente ao longo da cama? Considere o coeficiente de atrito entre a cama e as roupas do paciente igual a 0,2.



Resolução: Sobre o paciente de massa m , agem forças derivadas e fundamentais. Como o sistema paciente-massa M está em equilíbrio, então

$$Mg = T \Rightarrow M = T/g \quad (1)$$

$$N + T_y = m \cdot g \Rightarrow N = m \cdot g - T \cdot \sin 30^\circ \quad (2)$$

$$f = \mu \cdot N = T \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow N = T \cdot \cos 30^\circ / \mu \quad (3)$$

$$\text{de (2) e (3), } T = \mu \cdot m \cdot g / (\cos 30^\circ + \mu \cdot \sin 30^\circ) \quad (4)$$

Finalmente, de (1) e (4) achamos que o valor máximo de M deverá ser

$$M = \mu \cdot m / (\cos 30^\circ + \mu \cdot \sin 30^\circ) = (0,2 \times 70 \text{ kg}) / (\cos 30^\circ + 0,2 \cdot \sin 30^\circ) = 14,5 \text{ kg}.$$

Força muscular

Força muscular é um conjunto de forças cuja origem está no *tecido muscular*. Fisiologicamente, nesse tecido, acontecem interações de certas proteínas que experimentam mudanças de configuração, proporcionando, assim, uma *contração* rápida e voluntária. A ação dessa força é consequência da seguinte transformação de energia

$$\text{Energia Química} \Rightarrow \text{Energia Mecânica} + \text{Energia Térmica.}$$

A Figura 3.30 mostra a constituição básica de um tecido muscular. O músculo estriado é constituído por *fibras longas*, cujos extremos estão ligados a *tendões* (a). Essas fibras são células muito compridas com muitos núcleos (b). Cada fibra contém muitas *miofibrilas*, ou conjunto paralelo de filamentos contráteis (c). As miofibrilas estão divididas em sarcômeros (unidade contrátil do músculo) pelas *linhas Z* (d). Entre as linhas Z, quando o músculo está *relaxado*, temos *filamentos grossos e finos* regularmente espaçados (e). Durante a *contração* do músculo, os filamentos finos deslizam entre os grossos (f), encurtando o sarcômero (o que se vê com maior detalhe na Figura 3.31).

Ao *excitar* um ponto qualquer do organismo, essa excitação é conduzida pelos neurônios até o cérebro e retorna por outros neurônios com a ordem até que atinge a placa motora, que, por sua vez, provoca a *contração* do músculo (mais detalhes deste mecanismo de excitação serão estudados no capítulo 8).

A força máxima que um músculo pode exercer depende da área de sua seção transversal. No homem essa força está dentro do intervalo de 2,7 a $3,6 \times 10^5 \text{ N/m}^2$. Por exemplo, para um músculo exercer uma força de 530 N, deverá haver uma seção transversal entre 15 a 20 cm^2 .

A *contração* de um músculo é medida pela alteração da força exercida em seus *pontos fixos* ou pelo seu simples encurtamento. De acordo com o efeito final, ou seja, com o movimento produzido no corpo, as contrações experimentadas pelos músculos podem ser:

- ♦ *Estática* ou *isométrica*: Neste caso, a tensão produzida é insuficiente para mover um segmento do corpo ante uma determinada resistência. Externamente, o músculo *não* altera seu comprimento, porém, internamente, ele experimenta um equilíbrio entre as tendências ao encurtamento dos elementos contráteis e ao alongamento dos elementos elásticos. No tecido muscular ocorre a transformação

$$\text{Energia Química} \Rightarrow \text{Energia Térmica.}$$

- ♦ *Dinâmica* ou *isotônica*: Neste caso, a tensão produzida pode mover uma parte do corpo ante uma determinada resistência, produzindo um trabalho mecânico. No tecido muscular acontece a seguinte transformação

$$\text{Energia Química} \Rightarrow \text{Energia Mecânica} + \text{Energia Térmica.}$$

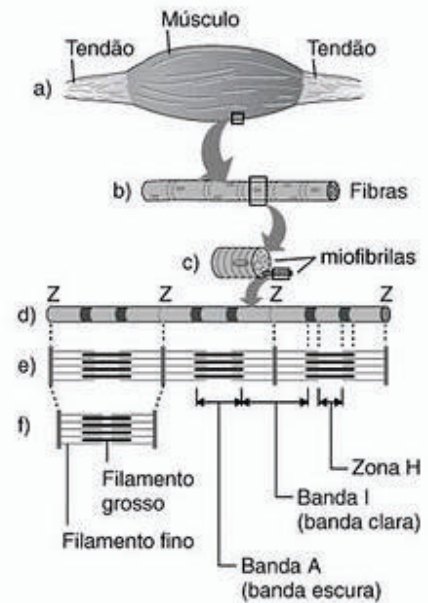


Figura 3.30 Tecido muscular (a), suas fibras (b) e miofibrilas (c). Divisão em sarcômeros das miofibrilas (d) com o músculo relaxado (e) ou contraído (f).

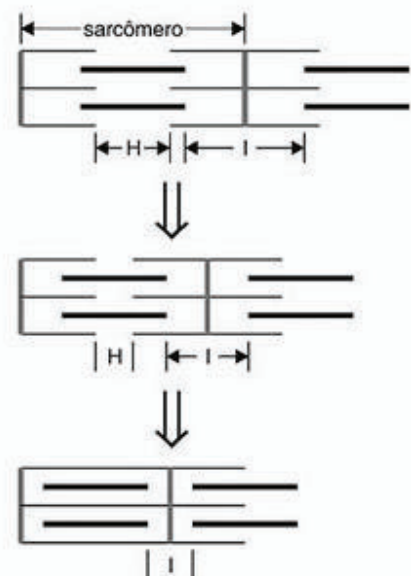


Figura 3.31 Durante a contração de um músculo, a banda I e a zona H encurtam, produzindo aproximação entre os tendões, que por sua vez estão inseridos nos ossos.

As contrações isotônicas podem ser de dois tipos:

- *Concêntrica*: Quando há encurtamento das fibras musculares e o trabalho final é visível.
- *Excêntrica*: Quando há um alongamento das fibras; ainda que haja contração, isso é superado pela resistência encontrada.

As Figuras 3.32 e 3.33 mostram modelos de contração isométrica e isotônica, respectivamente. No primeiro caso, tanto a origem quanto a inserção do músculo estão fixas. No segundo caso, só uma extremidade é fixa.

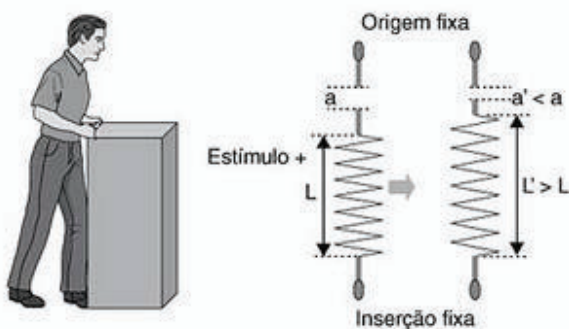


Figura 3.32 Pessoa tentando deslocar um objeto fixo no chão. Contração muscular isométrica: os elementos elásticos tendem a se alongar e os contráteis a se encurtar. O comprimento da fibra muscular não se altera.

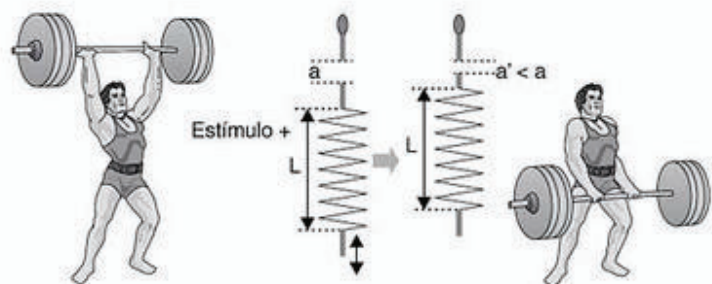


Figura 3.33 Contração muscular isotônica: os elementos elásticos não se alteram, enquanto os contráteis se encurtam ou alongam. As fibras musculares sofrem variação em seu comprimento.

Dependendo da localização de um músculo e do tipo de movimento executado, a *força muscular* produzida pode ser vista como resultante de componentes que atuam especificamente no movimento de uma parte do corpo. Na Figura 3.34 temos o caso de dois segmentos ósseos e um músculo, cuja origem *O* se encontra num segmento e a inserção *I*, em outro.

A força muscular *F* terá um componente rotador *R* e um componente estabilizador *E*. Quando o segmento ósseo *AC* se movimenta no sentido anti-horário, em torno da articulação *A*, tanto o componente *R* como o ângulo de tração ϕ aumentam, enquanto o componente *E* diminui. É evidente que esse efeito do músculo deve-se ao tipo de movimento desse segmento ósseo.

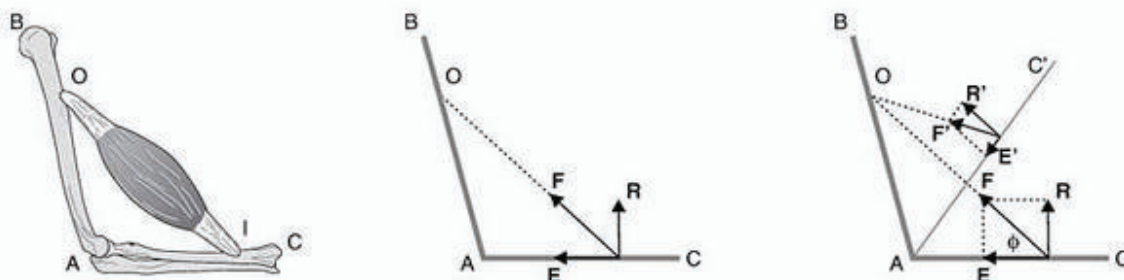


Figura 3.34 Músculo com origem *O* e inserção *I*, atuando sobre os ossos *AB* e *AC*. *R* e *E* são respectivamente os componentes rotador e estabilizador da força muscular *F*. Quando o osso *AC* muda para a posição *AC'*, o ângulo de tração ϕ da força *F'* aumenta, sendo de $R' > R$ e $E' < E$.

Um estudo bastante detalhado sobre *vertebrados*, relacionando a função dos músculos com a elasticidade do tendão, foi feito por Alexander⁽¹⁶⁾, que mostra a grande importância dessas articulações para o movimento dos ossos.

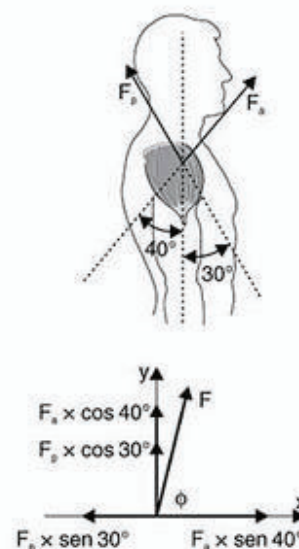
Exemplo: O músculo deltóide tem um formato triangular e movimenta o braço. Considere que as partes anterior e posterior deste músculo fazem esforços de 55 N e 35 N, respectivamente, para elevar o braço. Determine a direção e a magnitude da força **F** exercida pelo músculo.

Resolução: Devemos encontrar a força resultante **F** de duas forças conhecidas. De acordo com o diagrama de forças, nas direções *x* e *y* teremos as seguintes resultantes

$$F_x = F_{ax} - F_{px} = 55 \times \sin 40^\circ - 35 \times \sin 30^\circ = 17,85 \text{ N}$$

$$F_y = F_{ay} + F_{py} = 55 \times \cos 40^\circ + 35 \times \cos 30^\circ = 72,44 \text{ N.}$$

Magnitude da força resultante: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 74,61 \text{ N}$
 Direção da força resultante: $\phi = \text{tg}^{-1}(F_y/F_x) = 76,16^\circ$.



Exemplo: O músculo quadríceps se encontra na coxa e seu tendão chega até a perna. Considere a perna ligeiramente dobrada de modo que a tensão **T** no tendão seja 1 400 N. Determine a direção e a magnitude da força **F**, exercida pelo fêmur sobre a patela.

Resolução: Como o sistema de ossos na articulação da perna e o tendão do quadríceps estão em equilíbrio, a resultante das forças **T** e **F** deverá ser nula. De acordo com o diagrama de forças, nas direções *x* e *y* teremos, respectivamente,

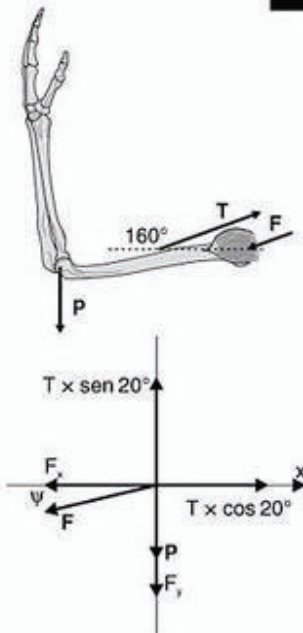
$$F_x - 1400 \times \sin 20^\circ - 1400 \times \sin 55^\circ = 0 \Rightarrow F_x = 1\,625,64 \text{ N}$$

$$F_y + 1400 \times \cos 55^\circ - 1400 \times \cos 20^\circ = 0 \Rightarrow F_y = 512,56 \text{ N}$$

∴ a magnitude e a direção da força de contato **F** serão, respectivamente,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 1\,704,53 \text{ N} \quad \text{e} \quad \phi = \text{tg}^{-1}(F_y/F_x) = 17,5^\circ$$





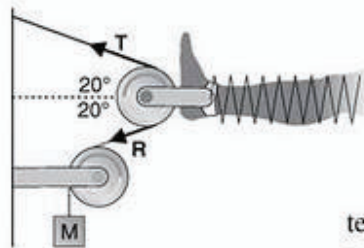
Exemplo: Considere que, em um braço esticado, o músculo deltóide exerce uma força de tração T , que forma um ângulo de 20° com o úmero. Entre esse osso e o ombro existe uma força de contato F . Se o peso P do membro superior completo é 35 N e $T = 300\text{ N}$, determine F , para que o úmero se mantenha em equilíbrio.

Resolução: Para que o úmero se mantenha em equilíbrio, a força resultante sobre esse osso deverá ser nula. Considerando que a força P age no extremo anterior do úmero, esse sistema de três forças terá resultante nula nas direções x e y , ou seja,

$$T \times \cos 20^\circ - F_x = 0 \Rightarrow F_x = 281,91\text{ N}$$

$$T \times \sin 20^\circ - P - F_y = 0 \Rightarrow F_y = 67,61\text{ N.}$$

\therefore a magnitude e a direção da força de contato F serão, respectivamente, $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 289,90\text{ N}$ e $\phi = \text{tg}^{-1}(F_y/F_x) = 13,49^\circ$. Logo, $\psi = \phi - 180^\circ = 163,49^\circ$.



Exemplo: Uma perna engessada é submetida às tensões T e R produzidas pela massa suspensa M . Nessa situação, a perna experimenta uma tração longitudinal de 90 N . Suponha que a perna é elevada até que T seja horizontal e faça um ângulo de 35° com R . Qual será a magnitude e a direção da força F experimentada pela perna?

Resolução: Inicialmente a perna está em equilíbrio; logo as forças T , R e f terão resultante nula, sendo f a tração sobre a perna. Como a massa M está em equilíbrio, então $R = M \times g$, enquanto

$$T \times \sin 20^\circ = R \times \sin 20^\circ \Rightarrow T = R = M \times g$$

$$f = T \times \cos 20^\circ + R \times \cos 20^\circ \Rightarrow M = f/2 \times g \times \cos 20^\circ = 4,89\text{ kg.}$$

Quando a perna é levantada, continuamos tendo $T = R = M \times g = 47,89\text{ N}$.

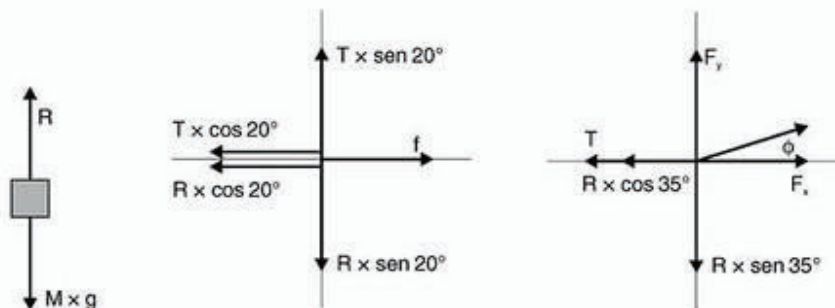
Como as forças T , R e F estão em equilíbrio, então

$$F_x - T - R \times \cos 35^\circ = 0 \Rightarrow F_x = 47,89 + 47,89 \times \cos 35^\circ = 87,12\text{ N}$$

$$F_y - R \times \sin 35^\circ = 0 \Rightarrow F_y = 47,89 \times \sin 35^\circ = 27,47\text{ N}$$

\therefore a magnitude e a direção da força F serão, respectivamente,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 91,34\text{ N} \text{ e } \phi = \text{tg}^{-1}(F_y/F_x) = 17,5^\circ.$$





3.6 MOMENTO: ALAVANCAS

O momento ou torque M de uma força F é uma quantidade vetorial, calculada em relação a um ponto fixo O . Este ponto pode estar no corpo ou fora dele. Quando uma força que age sobre um corpo produz um momento, então o corpo tenderá a ter um *movimento de rotação* em torno do eixo que passa por O . Por definição

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (3.22)$$

onde r é a distância entre o ponto de ação A da força e o ponto fixo O (como mostra a Figura 3.35). A direção de M é dada pela regra da mão direita aplicada aos produtos vetoriais e sua intensidade, por

$$M = r \cdot F \cdot \text{sen } \theta = F \cdot (r \cdot \text{sen } \theta) = F \cdot d, \quad (3.23)$$

onde d é denominado braço da força F , ou braço do momento.

A *alavanca* é um sistema que, ao experimentar uma pequena força F_c , pode equilibrar ou erguer um corpo que exerce uma força maior F_r .

A razão F_r/F_c é denominada *vantagem mecânica*. Para termos uma alavanca, o sistema deve experimentar a ação de pelo menos duas forças e ter um ponto de apoio. Se duas forças paralelas P e R agem sobre uma barra horizontal que tem um ponto de apoio, dependendo dos pontos de ação dessas forças, é possível gerar três tipos de alavancas, como se vê na Figura 3.36.

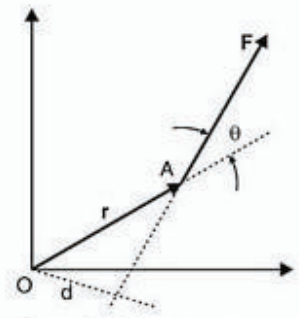


Figura 3.35 Força F produzindo um momento M em relação ao ponto fixo O .

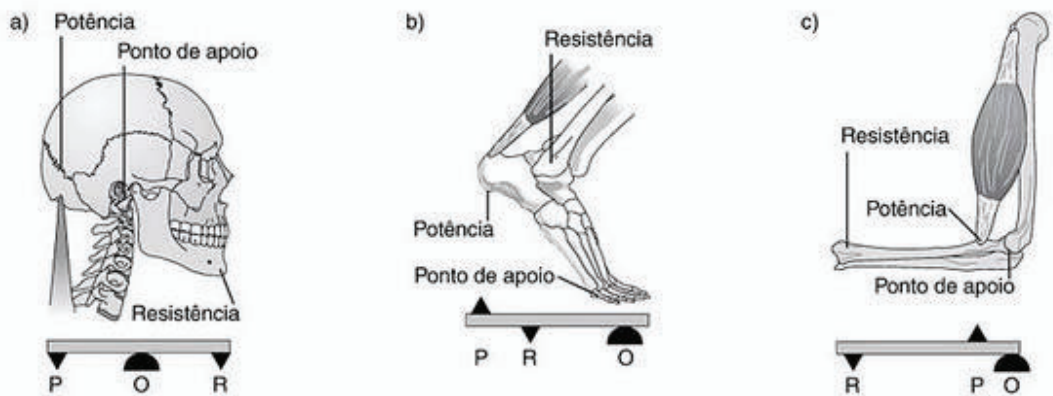
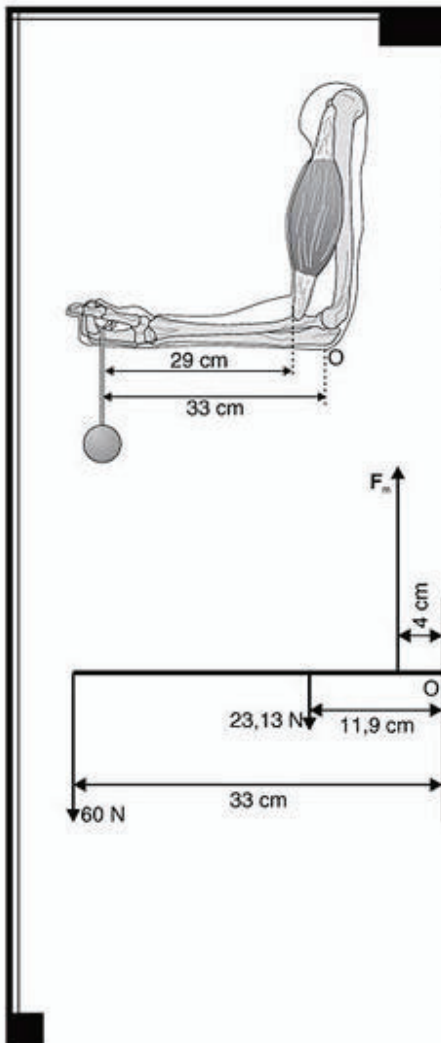


Figura 3.36 Três tipos de alavanca. P é uma força aplicada para equilibrar ou erguer a força resistente R .

A função de uma alavanca é realizar um trabalho com boa vantagem mecânica, levando a um equilíbrio de forças com intensidades diferentes, por meio de seus *momentos*. No corpo humano, os ossos e músculos formam conjuntos de alavancas, sendo mais comum encontrar as alavancas de *força* (Figura 3.36b) e de *velocidade* (Figura 3.36c). Os *ossos* atuam como uma barra sólida, inflexível, onde serão aplicadas forças, e os *músculos* agirão como gerador de *potência* na produção de movimento ou como *resistência* adicionada a uma carga externa.

Quando o momento sobre o corpo não é nulo, seu *movimento* será de rotação. Logo, para um corpo estar em *total equilíbrio*, deverá satisfazer às seguintes condições. Se

- ♦ A *resultante* das forças externas que agem sobre o corpo for *nula*, ele permanecerá em *repouso* ou em movimento com velocidade constante.
- ♦ O *momento resultante* devido às forças externas sobre o corpo for *nulo*, ele permanecerá em equilíbrio de rotação.



- Exemplo:** Considere que o conjunto antebraço e mão de uma pessoa pesa 23,13 N e que o ponto de aplicação dessa força se encontra a 11,9 cm do cúbito. A mão sustenta uma esfera de 60 N. Se o antebraço está perpendicular ao braço, determine a direção e a intensidade
- do momento produzido pela esfera, em torno do cúbito (ponto O);
 - do momento produzido pela força muscular em torno do cúbito;
 - da força muscular.

Resolução: Como o membro superior e a esfera estão em *total equilíbrio*, a resultante das forças que agem sobre o conjunto antebraço-mão e os momentos dessas forças devem ser nulos. A força muscular F_m é perpendicular à direção dos ossos do antebraço. Logo, em relação ao cúbito, temos

- o momento produzido pela esfera tem sentido anti-horário, direção perpendicular ao plano dos ossos do antebraço e intensidade $M_e = 60 \text{ N} \times 0,33 \text{ m} = 19,8 \text{ N} \cdot \text{m}$;

- o momento produzido pela força muscular tem sentido horário, mesma direção que M_e , e intensidade $M_m = F_m \times 0,04 = 23,13 \text{ N} \times 0,119 \text{ m} + 60 \text{ N} \times 0,33 \text{ m} = 22,55 \text{ N} \cdot \text{m}$;

- a intensidade da força muscular será $F_m = 22,55 \text{ N} \cdot \text{m} / 0,04 \text{ m} = 563,81 \text{ N}$.



- Exemplo:** Um ginasta com 70 kg está suspenso com as mãos em uma barra horizontal. Determine as forças
- F exercida pela barra sobre a mão;
 - T no tendão do bíceps;
 - R exercida pelo úmero sobre o antebraço através do cúbito.

Resolução:

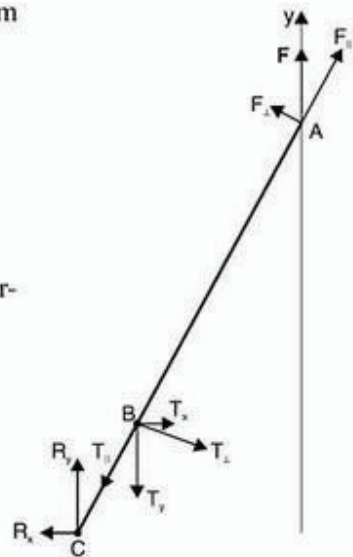
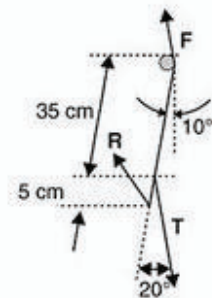
- a) Considere que o centro de massa do ginasta está na vertical que passa pela barra. Seu antebraço está levemente inclinado formando um ângulo de 10° em relação à vertical, e o eixo longitudinal do bíceps forma um ângulo de 20° em relação ao antebraço. O peso do ginasta é sustentado pelas mãos, de modo que a intensidade da força exercida pela barra em *uma mão* será $F_y = \frac{1}{2} (70 \text{ kg}) \cdot (9,8 \text{ m/s}^2) = 343 \text{ N}$ e $F_x \cong 0$
 $\therefore F \cong 343 \text{ N}$.

Como o antebraço está em total equilíbrio, a resultante das forças que agem nele e seus momentos deverão ser nulos.

- b) Em relação ao cúbito (ponto C), o momento resultante será nulo,
 $\therefore F_{\perp}(AC) - T_{\perp}(BC) = 0$
 $(F \cdot \text{sen } 10^\circ) \cdot (0,4 \text{ m}) - (T \cdot \text{sen } 20^\circ)(0,05 \text{ m}) = 0 \Rightarrow T = 1393,16 \text{ N}$.

- c) Nas direções horizontal e vertical, a soma dos componentes é nula; portanto,
 $T \cdot \text{sen } 10^\circ - R_x = 0 \Rightarrow R_x = 241,92 \text{ N}$
 e $F + R_y - T \cdot \text{cos } 10^\circ = 0 \Rightarrow R_y = 1029 \text{ N}$.
 Logo, a magnitude da força **R** será
 $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 1057,06 \text{ N}$.

Note que, na solução deste exemplo, não está sendo considerado nenhum outro efeito da barra metálica devido ao *contato* com as mãos do ginasta.



CENTRO DE MASSA DE UM CORPO

O centro de um corpo é um *ponto* que pode estar ou não na parte material do corpo. Esse ponto tem as seguintes propriedades:

- ◆ Ele se movimentará com *velocidade constante*, quando a resultante das forças externas sobre o corpo for nula ou na ausência de forças externas.
- ◆ Ele terá uma aceleração $a = F/M$, quando uma força externa **F** agir sobre o corpo de massa **M**.

Para localizar o centro de massa (CM) de um corpo, devemos levar em conta duas possíveis situações. Se o corpo tiver:

- ◆ *forma geométrica regular*, o CM coincidirá com seu centro de simetria; alguns casos são apresentados na Figura 3.37;
- ◆ *forma geométrica irregular*, então o CM é localizado da seguinte maneira:



Figura 3.37 Centros de massa de três corpos de forma regular.

- procuraremos decompor o corpo de massa M em diversas partes, cada uma com forma regular e com massa m_i ($i = 1, 2, \dots, n$);
- determinaremos o CM (x_i, y_i, z_i) de cada parte, ou seja, os respectivos centros de simetria de cada parte;
- finalmente, as coordenadas (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) do CM do corpo serão dadas por

$$\blacktriangleright \quad x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}. \quad (3.24)$$

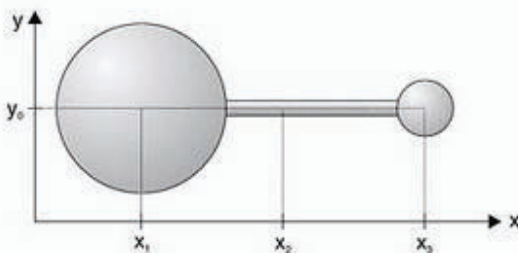


Figura 3.38 Corpo constituído por duas esferas com massas m_1 e m_3 , respectivamente, e por um cilindro com massa m_2 .

Por exemplo, na Figura 3.38 temos duas esferas com massas m_1 e m_3 unidas por uma barra cilíndrica com massa m_2 . O centro de massa desse conjunto será dado por

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = y_0,$$

pois $y_1 = y_2 = y_3 = y_0$.

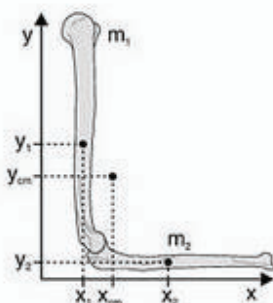


Figura 3.39 Conjunto de dois ossos em ângulo reto, sendo $m_1 > m_2$.

Na Figura 3.39, temos dois ossos com massas m_1 e m_2 , respectivamente, formando ângulo reto. Neste caso, teremos

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; \quad y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Se $m_1 > m_2$, ou seja, $m_1 = km_2$, com $k > 1$, então

$$x_{cm} = \frac{km_2 x_1 + m_2 x_2}{km_2 + m_2} = \frac{kx_1 + x_2}{1 + k} \Rightarrow (x_2 - x_{cm}) = k(x_{cm} - x_1),$$

ou seja, x_{cm} está *mais perto* do osso com massa maior, no caso, m_1 .

$$y_{cm} = \frac{km_2 y_1 + m_2 y_2}{km_2 + m_2} = \frac{ky_1 + y_2}{1 + k} \Rightarrow (y_{cm} - y_2) = k(y_1 - y_{cm}),$$

ou seja, y_{cm} está *mais perto* da coordenada y_1 do osso com massa maior.

No *corpo humano*, como os músculos trabalham continuamente para sustentar suas diversas partes, ao determinar seu CM, devemos considerar o corpo no seu todo e também parcialmente. A Figura 3.40 mostra os centros de massa de diferentes partes do corpo humano e os principais pontos de articulação.

Na Tabela 3.1, mostramos os valores usados pela NASA para as coordenadas das articulações e dos centros de massa de várias partes do corpo humano. Estes valores correspondem a um homem adulto e são percentuais correspondentes a valores de $M = 100$ e $H = 100$. Os eixos x , y e z aparecem na Figura 3.40.

Centros de massa de	Articulações
1 Cabeça	A Base do crânio
2 Tronco	B Escápulo-umeral
3 Braço	C Cúbito (cotovelo)
4 Antebraço	D Ilíaco-femoral
5 Mão	E Pulso
6 Coxa	F Joelho
7 Perna	G Tornozelo
8 Pé	
0 Corpo inteiro	

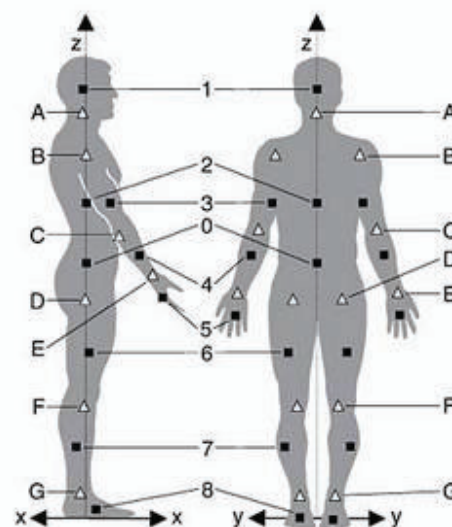


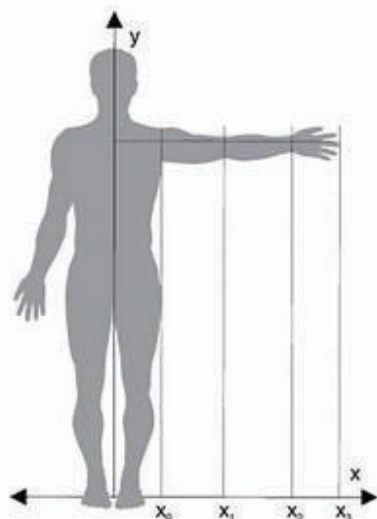
Figura 3.40 Informações usadas pela NASA (National Aeronautics and Space Administration) sobre os centros de massa e articulações de um homem adulto.

Tabela 3.1 Coordenadas das articulações e dos centros de massa de partes do corpo de um homem. Estamos considerando que o corpo tem massa $M = 100$ e altura $H = 100$.

Parte do corpo humano	Coordenadas			Massa
	x	y	z	
Cabeça	0,00	0,00	93,48	6,9
Base do crânio	0,00	0,00	91,23	
Tronco	0,00	0,00	71,09	46,1
Articulação escápulo-umeral	0,00	$\pm 10,66$	81,16	
Braços	0,00	$\pm 10,66$	71,74	6,6
Cúbitos	0,00	$\pm 10,66$	62,20	
Antebraços	0,00	$\pm 10,66$	55,33	4,2
Ilíaco-femorais	0,00	$\pm 5,04$	52,13	
Mãos	0,00	$\pm 10,66$	43,13	1,7
Pulsos	0,00	$\pm 10,66$	46,21	
Coxas	0,00	$\pm 5,04$	42,48	21,5
Joelhos	0,00	$\pm 5,04$	28,44	
Pernas	0,00	$\pm 5,04$	18,19	9,6
Tornozelos	0,00	$\pm 5,04$	3,85	
Pés	3,85	$\pm 6,16$	1,78	3,4
Corpo inteiro	0,00	0,00	57,95	100,0

Exemplo: Considere que um homem com 80 kg e 1,75 m de altura encontra-se em pé e com os membros superiores estendidos horizontalmente. Determine:

- A massa de cada segmento dos membros superiores.
- O centro de massa dos membros superiores em relação ao solo.



Resolução:

- Utilizando os dados da Tabela 3.1, para um homem com 80 kg, determinamos as massas dos

- braços: $0,066 \times 80 \text{ kg} = 5,28 \text{ kg}$
- antebraços: $0,042 \times 80 \text{ kg} = 3,36 \text{ kg}$
- mãos: $0,017 \times 80 \text{ kg} = 1,36 \text{ kg}$.

Logo, a massa de cada membro superior é 5,0 kg.

- Coordenadas da articulação escápulo-umeral:

$$x_0 = 0,1076 \times 1,75 \text{ m} = 0,1866 \text{ m}$$

$$y_0 = 0,8116 \times 1,75 \text{ m} = 1,42 \text{ m}.$$

Coordenada horizontal do centro de massa do:

- braço: $x_1 = x_0 + (0,8116 - 0,7174) \times 1,75 \text{ m} = 0,3515 \text{ m}$
- antebraço: $x_2 = x_0 + (0,8116 - 0,5533) \times 1,75 \text{ m} = 0,6386 \text{ m}$
- mão: $x_3 = x_0 + (0,8116 - 0,4313) \times 1,75 \text{ m} = 0,8521 \text{ m}.$

A coordenada vertical de cada uma dessas partes coincide com $y_0 = 1,42 \text{ m}$, a coordenada da articulação escápulo-umeral. Logo, para determinar o centro de massa do membro superior, utilizamos a equação (3.24)

$$x_{cm} = [0,315 \text{ m} \times 2,64 \text{ kg} + 0,6386 \text{ m} \times 1,68 \text{ kg} + 0,8521 \text{ m} \times 0,68 \text{ kg}] / 5 \text{ kg} = 0,516 \text{ m}$$

$$y_{cm} = y_0 = 1,42 \text{ m}.$$

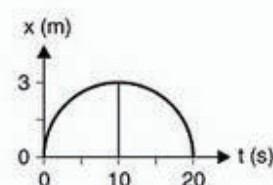
Quando precisarmos determinar o centro de massa de outras partes do corpo humano, seguimos um procedimento similar ao exemplo discutido acima.



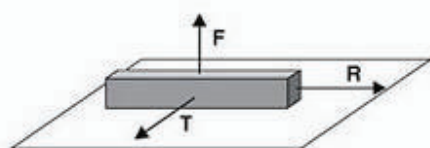
PROBLEMAS

- O vetor **A** encontra-se no terceiro quadrante do plano xy , e sua magnitude é 25 unidades. Se $A_y = 2A_x$, então escreva **A** em função dos vetores unitários **i** e **j**.
- Um vetor **L** orientado para o leste tem magnitude = 6 unidades; outro vetor **S** orientado para o sul tem magnitude = 8 unidades. Determine:
 - $\mathbf{L} - \mathbf{S}$;
 - $\mathbf{L} + \mathbf{S}$;
 - $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$;
 - $\mathbf{L} \times \mathbf{S}$.
- Uma força vertical de 4 N e outra horizontal de 3 N estão aplicadas sobre um corpo. Qual é a magnitude e a direção da força resultante?

4. Três vetores **A**, **B** e **C**, com 5 unidades cada um, estão respectivamente inclinados: 60° , 180° e 300° . Determine:
 - a) $\mathbf{A} + \mathbf{C}$;
 - b) $\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C}$;
 - c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$;
 - d) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$;
 - e) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$.
5. Dados os vetores $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{C} = -4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Determine a magnitude e direção de:
 - a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$;
 - b) $\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{C}$;
 - c) $4\mathbf{B} - \mathbf{C}$.
6. Se $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Determine os produtos escalar e vetorial de **A** e **B**.
7. Um objeto se desloca na direção x , e seu gráfico de deslocamento = $f(\text{tempo})$ é conhecido.
 - a) Determine a velocidade instantânea do objeto aos 5 s, 10 s e 15 s.
 - b) Faça os gráficos da velocidade e da aceleração em função do tempo.
8. Considere que a posição de um objeto que está se deslocando na direção x é dada por $x = 5t + 3$, onde x é expresso em metros e t em segundos. Em relação ao objeto, qual será sua:
 - a) posição inicial;
 - b) velocidade instantânea;
 - c) aceleração.
9. Um gafanhoto, para fazer um salto, estende suas patas 2,5 cm em 25 ms. Determine a:
 - a) aceleração com a qual ele estende suas patas;
 - b) velocidade quando parte do chão, ou seja, no instante em que suas patas estão completamente estendidas;
 - c) a altura máxima que ele conseguirá atingir neste salto.
10. Um atleta de salto em altura fez um salto de 1,3 m. Com que velocidade ele saiu do chão?
11. Da parte mais alta de um prédio é solta uma pedra; passado 1 s lançamos para baixo uma segunda pedra, com uma velocidade inicial de 20 m/s. A que distância da parte mais alta do prédio a segunda pedra alcançará a primeira?
12. Um estudante decide verificar *in vivo* a lei da queda livre. Para isso, ele sobe ao topo de um penhasco que se encontra a 300 m do solo e se atira levando com ele um cronômetro. O Super-Homem aparece no topo de penhasco 5 s depois e se lança com uma aceleração igual à dos corpos em queda livre. Determine:
 - a) a velocidade inicial do Super-Homem, para agarrar o estudante justamente antes de tocar o solo;
 - b) de que altura o estudante deveria se atirar, para que nem mesmo o Super-Homem pudesse salvá-lo.
13. Considere duas pessoas, uma com 1,80 m de altura e outra com 1,50 m. Qual será a relação entre suas velocidades de caminhada?



14. Entre animais de forma semelhante, os tamanhos são caracterizados pelo fator de escala L . Determine como a velocidade depende do fator de escala com que esses animais podem correr colina acima.
15. Um avião está voando a 2 km de altura, e no instante em que sua velocidade é 0,1 km/s é solta uma caixa. Determine
- o tempo que a caixa leva para chegar ao solo
 - a distância horizontal percorrida pela caixa
 - sua velocidade no momento do impacto.
16. Um jogador de beisebol rebate uma bola. No instante em que se separa do taco, ele o faz com um ângulo de elevação de 30° . Outro jogador alcança a bola a 400 m do primeiro. Determine:
- a velocidade inicial da bola
 - a altura máxima que ela alcançará
 - o tempo durante o qual a bola ficou no ar.
17. Uma pedra é lançada com velocidade de 10 m/s, e ângulo de elevação de 50° . Um ciclista avança no sentido da pedra a uma velocidade de 5 m/s. A que distância do ponto de lançamento deve estar o ciclista para ser atingido?
18. Um rio tem dois atracadouros a 1 km de distância um do outro. De um dos atracadouros duas pessoas vão até o outro e voltam. Uma delas sai num barco a 4 km/h tendo a correnteza a seu favor, com velocidade de 2 km/h. A outra vai caminhando pela beira do rio a 4 km/h. Quanto tempo demora cada pessoa neste percurso de ida e volta?
19. Uma ave migratória está voando a 30 km/h em relação ao ar; há um vento de 12,5 km/h do oeste para leste. Se uma bússola presa à ave assinala rumo ao norte, determine:
- a velocidade da ave em relação à Terra;
 - a direção que a bússola deve assinalar para que a ave esteja se dirigindo de fato ao norte;
 - qual seria sua velocidade em relação à Terra.
20. Um animal com 200 kg está correndo a 5 m/s. Ao frear bruscamente, ele desliza durante 5 s até parar. Calcule:
- o coeficiente de atrito cinético entre as patas do animal e o chão;
 - a distância que o animal percorre deslizando até parar.
21. Quatro ovos são colocados em pé sobre o chão. Cada pé de uma mesa de 20 kg descansa sobre um dos ovos, sem que eles se quebrem. Mostre por que este esforço sobre cada ovo não é suficiente para romper sua casca.



22. Um corpo com 20 kg está sujeito à ação de três forças cujas direções são perpendiculares entre si, sendo a direção de F vertical. As intensidades de T e R são respectivamente 30 N e 40 N. Se:

- a) o atrito sobre o corpo fosse desprezível, qual seria a intensidade e direção da força resultante?
- b) queremos que o corpo continue em repouso, qual deverá ser o coeficiente de atrito entre o corpo e a superfície?

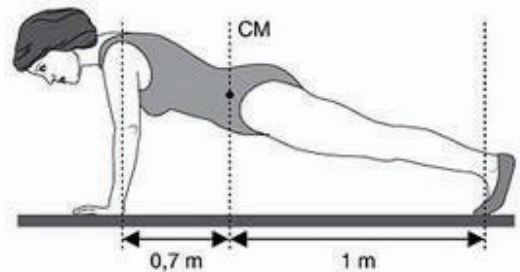
23. Um grupo de 25 formigas conduz um pedaço de queijo de forma retangular. O queijo desliza lentamente na direção **R**. Com uma faca, retiramos a fileira de 11 formigas e vemos que o queijo se move mais rapidamente na mesma direção. Considerando que a intensidade da força exercida por cada formiga é aproximadamente a mesma, mostre em que direção age a força exercida por cada formiga, para que o queijo se mova na direção **R**.



24. Qual é o encurtamento que sofre a perna de um homem com 70 kg, quando ele apóia toda sua massa sobre essa perna? Considere que a perna estendida mede 0,9 m, a área da secção média do osso tem 27 cm², e o módulo de Young $1,79 \times 10^{10}$ N/m².

25. O músculo bíceps de uma pessoa exerce uma força de 600 N. A secção média deste músculo em sua região central tem 50 cm² e seus tendões, que estão presos a dois ossos, uma secção reta de 0,5 cm². Determine a tensão em cada uma dessas secções.

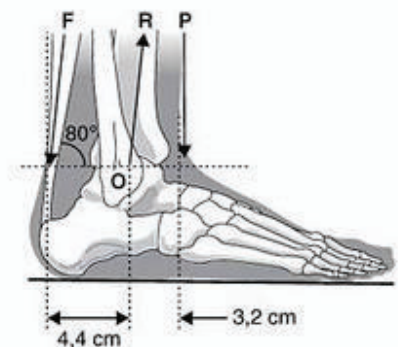
26. Uma atleta com 70 kg está realizando flexões de braço. A projeção de seu centro de massa no chão está a 1 m de seus pés e a 0,7 m de suas mãos. Determine as forças de contato que o solo exerce sobre:



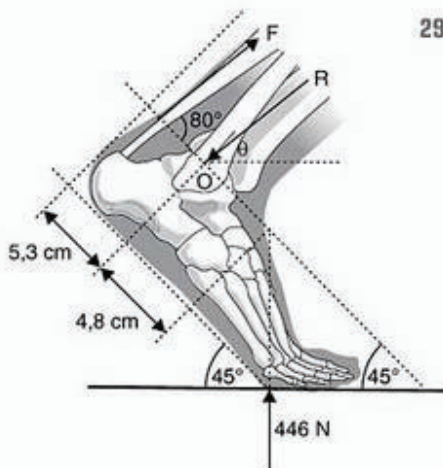
- a) as mãos;
- b) os pés.

27. Um bíceps relaxado exige uma força de 25 N para aumentar de 0,05 m seu comprimento. Quando o músculo está com tensão máxima, são necessários 500 N para se ter a mesma elongação. Considere o músculo como um cilindro sólido de 0,2 m de altura e 0,04 m de raio e determine o módulo de Young nas duas situações.

28. Uma pessoa com 70 kg encontra-se em pé. A projeção vertical de seu centro de massa passa a 3,2 cm à frente da articulação do tornozelo. O músculo da barriga da perna se liga ao tornozelo a 4,4 cm da articulação. Considere que cada perna suporta metade do peso da pessoa, determine:



- a) a intensidade da força muscular **F**;
- b) a direção da força de contato **R** exercida pela articulação do tornozelo.

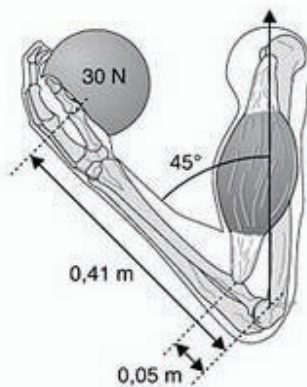


29. Uma pessoa com 91 kg encontra-se agachada, e seu pé inclinado a 45° em relação à horizontal. Determine:

- a intensidade da força muscular F exercida pelo tendão sobre o calcâneo;
- a direção da força de contato R exercida pela articulação do tornozelo.

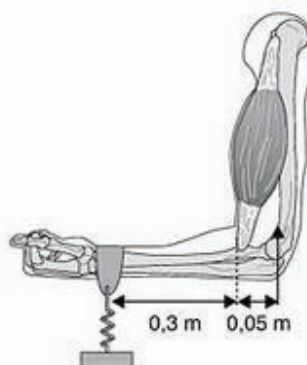
30. Considere uma pessoa com 70 kg em pé e ereta. Determine:

- a massa da cabeça, do tronco, dos membros inferiores e superiores;
- o módulo da força de contato que sustenta a cabeça e o tronco;
- a força que sustenta o braço;
- a força total que exerce o tronco nas articulações dos quadris;
- a força de contato total nas articulações dos joelhos;
- a força de contato na articulação do joelho quando a pessoa se apóia em um dos pés;
- a força na articulação do joelho que sustenta a perna não apoiada no chão. (Sugestão: utilize os dados da Tabela 3.1.)



31. Uma pessoa com 80 kg tem o antebraço formando um ângulo de 45° com o braço, e sua mão sustenta uma esfera de 30 N de peso. Admita que a distância do cotovelo ao centro da esfera é 0,41 m e ao tendão do bíceps 0,05 m. Determine a magnitude da força exercida pelo:

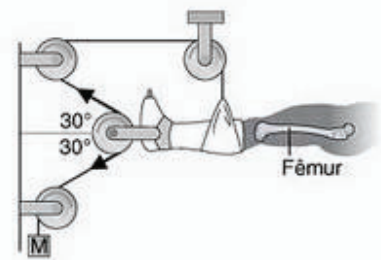
- músculo bíceps;
- cotovelo sobre o antebraço.



32. Uma pessoa com 70 kg tem presa ao pulso uma mola cujo extremo está a 0,35 m do cotovelo. A pessoa exerce uma força de 374 N para equilibrar a força elástica produzida pela mola. Se o tendão do bíceps está a 0,05 m do cotovelo, quais serão as intensidades das forças exercidas pelo:

- músculo bíceps?
- úmero?

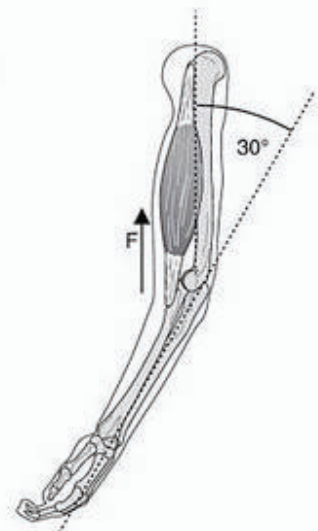
33. O sistema de tração de Russel é utilizado para redução de fratura do fêmur. Se a perna engessada de uma pessoa pesa 40 N, determine a força:



- a) que o sistema exerce sobre a perna quando sustenta uma massa de $m = 3,6 \text{ kg}$;
- b) total exercida sobre a perna;
- c) exercida pela perna sobre o fêmur.

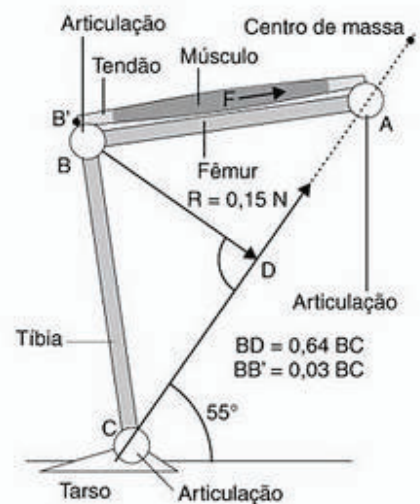
34. Três partículas com 2, 3 e 4 kg estão respectivamente localizadas nos pontos de coordenadas (3 m, 2 m), (1 m, -4 m) e (-3 m, 5 m) de um plano xy. Determine as coordenadas do centro de massa desse sistema.

35. Um antebraço está inclinado 30° em relação à direção do braço. O tendão do bíceps exerce sobre o antebraço uma força F com 70 N de intensidade. Determine a intensidade da força:



- a) estabilizadora (componente da força muscular paralela ao antebraço);
- b) de sustentação (componente da força muscular normal ao antebraço).

36. Um gafanhoto com 3 g realiza um salto com um ângulo de impulso de 55° . No momento do salto, a configuração típica dos músculos e partes de suas patas aparecem na figura ao lado. Se a área média da secção transversal do músculo é $0,35 \text{ cm}^2$ e do tendão é $0,01 \text{ mm}^2$, determine:



- a) a intensidade da força muscular F ;
- b) a tensão no músculo durante o salto;
- c) a tensão no tendão durante o salto;
- d) o fator de segurança para evitar a ruptura do tendão, se a tensão máxima que ele pode suportar é $6 \times 10^8 \text{ N/m}^2$.

37. Uma pessoa com 70 kg e 1,80 m de altura encontra-se em pé e ereta. Considere que ela levanta seu membro inferior direito até formar um ângulo de 90° com a direção vertical. Determine o centro de massa desse membro inferior.

38. Uma pessoa com 80 kg e 1,80 m de altura encontra-se em pé e em posição ereta. Utilizando os dados da Tabela 3.1, determine o centro de massa dessa pessoa.