Módulo 02 – Física da Fala e da Audição

Oscilações

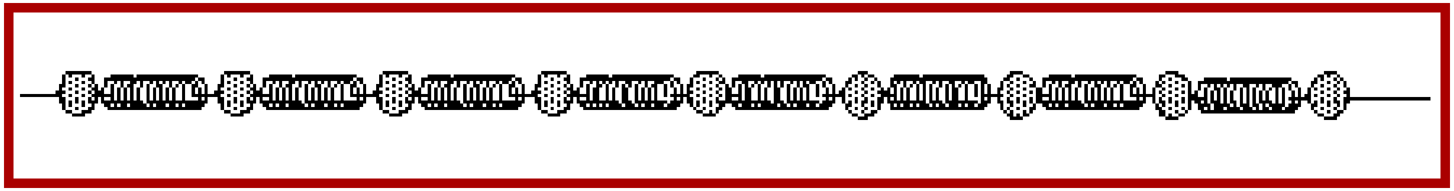
Prof.Dr. Edmilson J.T. Manganote

Nossa aula...

- Introdução
- O Movimento Harmônico Simples (MHS)
- A Energia do MHS
- O Oscilador Harmônico Simples Angular
- Pêndulos
- O MHS e o Movimento Circular Uniforme
- O MHS Amortecido
- Oscilações Forçadas e Ressonância

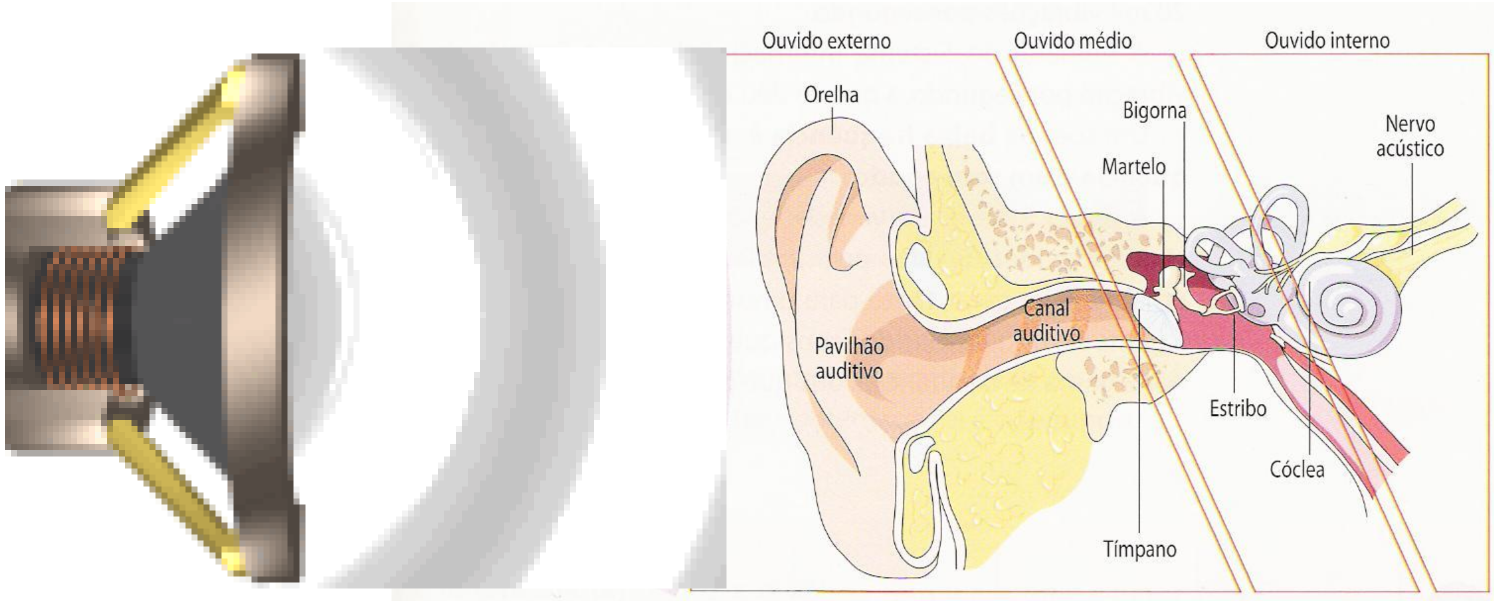
Introdução

- Nosso mundo está repleto de oscilações, nas quais os objetos se movem de um lado para o outro.



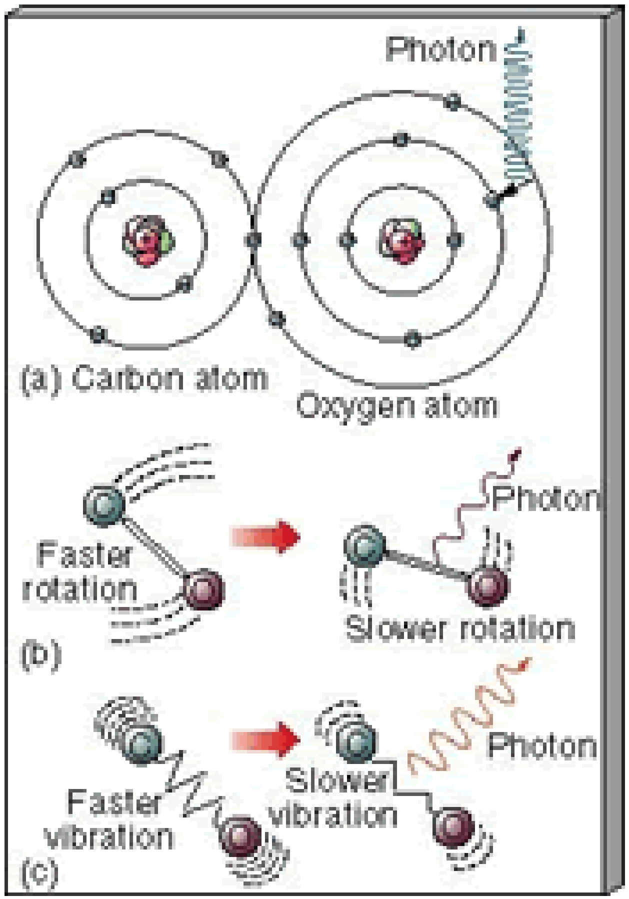
- Por fenômeno oscilatório estamos considerando tudo aquilo que se move em dois sentidos de forma alternada em torno de uma posição de equilíbrio.
- Nosso interesse está em sistemas oscilatórios periódicos (ou seja, cujos ciclos se repetem em intervalos iguais de tempo) ocasionados por forças restauradoras para um certo estado ou posição de equilíbrio.

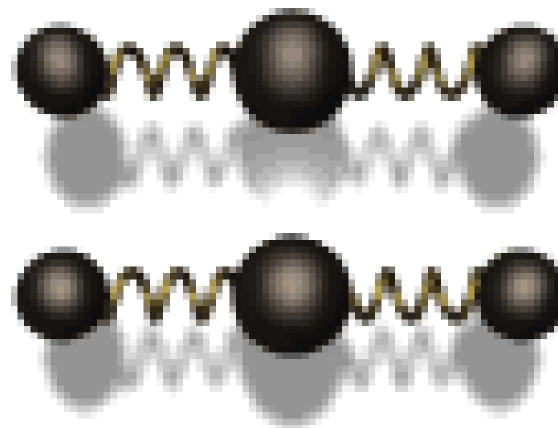
Introdução



A nossa visão e audição, juntamente com a voz, que constituem nossos principais meios para comunicação, acontecem por meio de fenômenos oscilatórios

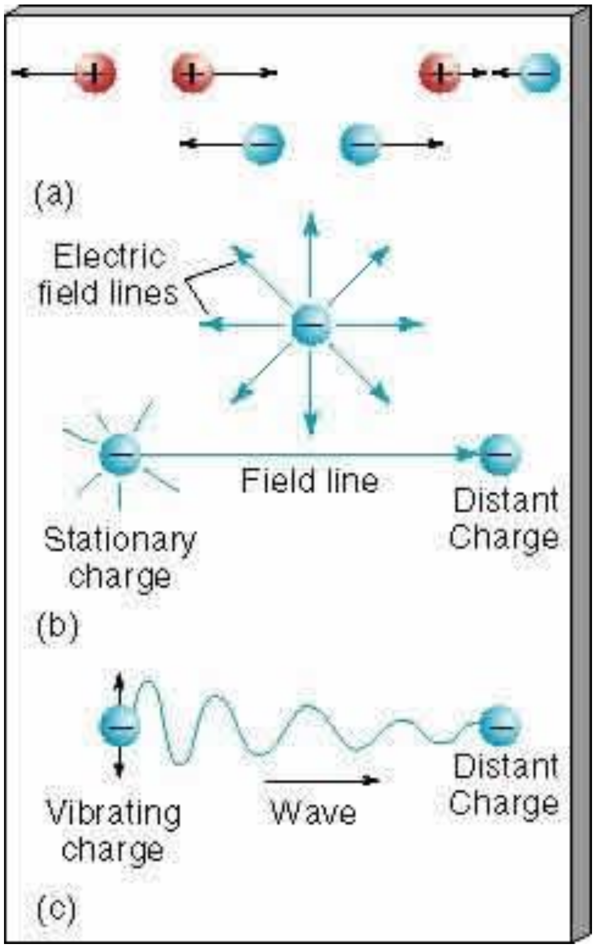
Introdução

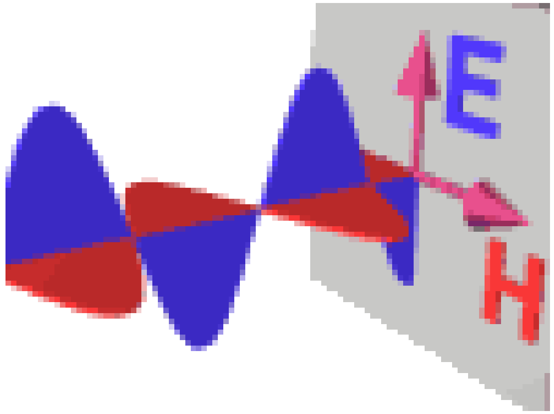




Podemos fazer modelos oscilatórios para explicar a estrutura da matéria...

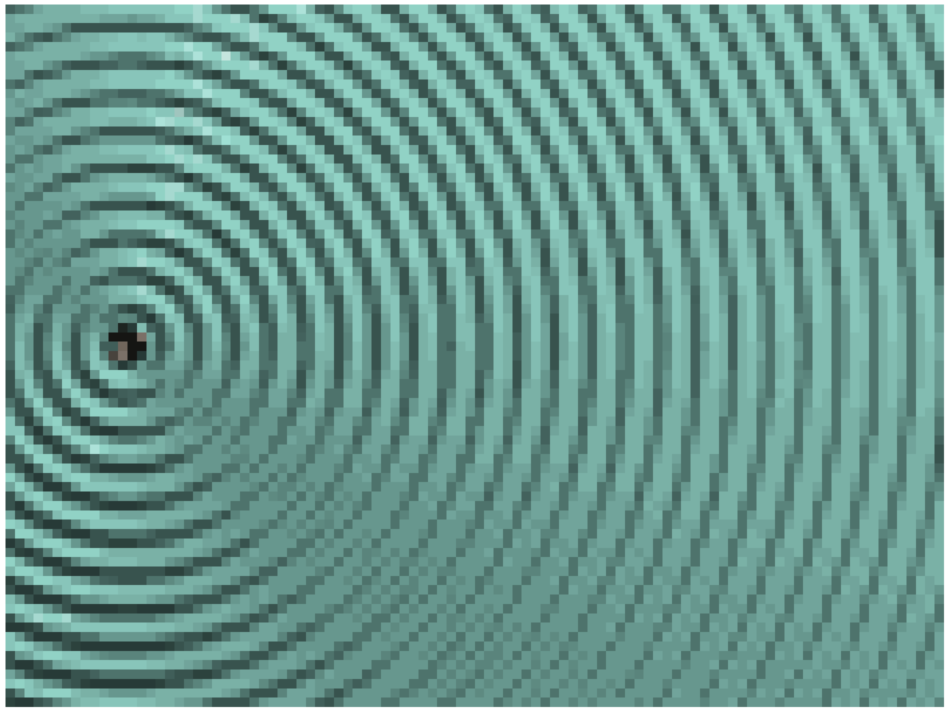
Introdução





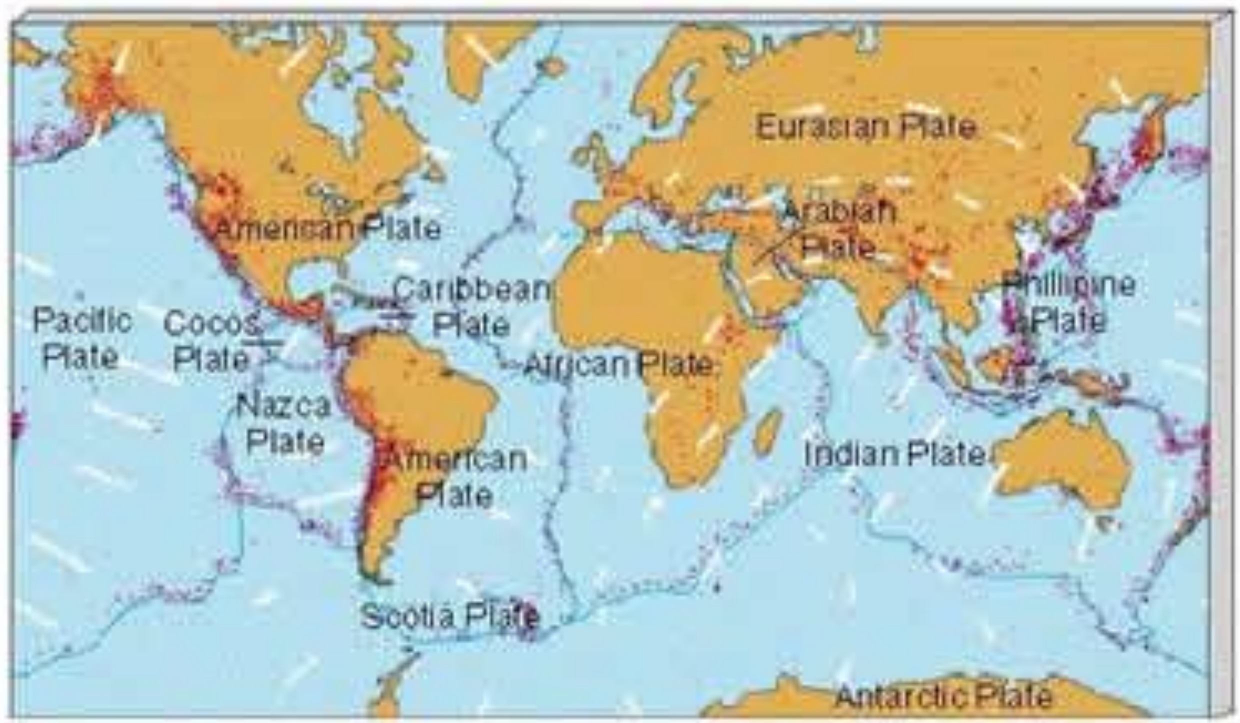
Ondas eletromagnéticas podem ser geradas através da vibração de cargas elétricas...

Introdução



Uma pedra caindo em um lago...

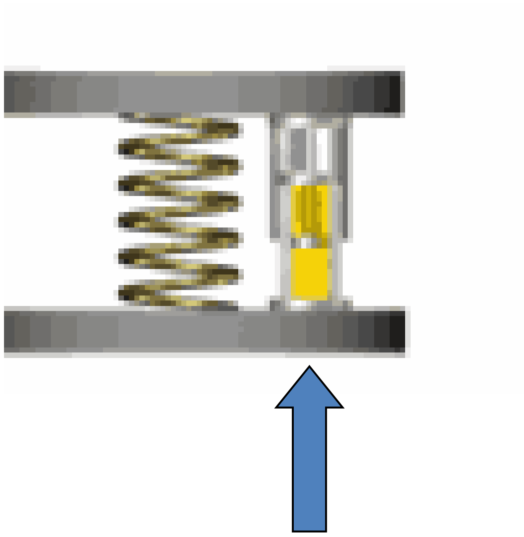
Introdução



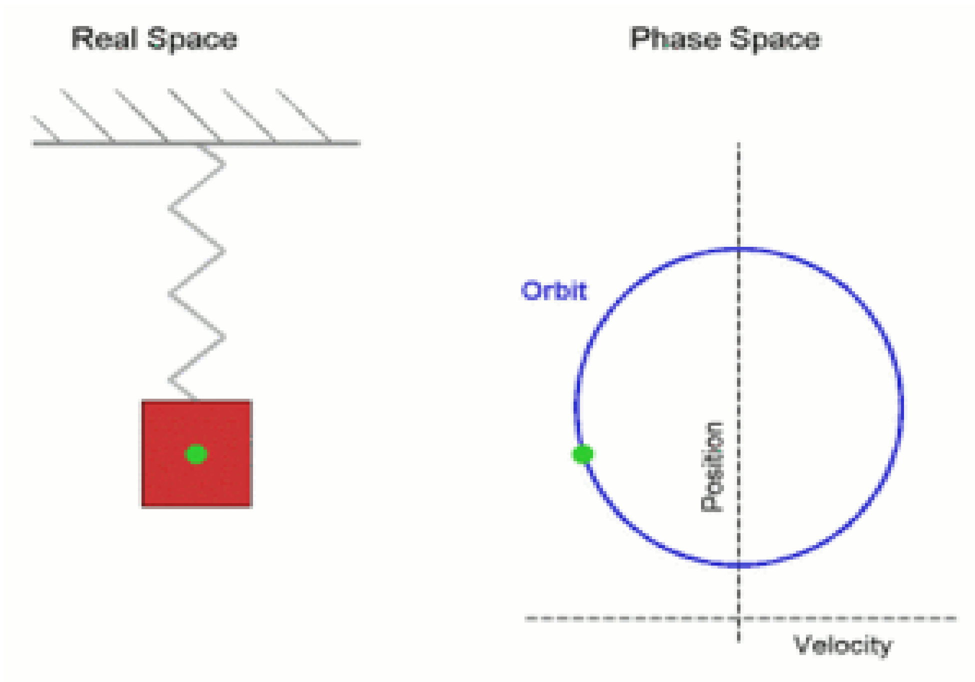
O choque entre as placas tectônicas, que causa os terremotos, pode ser analisado como sistemas que vibram

Introdução

Sempre que um sistema sofre uma perturbação da sua posição de equilíbrio estável, ocorre um movimento de oscilação.



Movimento Harmônico Simples



Freqüência (f) – é o número de oscilações completas por segundo.

1 hertz = 1 Hz = 1 s^{-1}

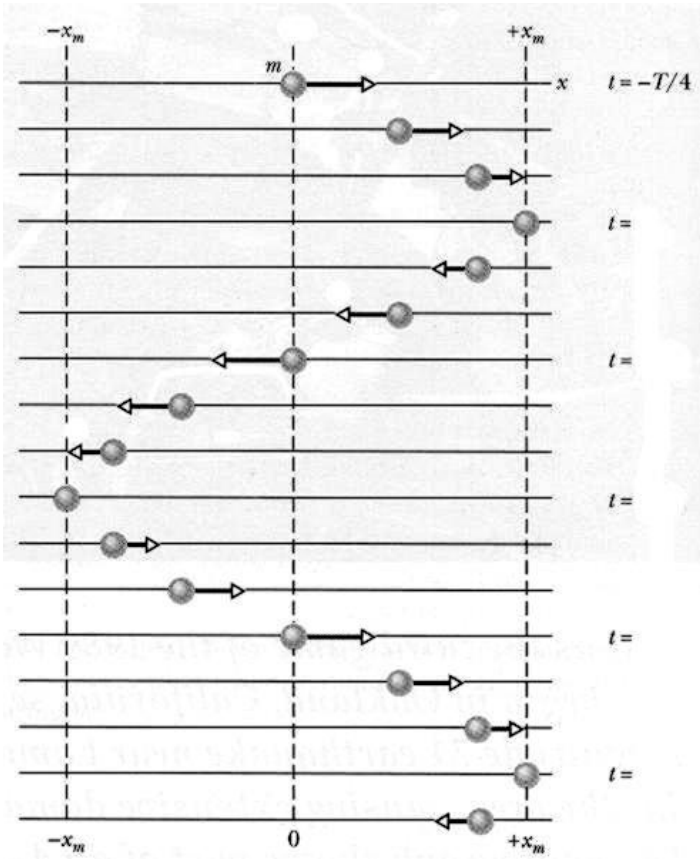
O tempo necessário para completar uma oscilação é o período:

$$T = \frac{1}{f}$$

Todo movimento que se repete a intervalos regulares é chamado de movimento periódico ou harmônico.

O movimento harmônico simples é aquele que ocorre quando a aceleração e a força resultante são proporcionais e se opõem ao deslocamento.

Movimento Harmônico Simples



Deslocamento no instante t

$$x(t) = x_m \cos\overbrace{(\omega t + \phi)}^{\text{Fase}}$$

Amplitude

Freqüência Angular

Tempo

Constante de fase ou Ângulo de fase

Movimento Harmônico Simples

Para interpretar a constante ω, denominada freqüência angular do movimento, notamos primeiramente que o deslocamento x(t) deve ser igual a x(t + T), para qualquer valor de t. Desta forma:

$$x_m \cos \omega t = x_m \cos \omega (t + T)$$

O cosseno se repete quando seu argumento aumenta de 2π rad.

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega T = 2\pi$$

Freqüência Angular $\longrightarrow$ $\boxed{\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f}$

Velocidade e Aceleração do MHS

A velocidade é a variação da posição no tempo; ou seja, a taxa de variação ou derivada da função posição x(t):

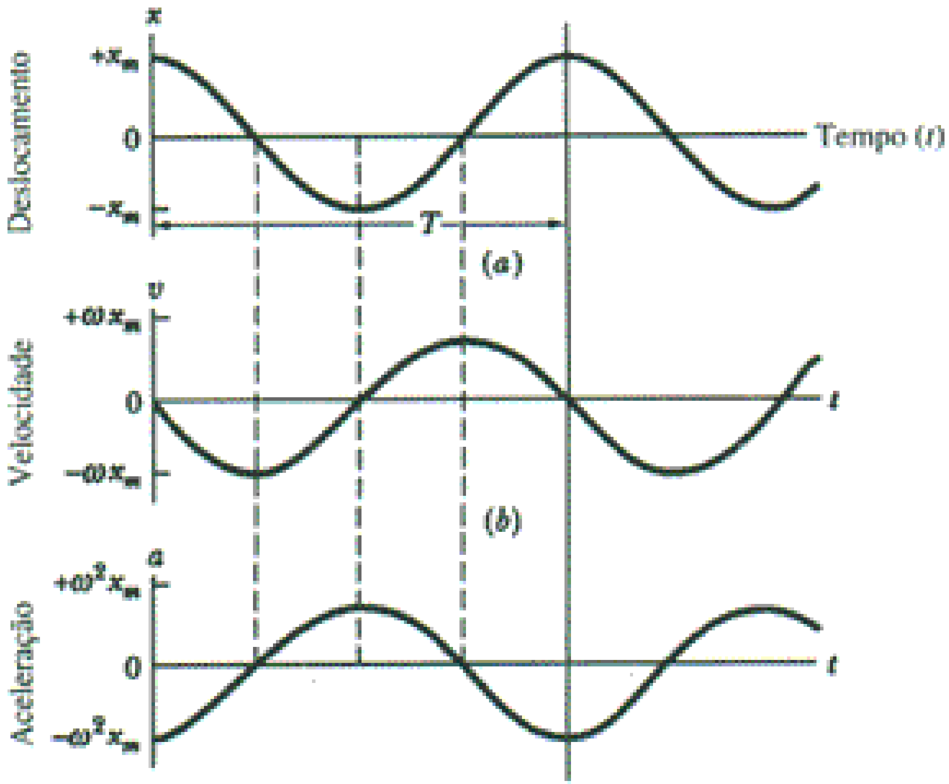
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x_m \cos(\omega t + \phi)\right] \Rightarrow v(t) = -\omega x_m sen(\omega t + \phi)$$

A aceleração é a variação da velocidade no tempo; ou seja, a taxa de variação ou derivada da função velocidade v(t):

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-\omega x_m sen(\omega t + \phi)\right] \Rightarrow a(t) = -\omega^2 \underbrace{x_m \cos(\omega t + \phi)}_{x(t)}$$

$$\boxed{a(t) = -\omega^2 x(t)}$$

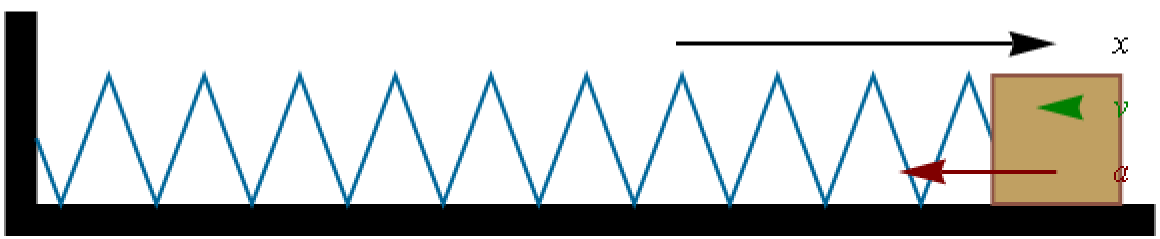
Gráficos de x(t), v(t) e a(t)



$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$



Exemplo: A função

$$x(t) = 6{,}0\cos(3\pi t + \pi/3)$$

representa o MHS de uma partícula.

Determine para t = 2,0 s:

1. o deslocamento; $\boxed{x(t) = 6{,}0\cos(3\pi t + \pi/3) = 3m}$
2. a velocidade; $\boxed{v(t) = -3\pi 6{,}0 sen(3\pi t + \pi/3) = -48{,}97 m/s}$
3. a aceleração; $\boxed{a(t) = -(3\pi)^2 \cdot 6{,}0\cos(3\pi t + \pi/3) = -266{,}48 m/s^2}$
4. a fase; $\boxed{(3\pi \times 2 + \pi/3) = (19\pi/3) = 19{,}90\ rad}$
5. a frequência; $\boxed{\omega = 2\pi f \Leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\pi}{2\pi} = 3/2 = 1{,}5\ Hz}$
6. e o período. $\boxed{T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}67\ s}$

Movimento Harmônico Simples

Considerando a 2ª Lei de Newton e a Lei de Hooke, teremos:

$$\underbrace{F = ma = -(m\omega^2)x \qquad F = -kx}$$

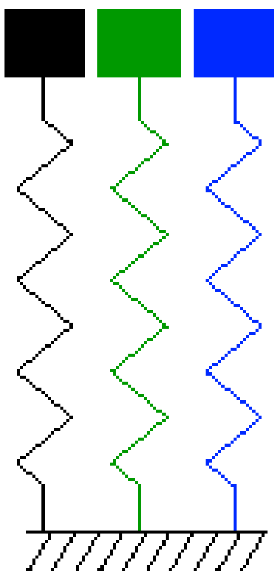
$$k = m\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

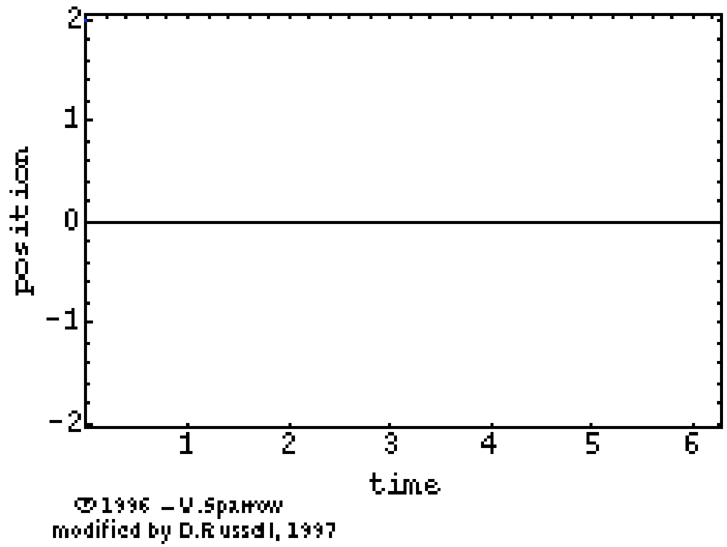
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Movimento Harmônico Simples

Dependência de ω:

- com a massa – depende
- com a constante k – depende
- com a amplitude – não depende





A Energia do MHS

Energia Potencial $$U(t)=\frac{1}{2}kx^{2}=\frac{1}{2}kx_{m}\cos^{2}(\omega t+\phi)$$

Energia Cinética

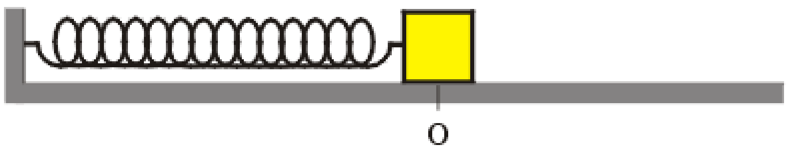
$$K(t)=\frac{1}{2}mv^{2}=\frac{1}{2}m\omega^{2}x_{m}^{2}sen^{2}(\omega t+\phi)$$

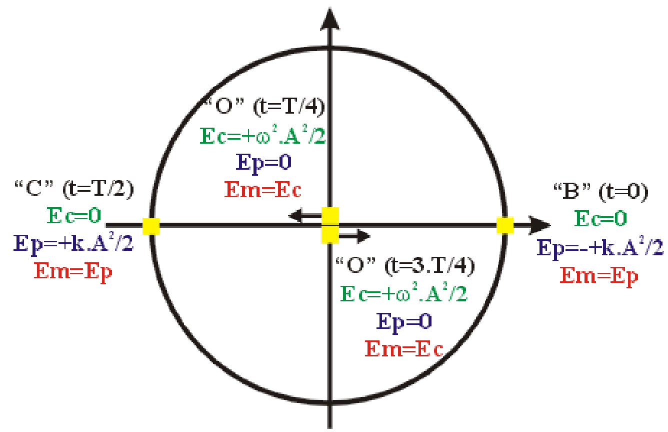
$$K(t)=\frac{1}{2}kx_{m}^{2}sen^{2}(\omega t+\phi)$$

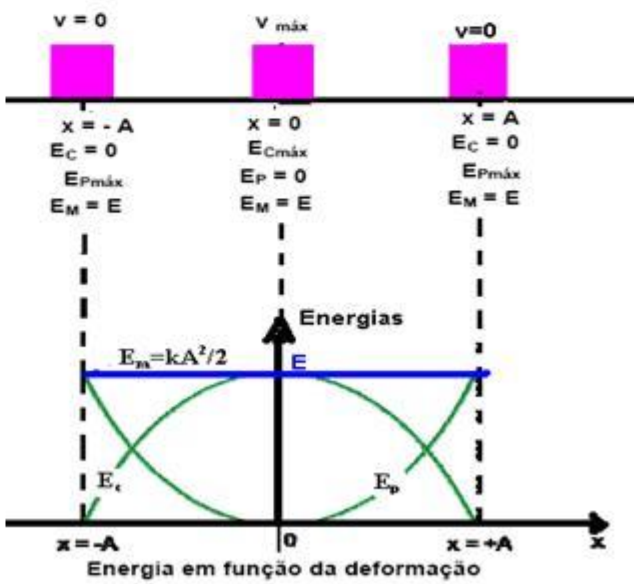
Lembrando que $\cos^{2}\alpha+sen^{2}\alpha=1$ teremos

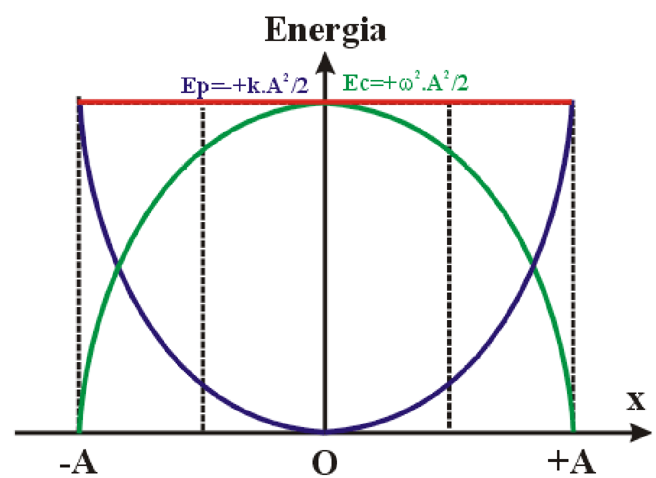
$$\boxed{E=U+K=\frac{1}{2}kx_{m}^{2}}$$

A Energia do MHS

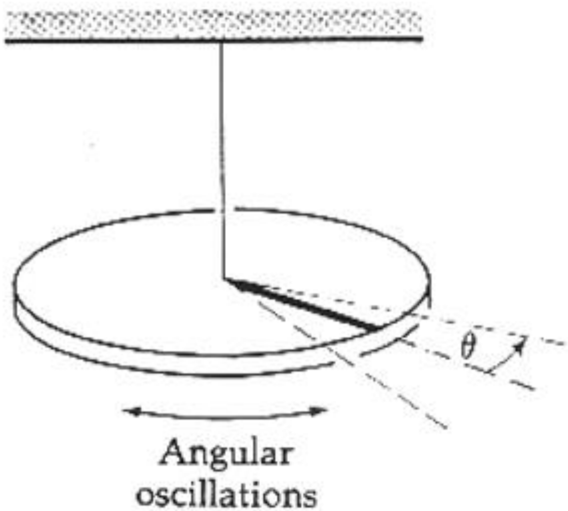








Oscilador Harmônico Simples Angular



Pêndulo de Torção

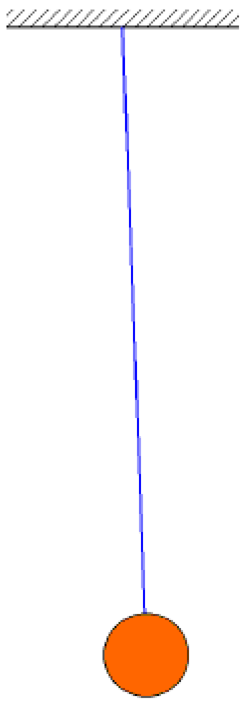
A rotação do disco de um ângulo θ em qualquer sentido produz um torque restaurador dado por

$$\tau = -k\theta$$

Substituindo m pela grandeza equivalente I, o momento de inércia do disco, teremos

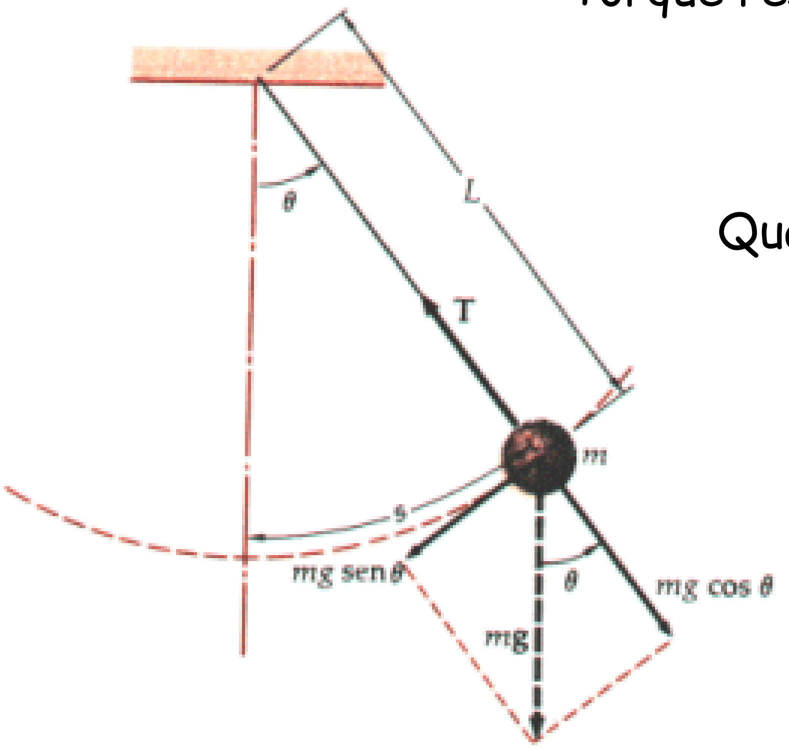
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}}$$

Pêndulos



Pêndulo de Foucault – Pantheon, Paris

Pêndulo Simples



Torque restaurador $\tau = -L(mgsen\theta)$

$$-L(mgsen\theta) = I\alpha$$

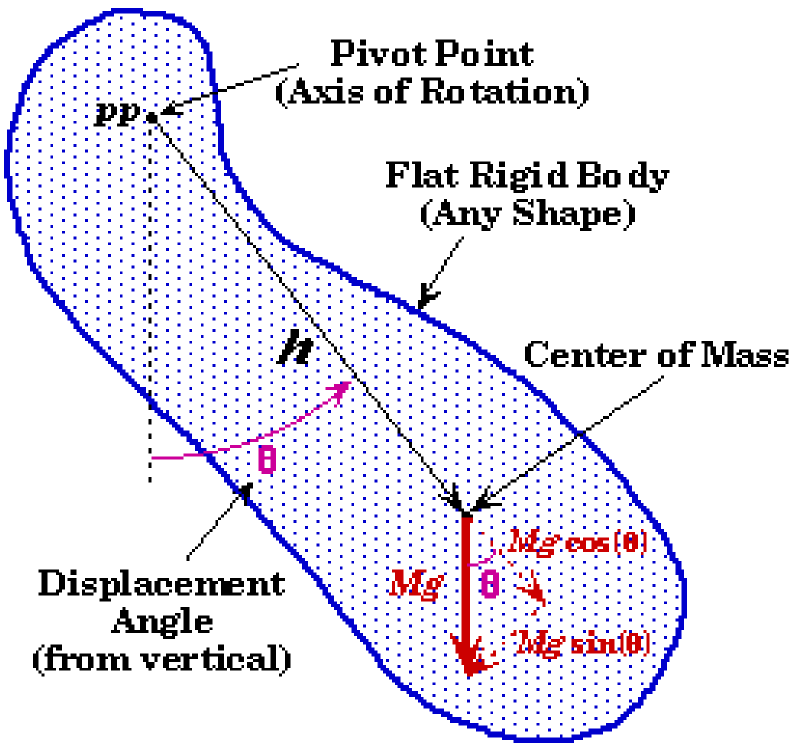
Quando θ é pequeno $sen\theta \approx \theta$

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

Como $I = mL^2$ teremos $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$

Pêndulo Físico



Para pequenos valores do ângulo θ, o movimento é aproximadamente um MHS

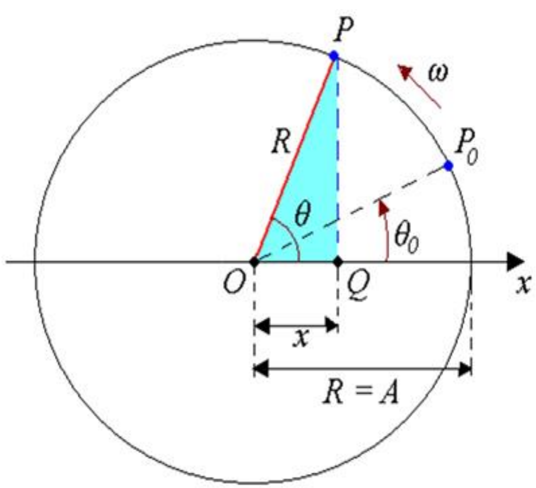
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

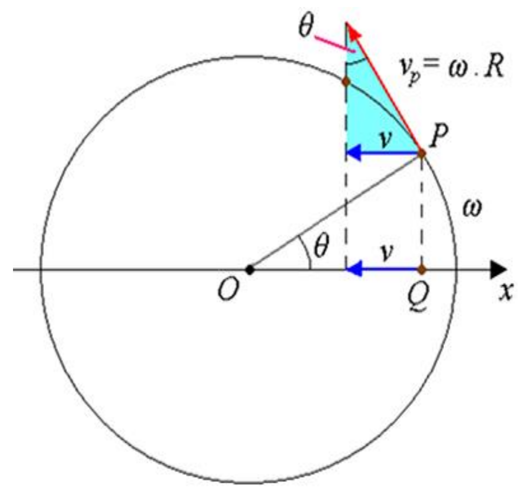
Substituindo L por h

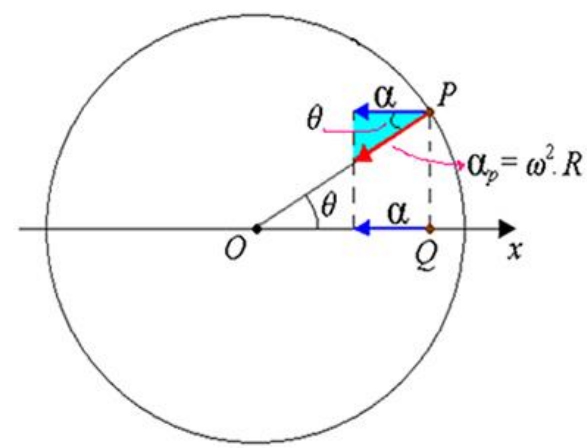
$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}}$$

MHS e o Movimento Circular

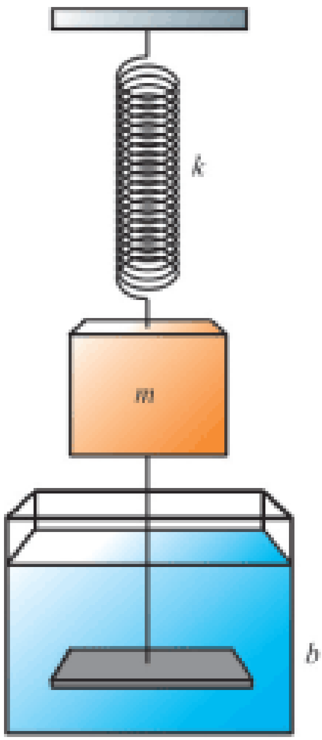
O movimento harmônico simples é a projeção do movimento circular uniforme em um diâmetro da circunferência ao longo do qual acontece o movimento circular







Movimento Harmônico Simples Amortecido



Oscilador massa-mola amortecido ideal. A pá imersa no líquido exerce uma força de amortecimento no sistema a cada ciclo de oscilação.

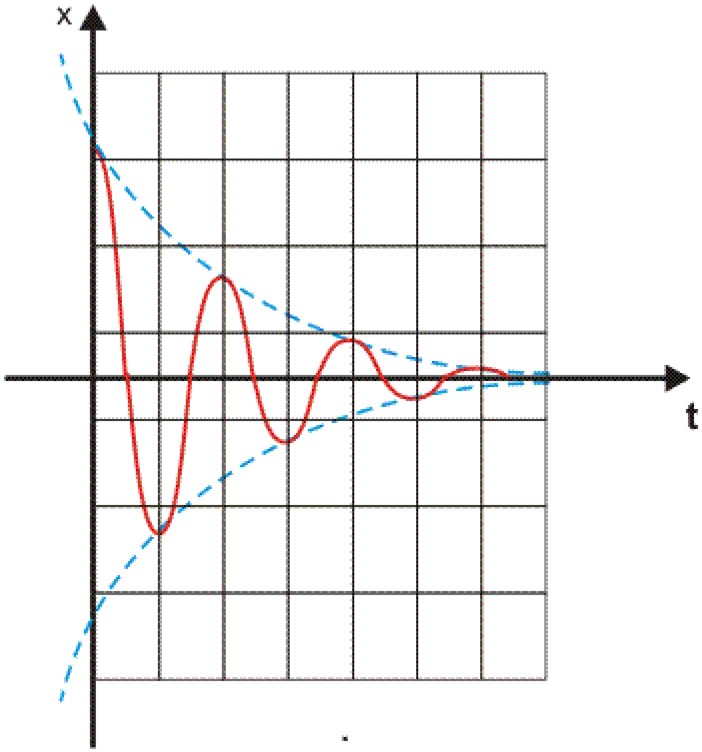
Força de Amortecimento ⇒ $F_a = -bv$

Força Restauradora ⇒ $F_m = -kx$

Supondo a força gravitacional desprezível e aplicando a 2ª Lei de Newton:

$$-bv - kx = ma$$

Movimento Harmônico Simples Amortecido



Que resulta na equação diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0$$

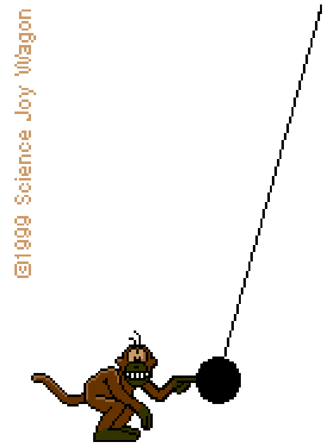
A solução desta equação é

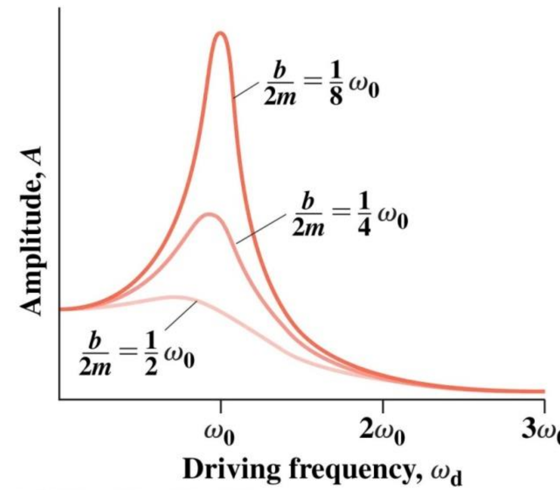
$$x(t)=x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t+\phi)$$

Freqüência do Oscilador amortecido $\omega'=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}}$

Se o amortecimento é pequeno $E(t)\approx\frac{1}{2}kx_m^2e^{-bt/m}$

Oscilações Forçadas e Ressonância





$$\boxed{ma = -kx - bv + F(t)}$$

Temos que resolver a equação:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos\omega_D t \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_m \cos(\omega_D t + \phi)$$

Depende de ω e ω_D

Oscilações Forçadas e Ressonância

Caso mais simples → $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \cos\omega_D t$

Esta equação tem como possível solução: $\boxed{x(t) = x_m \cos(\omega_D t + \phi)}$

onde

$$x_m = \frac{F_0}{m\left|\omega_0^2 - \omega_D^2\right|}$$

e

$$\phi = 0 \quad (\omega < \omega_0), \qquad \phi = -\pi \quad (\omega > \omega_0)$$

em fase fora de fase

Oscilações Forçadas e Ressonância

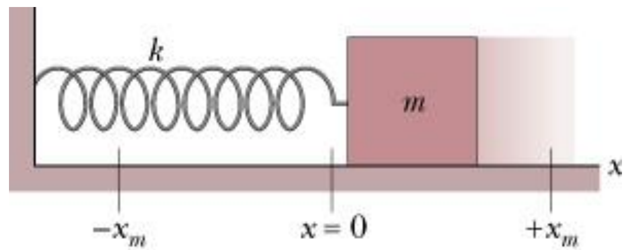
 

Construída nos anos 40, a belíssima obra caiu pouco tempo depois de ficar pronta. Por quê? A causa não foi nenhuma das que usualmente são as responsáveis por tais acidentes. Não foi um terremoto, nem uma inundação. Foi algo bem mais trivial. O grande responsável pela queda da belíssima ponte pênsil foi uma simples e leve brisa...

Oscilações Forçadas e Ressonância

Exemplo – Fixação dos Conceitos

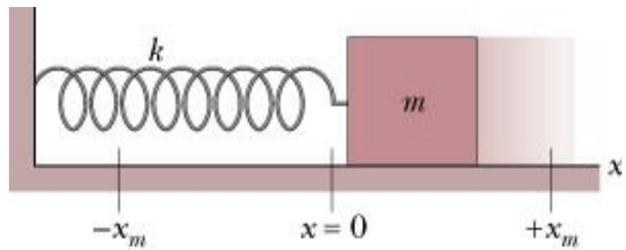
Um bloco cuja massa, *m*, é 650 *g* é preso a uma mola cuja constante elástica, *k*, é 65 N/m. O bloco é puxado uma distância *x* =11 cm da sua posição de equilíbrio *x* =0, numa superfície horizontal sem atrito, e libertado em repouso (para *t* =0).



1. Qual é a frequência angular e o período do movimento?
2. Indique qual é a amplitude e a fase inicial e escreva a equação do movimento.
3. Qual é a velocidade máxima do oscilador? Nessa situação qual é a sua energia potencial?
4. Considere que o amortecimento provocado pelo ar era igual a -3,25v (em que *v* representa a velocidade do bloco). Escreva a equação do movimento resultante.

Exemplo – Fixação dos Conceitos

Um bloco cuja massa, *m*, é 650 *g* é preso a uma mola cuja constante elástica, *k*, é 65 N/m. O bloco é puxado uma distância *x* =11 cm da sua posição de equilíbrio *x* =0, numa superfície horizontal sem atrito, e libertado em repouso (para *t* =0).



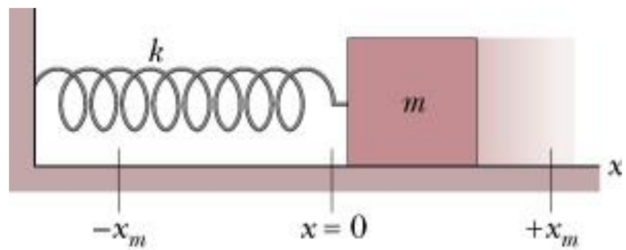
1. Qual é a frequência angular e o período do movimento?

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{65}{0{,}650}} = 10{,}0\ \mathrm{rad\ s^{-1}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3{,}14}{10{,}0} = 0{,}63\ \mathrm{s}$$

Exemplo – Fixação dos Conceitos

Um bloco cuja massa, *m*, é 650 *g* é preso a uma mola cuja constante elástica, *k*, é 65 N/m. O bloco é puxado uma distância *x* =11 cm da sua posição de equilíbrio *x* =0, numa superfície horizontal sem atrito, e libertado em repouso (para *t* =0).



2. Indique qual é a amplitude e a fase inicial e escreva a equação do movimento.

$$E_m = E_c + E_p \Leftrightarrow \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Para *t* =0 –> *x* =0,11 m; *v* =0

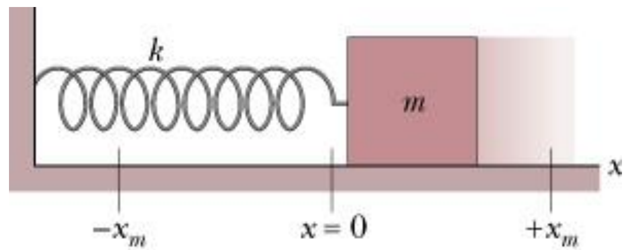
$$\frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}k(0{,}11)^2 \Leftrightarrow x_m = 0{,}11\,\mathrm{m}$$

$$x(0) = 0{,}11 = 0{,}11\cos(\phi) \Rightarrow \phi = 0$$

$$\boxed{x(t) = 0{,}11\cos(10{,}0t)}$$

Exemplo – Fixação dos Conceitos

Um bloco cuja massa, *m*, é 650 *g* é preso a uma mola cuja constante elástica, *k*, é 65 N/m. O bloco é puxado uma distância *x* =11 cm da sua posição de equilíbrio *x* =0, numa superfície horizontal sem atrito, e libertado em repouso (para *t* =0).



3. Qual é a velocidade máxima do oscilador? Nessa situação qual é a sua energia potencial?

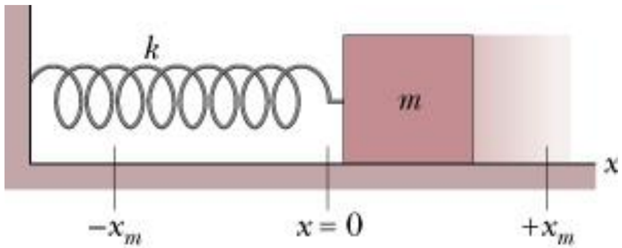
$$\frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 \qquad v_m = x_m\sqrt{\frac{k}{m}} = x_m\omega = 1{,}1\, m.s^{-1}$$

Esta ocorre para x =0 m e aí

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = 0\ J$$

Exemplo – Fixação dos Conceitos

Um bloco cuja massa, *m*, é 650 *g* é preso a uma mola cuja constante elástica, *k*, é 65 N/m. O bloco é puxado uma distância *x* =11 cm da sua posição de equilíbrio *x* =0, numa superfície horizontal sem atrito, e libertado em repouso (para *t* =0).



4. Considere que o amortecimento provocado pelo ar era igual a -3,25v (em que *v* representa a velocidade do bloco). Escreva a equação do movimento resultante.

$$ma = -kx - bv$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = 9{,}68\, rad\ s^{-1}$$

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi)$$

$$x(t) = 0{,}11 e^{-2.5t} \cos(9{,}7t)$$