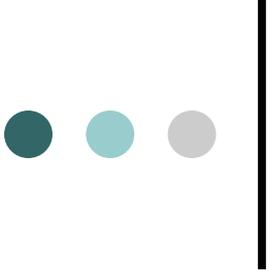


# Módulo 04

## Física da Fala e da Audição

### ONDAS ESTACIONÁRIAS

**Prof. Edmilson Manganote**  
Instituto de Física Gleb Wataghin (IFGW)  
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)  
[mangano@ifi.unicamp.br](mailto:mangano@ifi.unicamp.br)

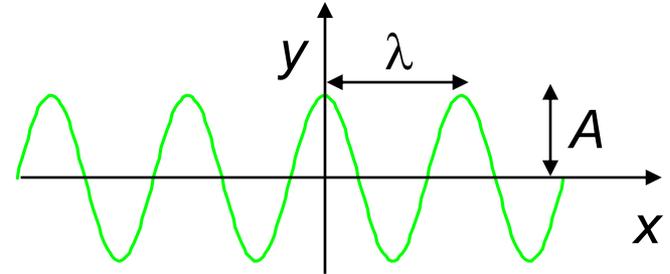


# Superposição de ondas

- Resumo de ondas mecânicas
- Superposição de ondas
  - Exemplos
  - Representação matemática
- Interferência
- Batimento
- Ondas estacionárias.

# Resumo: onda progressiva

A fórmula  $y(x,t) = A \cos(kx - \omega t)$  descreve uma onda harmônica de amplitude  $A$  se movendo na direção  $+x$ .

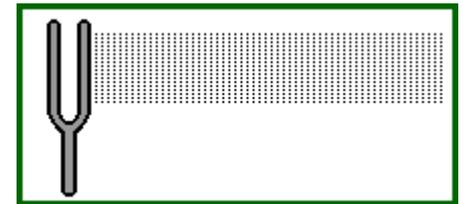


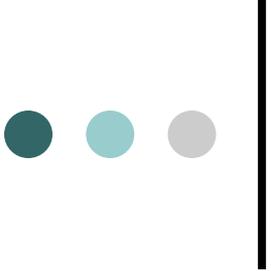
Cada ponto na onda oscila na direção  $y$  com movimento harmônico simples de frequência angular  $\omega$ .

O comprimento de onda é:  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

A velocidade da onda é:  $v = \frac{\omega}{k}$

A quantidade  $k$  é chamada “número de onda”.





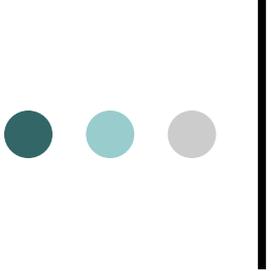
# A equação de onda

A equação de onda em 1D

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{k^2}{\omega^2}$$

De fato ela é válida para qualquer tipo de onda



# Princípio da superposição

Suponhamos que duas ondas caminham em uma corda

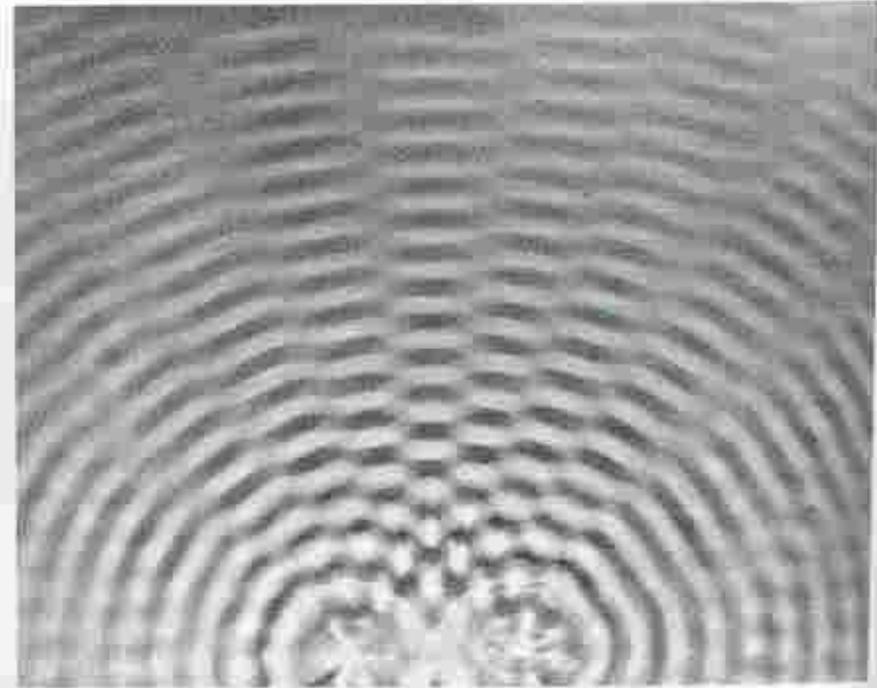
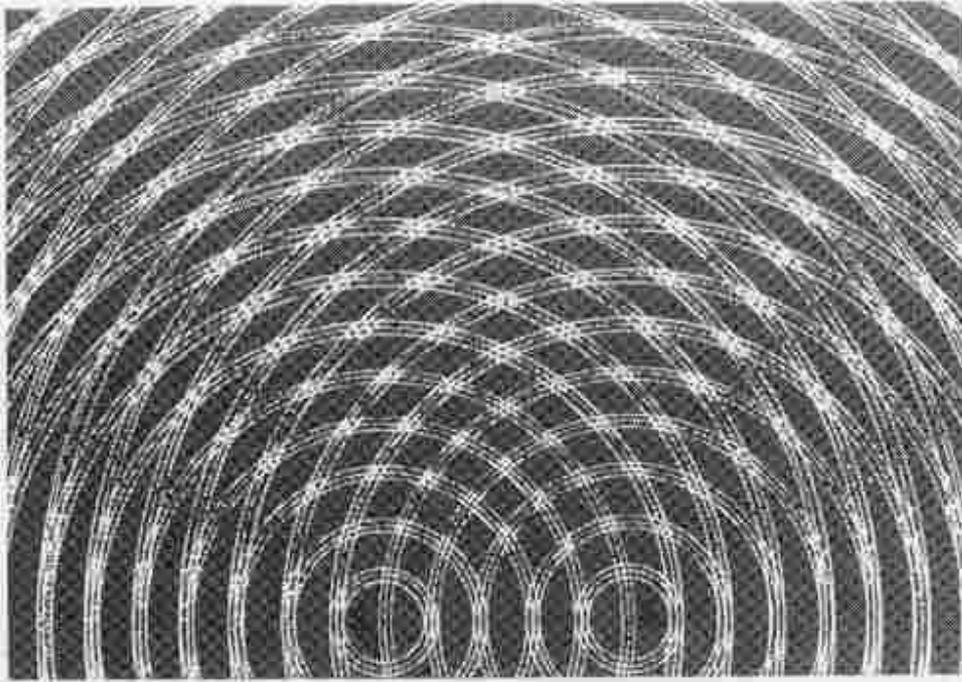
Se  $y_1(x, t)$  e  $y_2(x, t)$

são as ondas que a corda poderia experimentar se cada uma estivesse só, quando as duas ondas atuam simultaneamente, a onda resultante é

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

Este é o **princípio da superposição de ondas**, consequência direta do fato que a Eq. de onda é uma equação diferencial linear

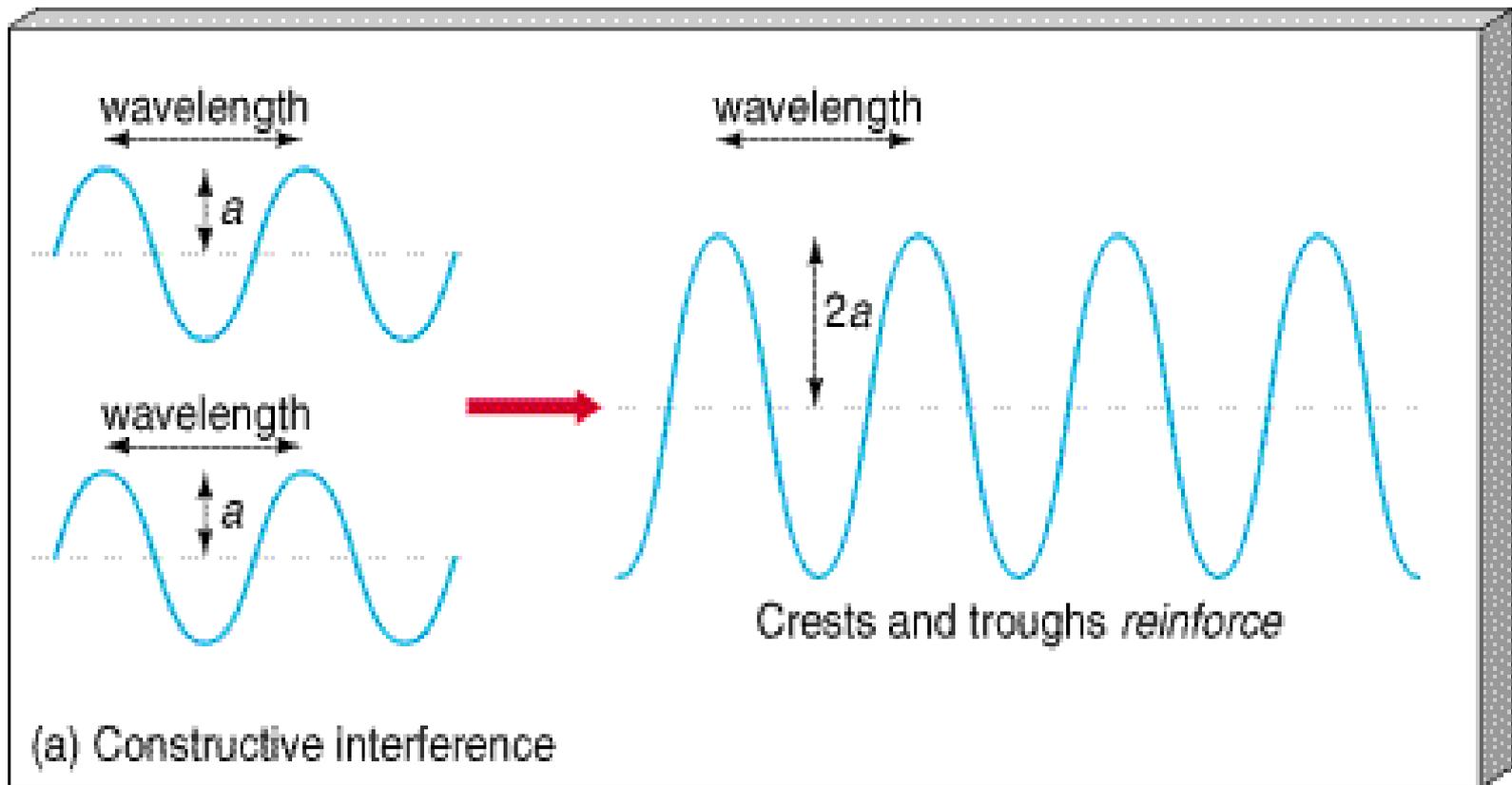
# Interferência



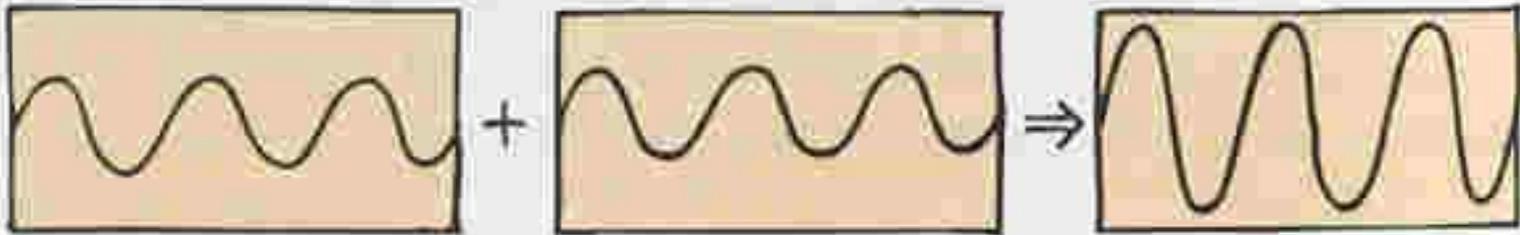
- Ondas de água de duas fontes

# Interferência construtiva

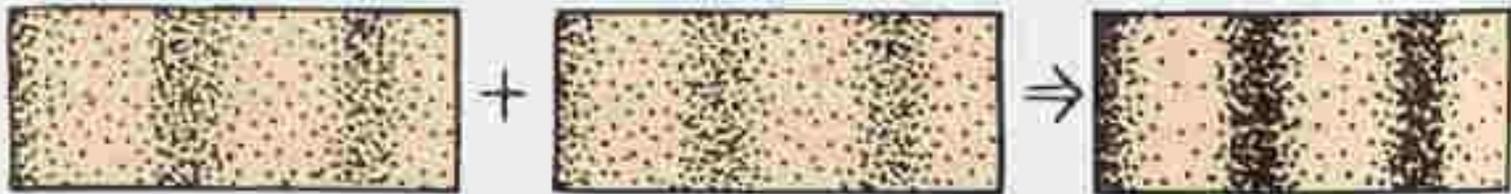
- Ondas que se somam sem diferença de fase



# Interferência Construtiva



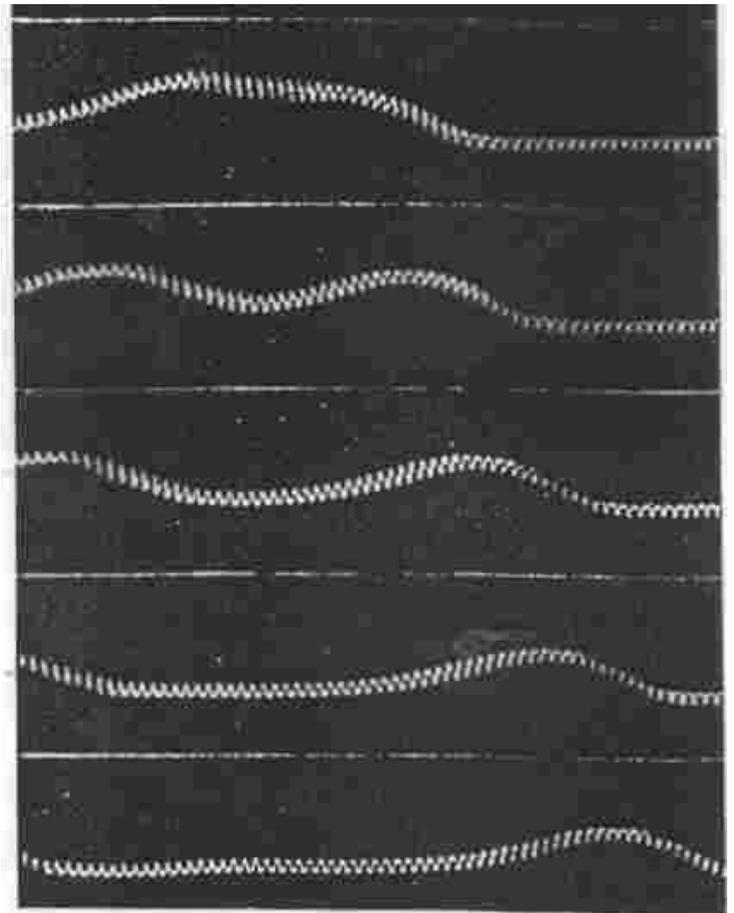
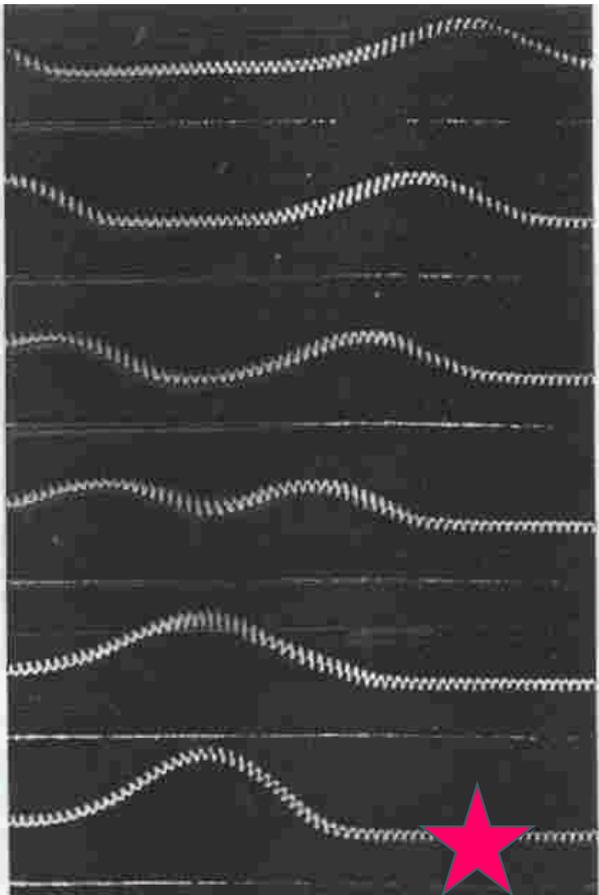
The superposition of two identical transverse waves in phase produces a wave of increased amplitude.



The superposition of two identical longitudinal waves in phase produces a wave of increased intensity.

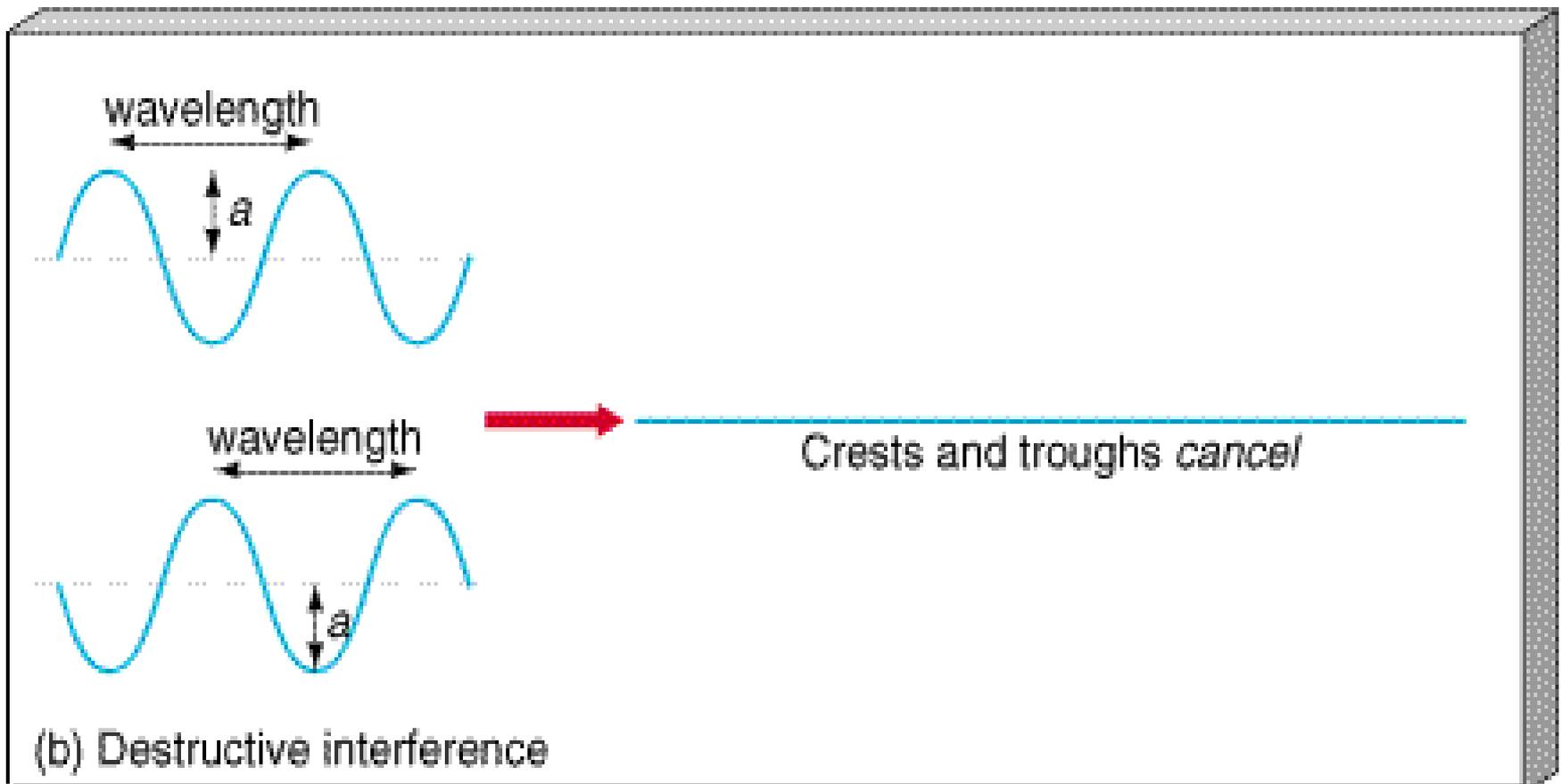
# Interferência construtiva

- Quando duas ondas iguais chegam ao mesmo ponto, elas se somam!

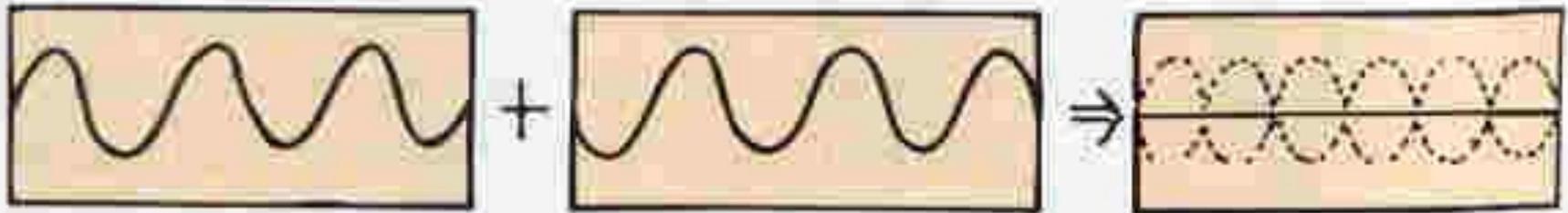


# Interferência destrutiva

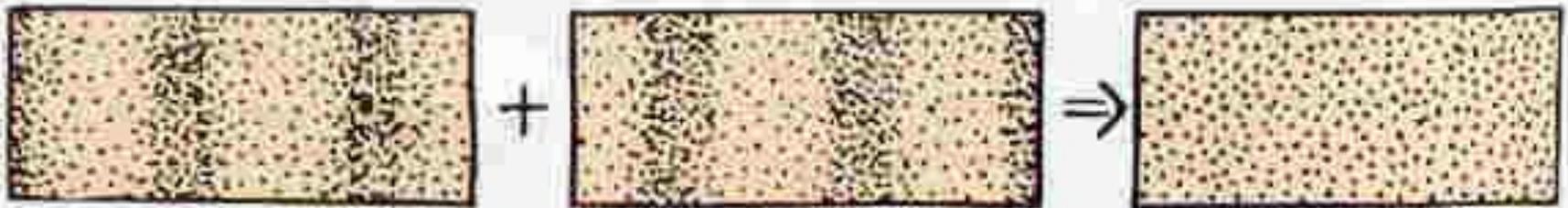
- Ondas combinantes com uma diferença de  $\frac{1}{2}$  comprimento de onda.



# Subtração de ondas



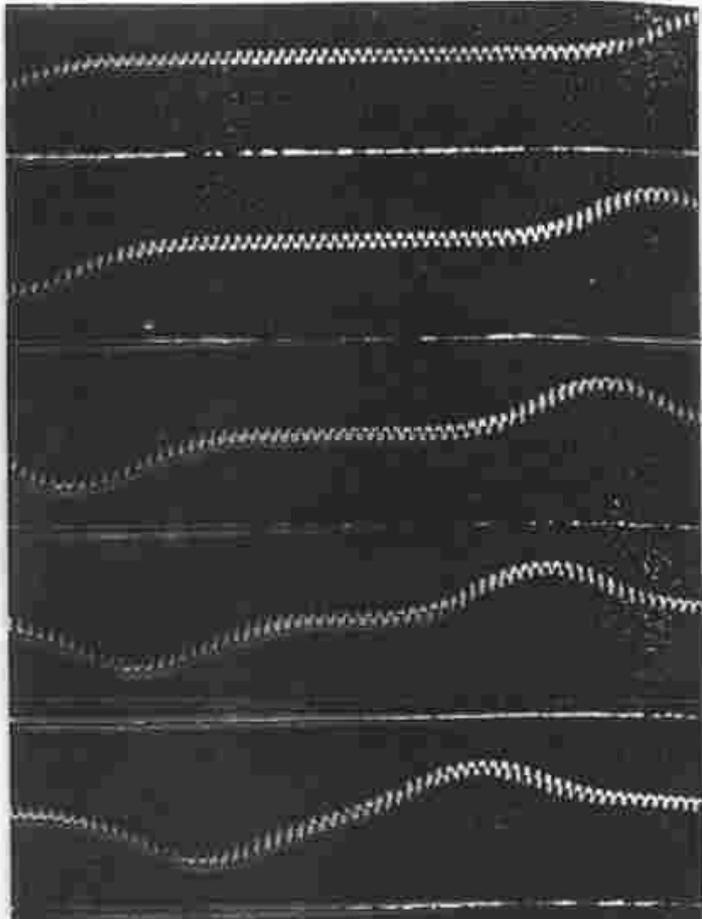
Two identical transverse waves that are out of phase destroy each other when they are superimposed.

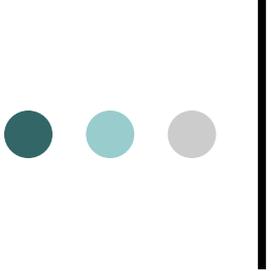


Two identical longitudinal waves that are out of phase destroy each other when they are superimposed.

# Duas ondas

- Quando os máximos chegam ao mesmo ponto, se cancelam!





# Duas ondas

A interferência de duas ondas

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = \\ A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

Onde  $\phi$  é a diferença de fase entre as ondas.

usando  $\sin a + \sin b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$

# Duas ondas

$$y(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

amplitude

fase

Se  $\phi = 0$ ,  $\cos 0 = 1$  e a amplitude é  $2A$ . **Interferência construtiva**

Se  $\phi = \pi$ ,  $\cos \pi/2 = 0$  e a amplitude é  $0$ . **Interferência destrutiva**

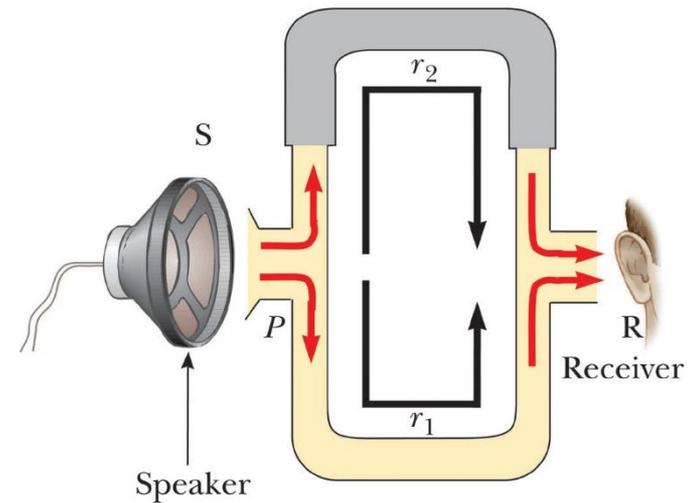
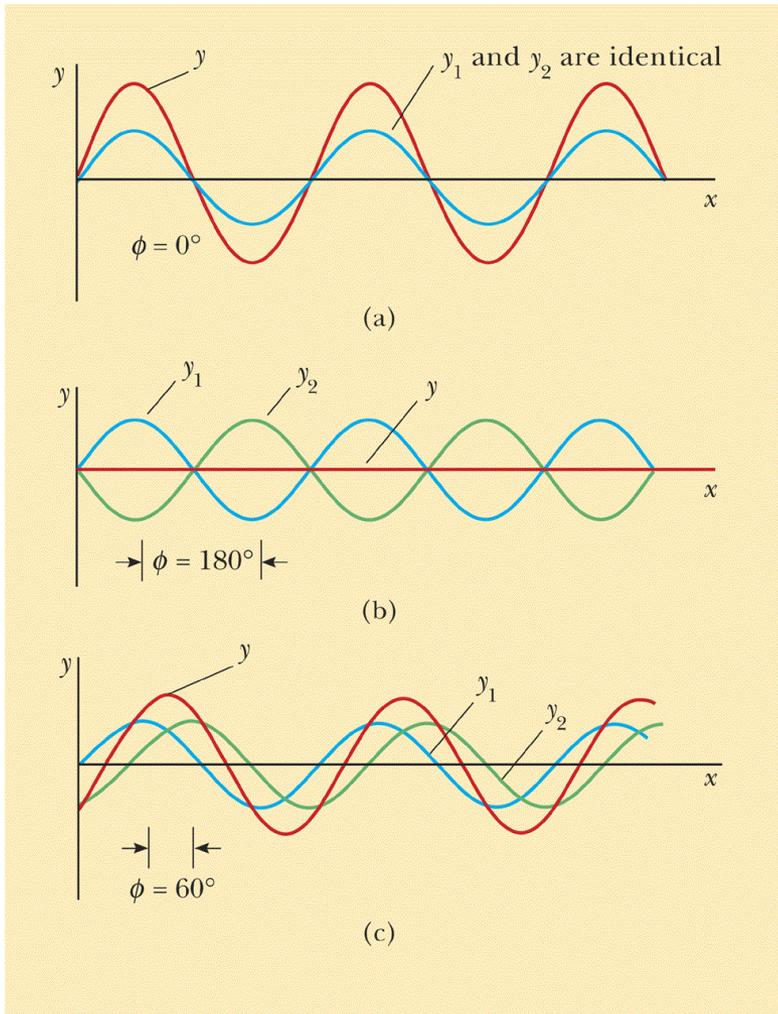
# Interferência...

Duas ondas

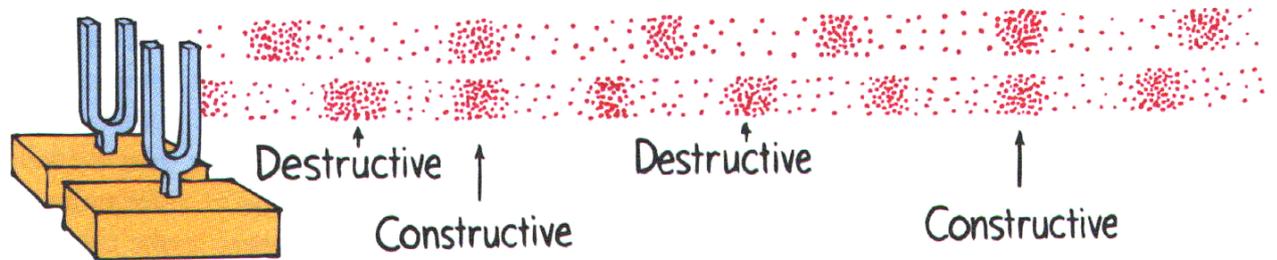
**Interferência construtiva**

**Interferência destrutiva**

**Exemplo**

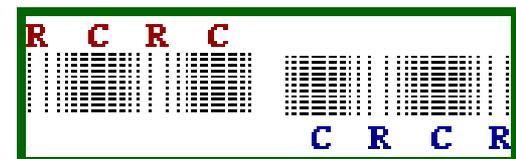


# Interferência



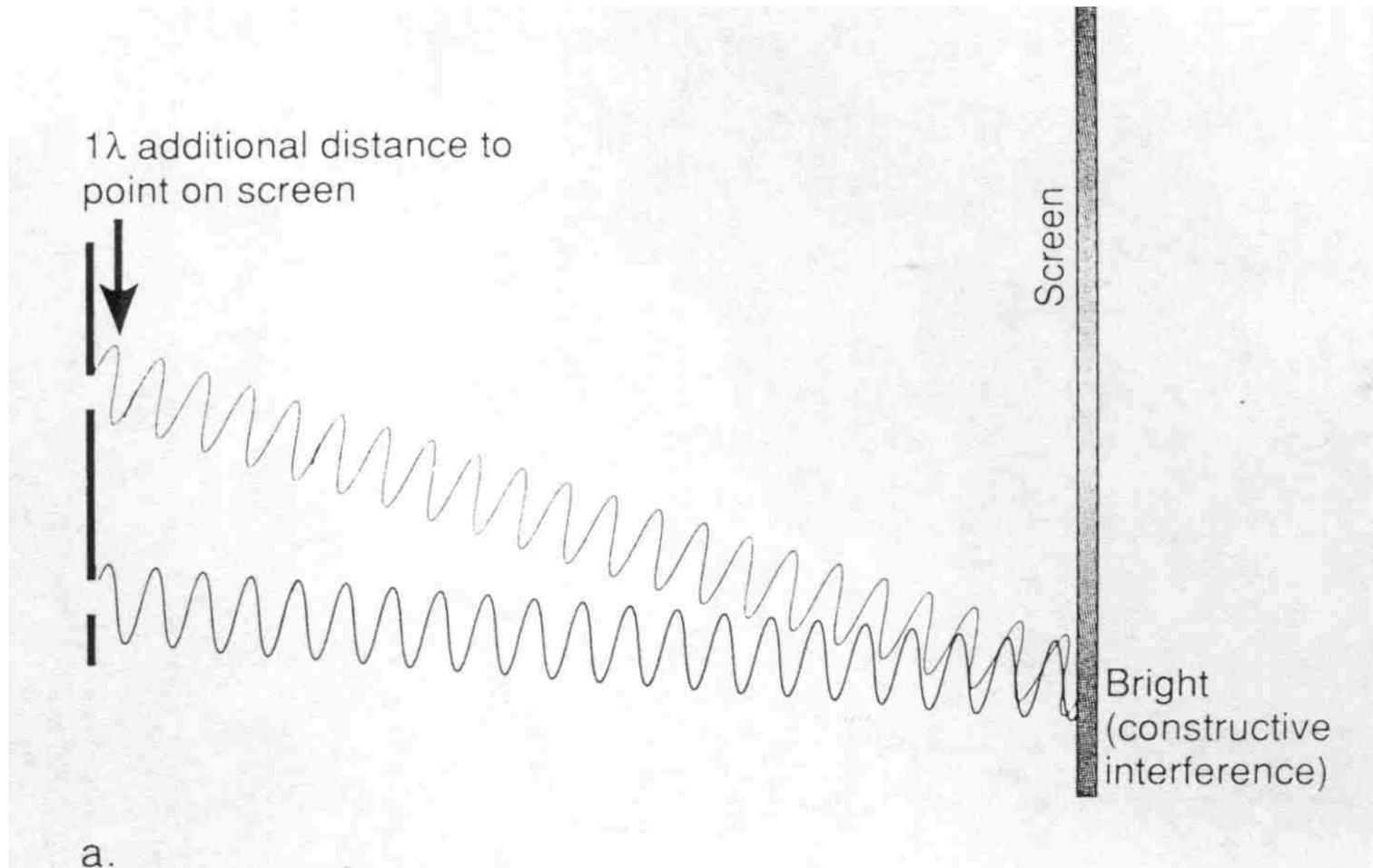
Interferência de compressões de uma onda sonora resultam em...  
...interferência construtiva.  
...um som mais forte.

Interferência de regiões de compressão e rarefação resultam em...  
...interferência destrutiva.  
...um som mais fraco.



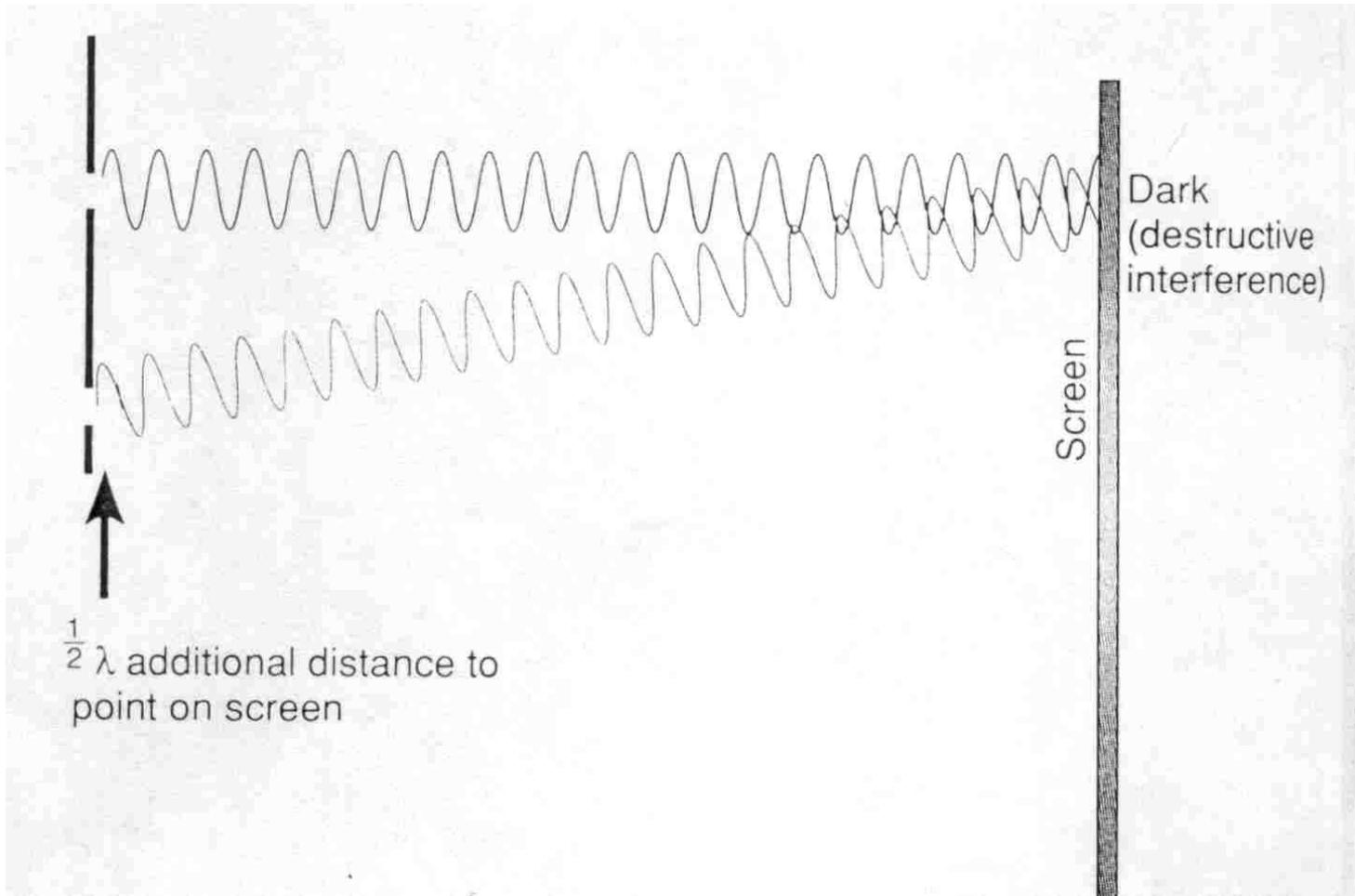
# Interferência de duas fendas

- Construtiva: diferença no caminho = múltiplos de  $\lambda$



# Interferência de duas fendas

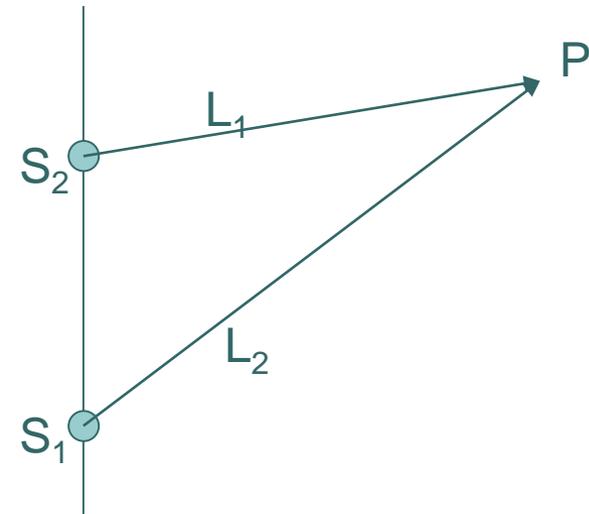
- Destrutiva: diferença no caminho = múltiplos de  $\lambda/2$



# Interferência: 2 fontes pontuais

$$\Delta L = |L_2 - L_1|$$

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\Delta L}{\lambda} \rightarrow \phi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi \quad \text{Diferença de fase}$$



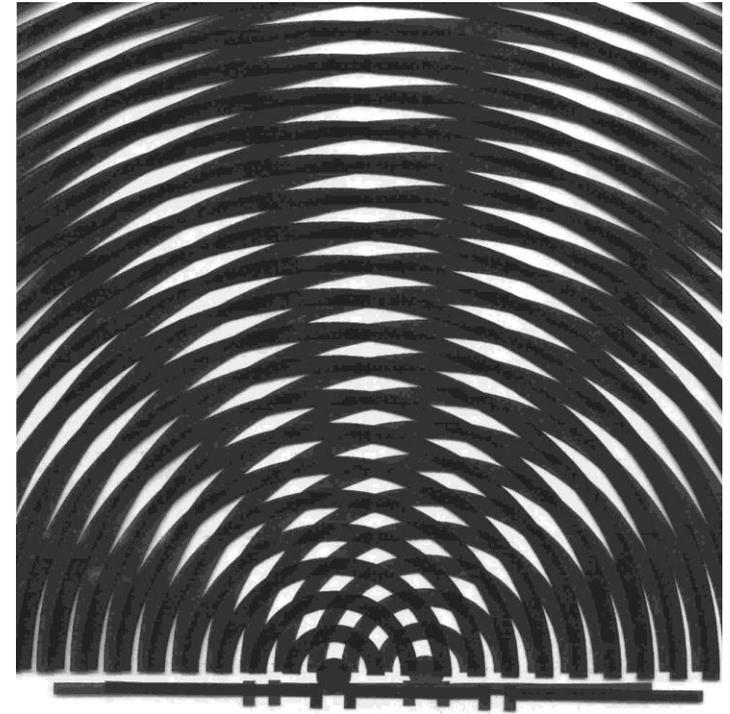
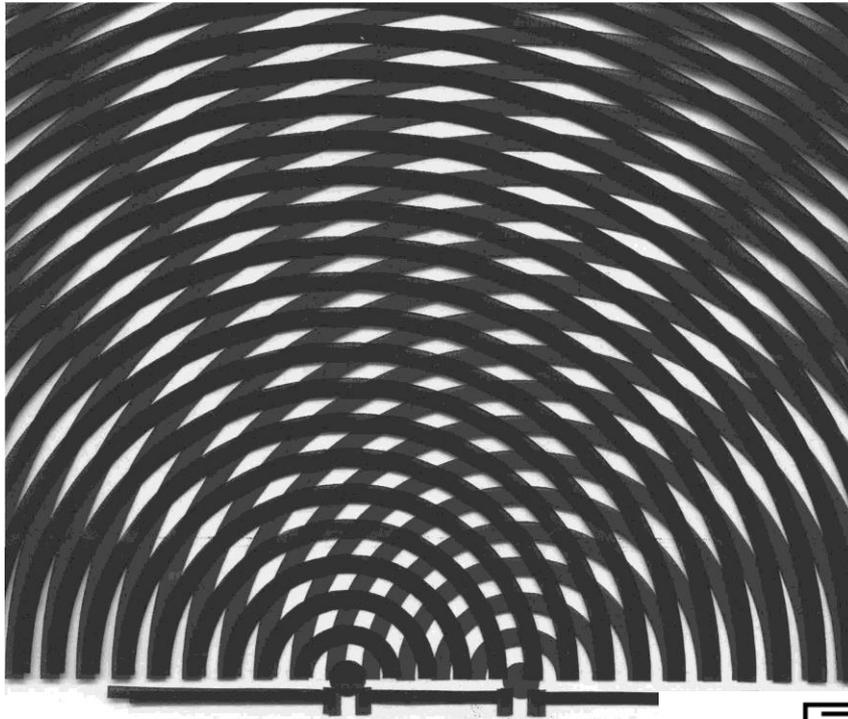
$$\phi = m(2\pi), \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots$$

Interferência totalmente construtiva

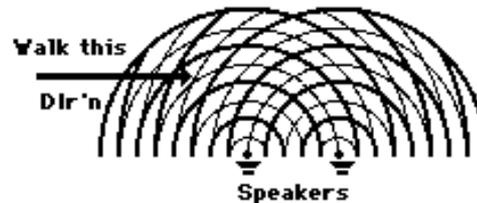
$$\phi = (2m + 1)\pi, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots$$

Interferência totalmente destrutiva

# Interferência de duas fendas



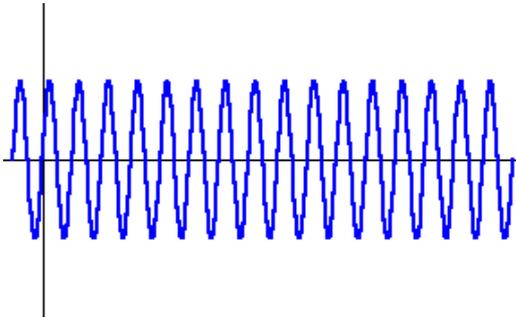
Compressions  
Rarefactions



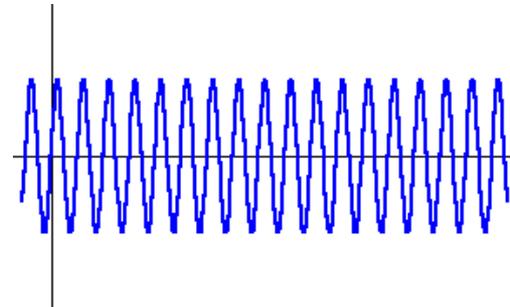
# Batimento

- Batimentos – variação periódica da intensidade de dois sons tocados juntos.
- A frequência de batimento é igual à diferença na frequência dos dois sons.

$$y_1 = A \sin(2\pi f_1 t)$$

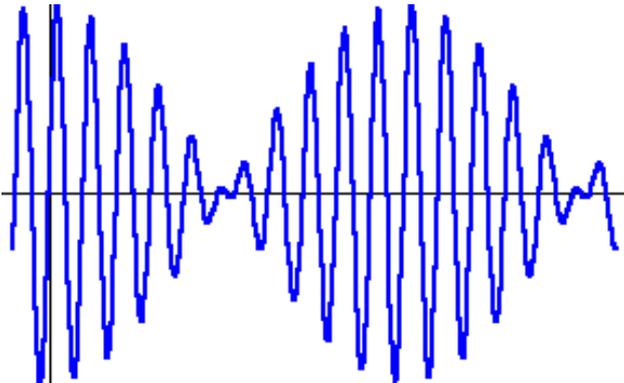


$$y_2 = A \sin(2\pi f_2 t)$$



# Batimento

$$y = y_1 + y_2 = \left[ 2A \cos 2\pi \left( \frac{f_1 - f_2}{2} \right) t \right] \sin 2\pi \left( \frac{f_1 + f_2}{2} \right) t$$



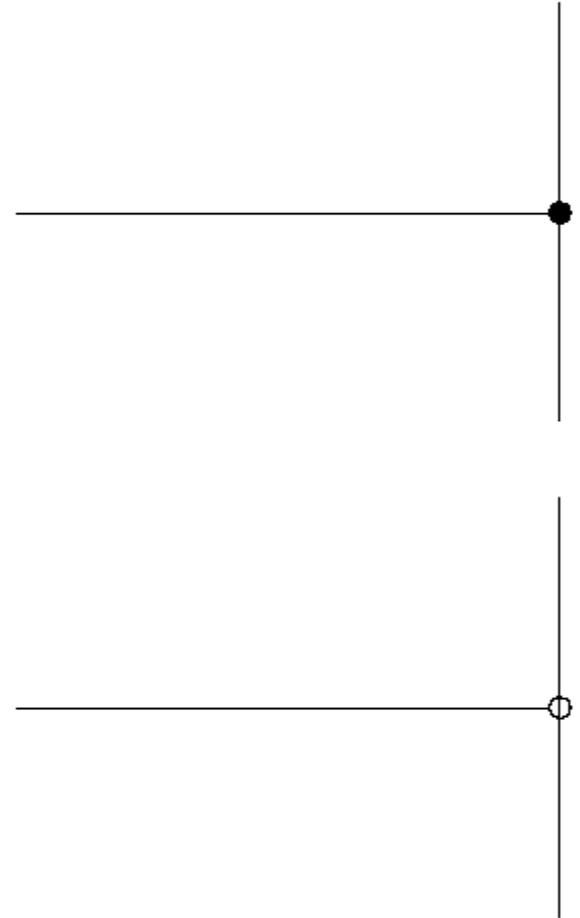
A onda resultante é uma onda de frequência  $f_{\text{med}} = (f_1 + f_2)/2$ , com um envelope com frequência  $f_b = |f_1 - f_2|$ . A frequência do envelope é chamada frequência de batimento (nome óbvio ao ouvir os sons).

- 330 Hz senoidal (E na escala cromática igualmente temperada).
- 330 Hz + 331 Hz. (resulta em uma frequência de batimento de 1 Hz.)
- 330 Hz + 340 Hz. (resulta em uma frequência de batimento de 10 Hz.)

Batimentos são geralmente usados para afinar instrumentos. A frequência desejada é comparada com a frequência do instrumento.

# Reflexão de ondas

- Cordas com uma extremidade fixa:
  - Pulso refletido retorna invertido com relação ao incidente
- Cordas com uma extremidade solta
  - Pulso refletido retorna igual ao incidente.



# Reflexão de ondas

- Reflexão das ondas depende da diferença entre a impedância característica do meio em ambos lados de uma interface.
- Quanto maiores forem as diferenças na impedância, maior será a fração de energia refletida, e portanto menor a fração de energia transmitida



Reflexão em uma interface suave-dura



Reflexão em uma interface dura-suave

# Ondas estacionárias

duas ondas idênticas se propagando em sentidos contrários

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad y_2(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$$


A superposição

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t)$$

Usando de novo a relação

$$\sin a + \sin b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

# Ondas estacionárias

Amplitude depende de  $x$

$$y(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

Varição  
temporal da  
amplitude

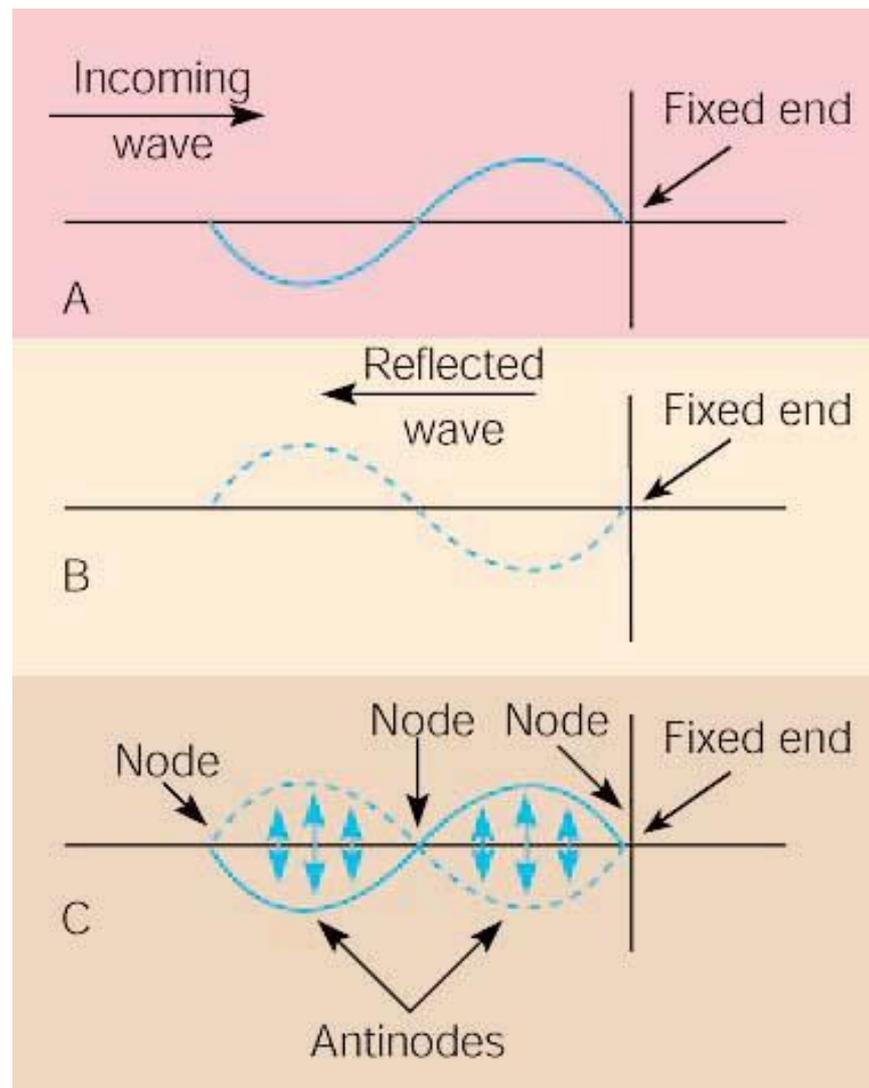
Esta não é uma onda progressiva, não tem o termo  $(kx - \omega t)$ .  
Isto é uma **onda estacionária**.

Existem pontos que são sempre nulos, onde  $kx = 0, \pi, 2\pi, \dots$

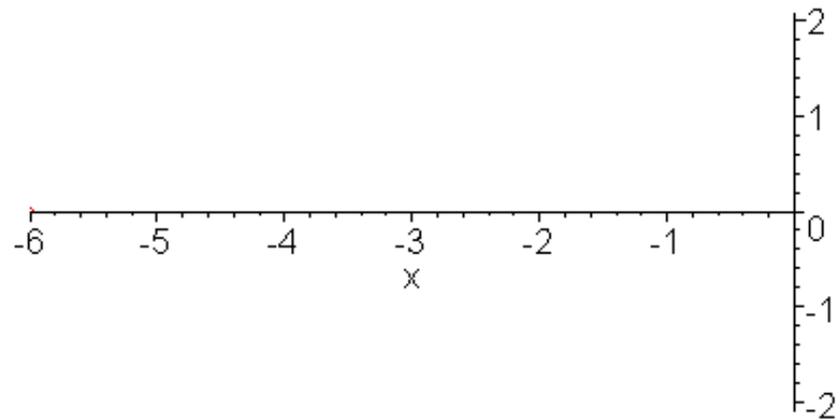
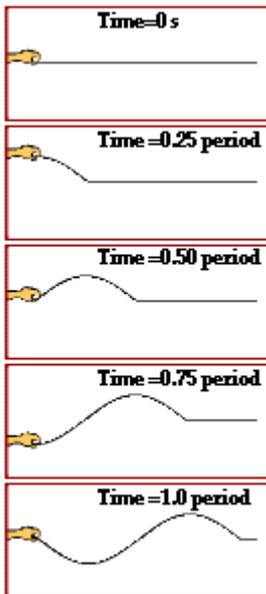
<http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/viewtopic.php?t=35>

# Formação de Ondas Estacionárias

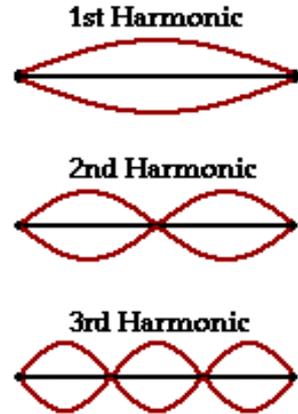
- Uma onda incidente em uma corda com extremidade fixa (A) encontra uma onda refletida (B) com a mesma amplitude e frequência, gerando uma onda estacionária (C). Note que a onda estacionária de um comprimento de onda tem três nós e dois anti-nós.



# Formação de ondas estacionárias



# Cordas Vibrantes



## ○ Ondas Estacionárias:

- Quando ondas refletidas se somam com ondas incidentes.
- Criam uma forma de nós e anti-nós.

## ○ Nós:

- Lugares de amplitude nula (ondas se cancelam mutuamente).

## ○ Anti-Nós:

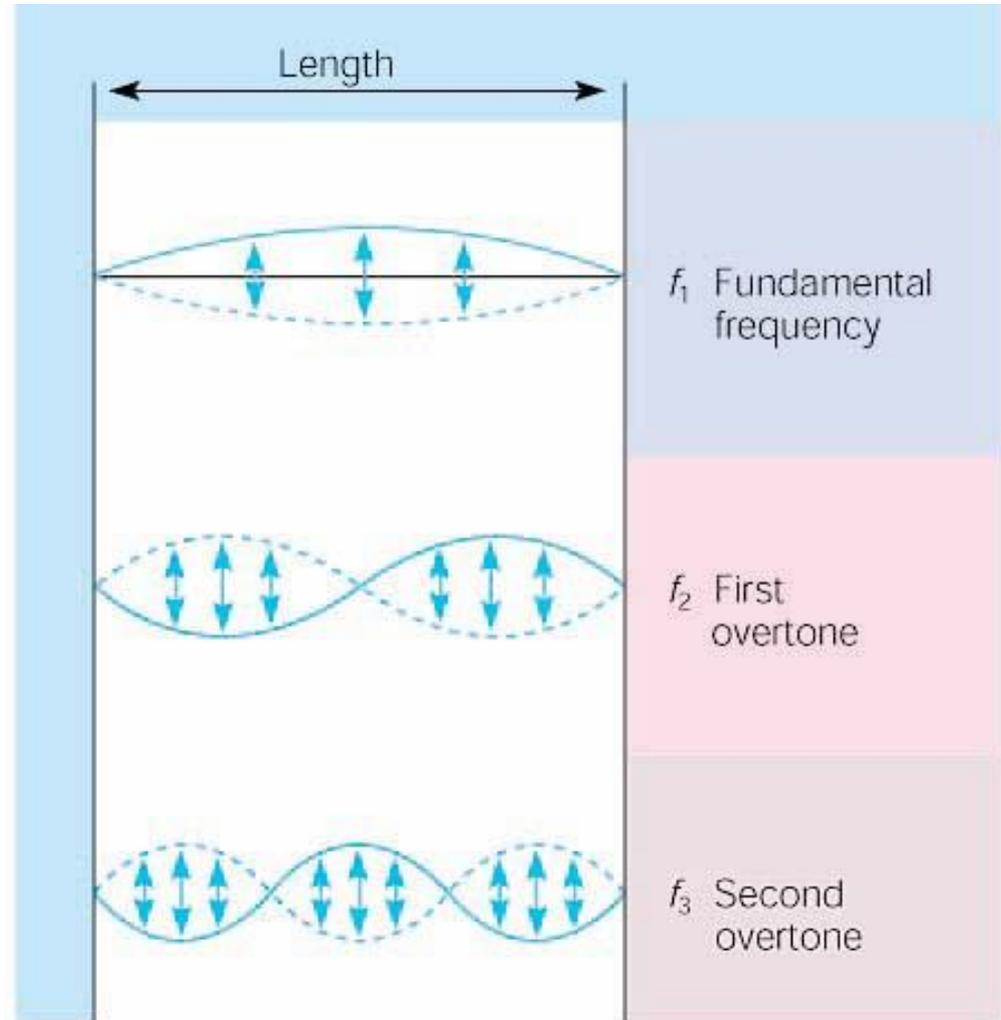
- Lugares onde as cristas e vales produzem distúrbios que rapidamente se alternam, para cima e para baixo.

## ○ Frequência Fundamental:

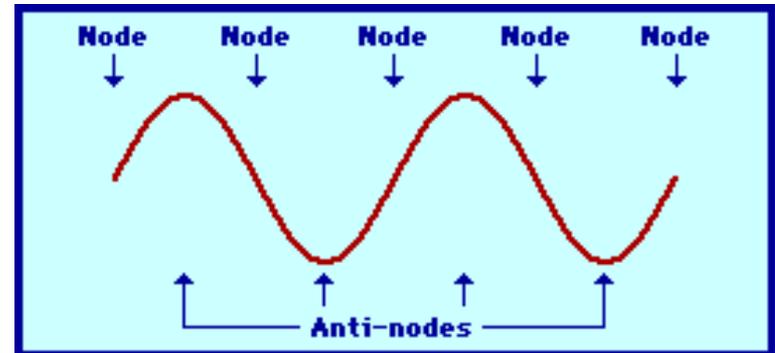
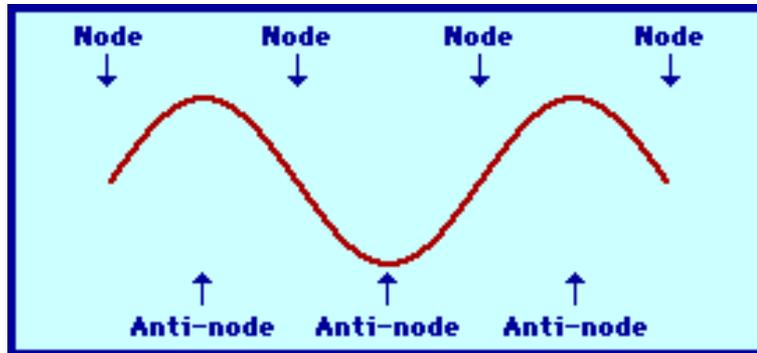
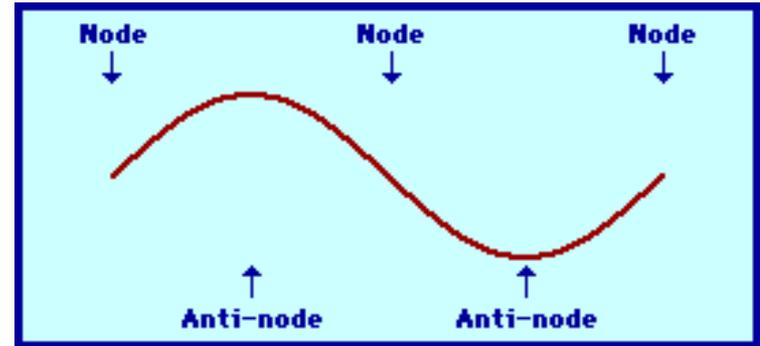
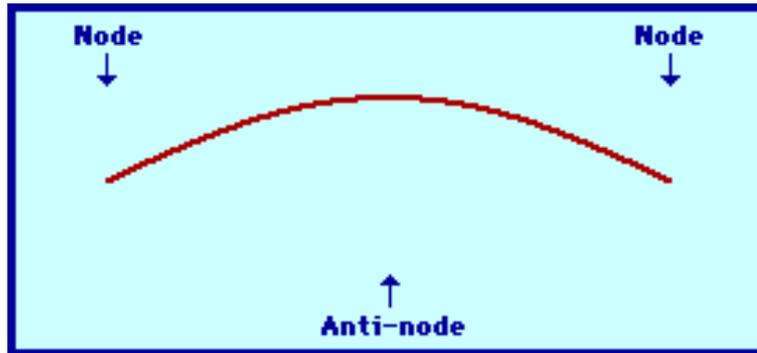
- O onda mais longa que pode formar uma onda estacionária em uma corda tem um comprimento de onda que é duas vezes maior que o comprimento da corda.
- Esse comprimento de onda maior tem a menor frequência, e é chamado de frequência fundamental.
- A frequência fundamental determina a altura (pitch) do som, e é chamado também primeiro harmônico.

# ● ● ● | Freqüência Fundamental

Uma corda esticada de um dado comprimento tem um número possível de frequências ressonantes. A frequência mais baixa é chamada fundamental,  $f_1$ ; As demais frequências, ou sobretons, são conhecidas como frequências superiores (a fig. mostra  $f_2$  e  $f_3$ ).

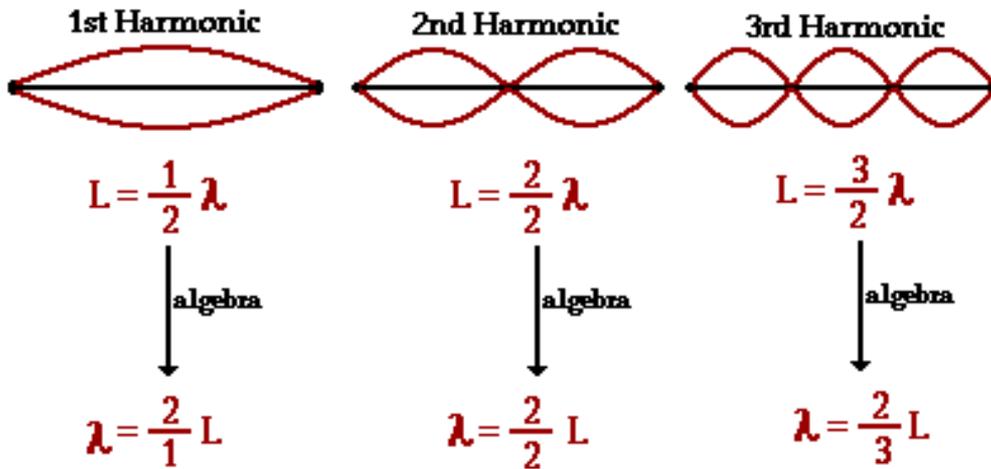


# Ondas estacionárias



# Harmônicos em cordas

## Lowest Three Natural Frequencies of a Guitar String



Nós nas extremidades!

No caso de instrumentos, o som é Amplificado pelas caixas acústicas desses instrumentos (violão, piano, etc...)

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L}$$

# Ondas estacionárias: Exemplos

- A tecla mais aguda de um piano corresponde a uma frequência 150 vezes maior que a corda mais grave. Se o comprimento da corda mais aguda é 5,0 cm, quanto teria que ter a corda mais grave, se elas tivessem a mesma densidade linear de massa e a mesma tensão?
- A velocidade seria a mesma para as duas cordas:

$$f = \frac{v}{2L} \quad \frac{L_g}{L_a} = \frac{f_a}{f_g} \quad L_g = L_a \frac{f_a}{f_g} = 5 \times 150 = 750 \text{ cm} = 7,5 \text{ m}$$

Portanto, na realidade as cordas graves são mais pesadas para evitar que sejam muito compridas...

# Ondas estacionárias: Exemplos

- Uma corda de violino de 32cm está tocando a nota A, acima da nota C na escala bem temperada (correspondente a 440 Hz). (a) Qual é o comprimento de onda do harmônico fundamental? (b) Quais são as frequências e comprimento de onda da onda sonora produzida? (c) Por que há diferença?

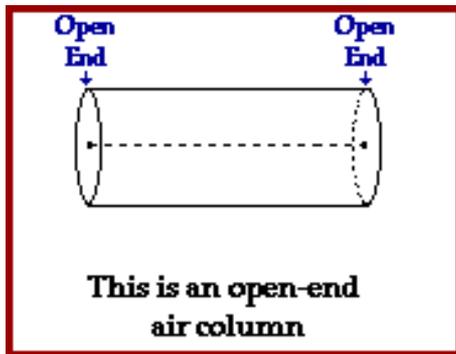
(a) comprimento de onda da onda estacionária na corda:

$$\lambda = 2L = 0.64\text{m} = 64 \text{ cm}$$

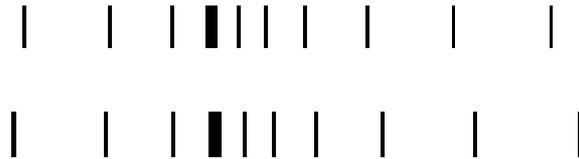
(b) A onda sonora tem a mesma frequência,  $f = 440 \text{ Hz}$ .

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343 \text{ m/s}}{440 \text{ Hz}} = 0,78 \text{ m}$$

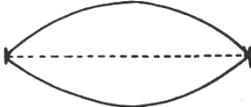
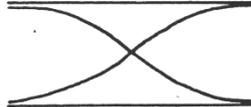
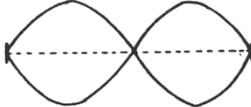
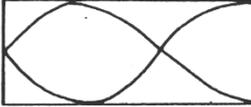
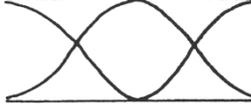
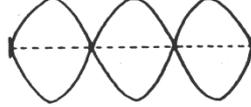
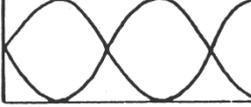
# Ondas estacionárias: tubos



The open end of a cylindrical tube serves as a "free end reflector" and the closed end of a cylindrical tube serves as a "fixed end reflector."



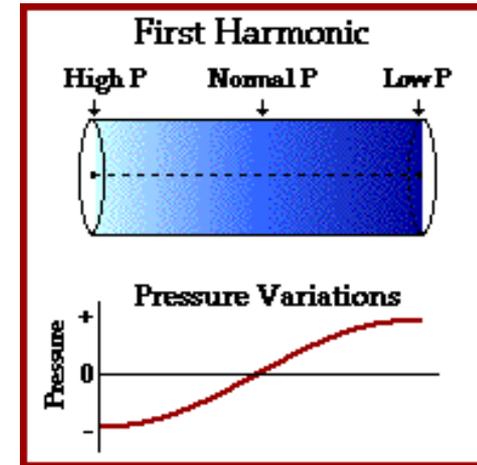
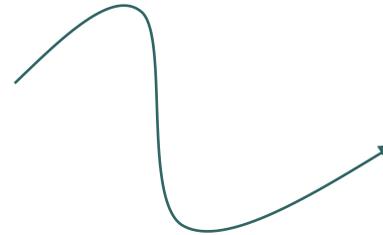
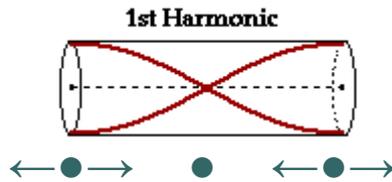
The natural frequency of a trombone can be modified by changing the length of the air column inside the metal tube.

VIBRATING STRING	CLOSED PIPE	OPEN PIPE
 <p>Fundamental 1st Harmonic</p>	 <p>Fundamental 1st Harmonic</p>	 <p>Fundamental 1st Harmonic</p>
 <p>1st Overtone 2nd Harmonic</p>	 <p>1st Overtone 3rd Harmonic</p>	 <p>1st Overtone 2nd Harmonic</p>
 <p>2nd Overtone 3rd Harmonic</p>	 <p>2nd Overtone 5th Harmonic</p>	 <p>2nd Overtone 3rd Harmonic</p>
<p>Displacement nodes occur at each end of the string.</p>	<p>Displacement nodes occur on the closed end and dis- placement antinodes on the open end.</p>	<p>Displacement antinodes occur at each end of the open pipe.</p>

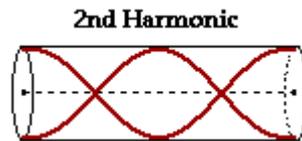
Descrição em termos de deslocamento do ar

# Ondas estacionárias: tubos abertos

$$L = \frac{\lambda_1}{2}$$
$$f_1 = \frac{v}{2L}$$



$$L = \lambda_2$$
$$f_2 = \frac{v}{L} = 2f_1$$



$$L = \frac{3}{2}\lambda_3$$
$$f_3 = \frac{3v}{2L} = 3f_1$$



(esta descrição está sendo feita em termos dos deslocamentos de ar. A pressão tem o comportamento oposto)

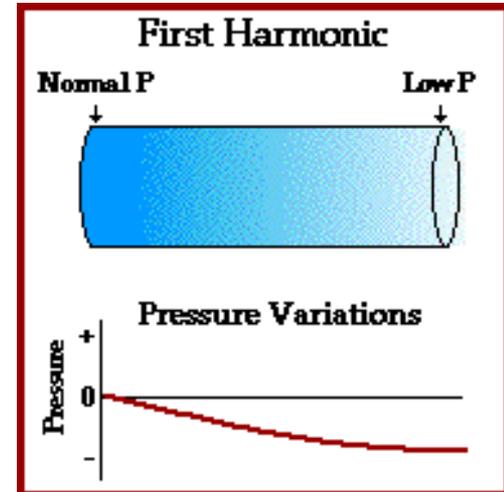
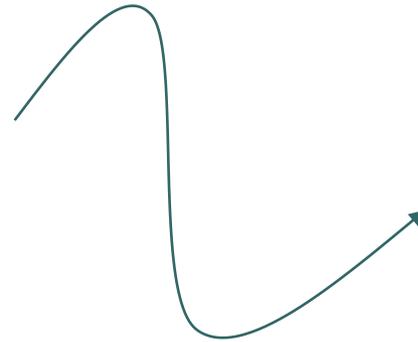
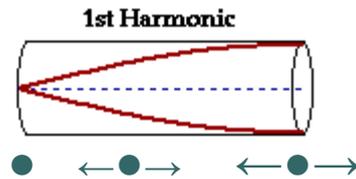


# Ondas estacionárias em tubos com uma extremidade fechada

$$L = \frac{\lambda_1}{4}$$
$$f_1 = \frac{v}{4L}$$

$$L = \frac{3}{4} \lambda_3$$
$$f_3 = \frac{3v}{4L} = 3f_1$$

$$L = \frac{5}{4} \lambda_5$$
$$f_5 = \frac{5v}{4L} = 5f_1$$



(esta descrição está sendo feita em termos dos deslocamentos de ar. A pressão tem o comportamento oposto)

# Ondas estacionárias: som



- Ondas estacionárias nesses tubos abertos têm **anti-nós** de deslocamento na extremidade aberta, onde o ar é livre para vibrar.

# Ondas estacionárias: órgãos

- Tubos de órgão abertos e fechados: Qual é a frequência fundamental e os três primeiros parciais de um tubo de órgão de 26 cm de comprimento a 20°C, se ele for (a) aberto ou (b) fechado?

(a) Harmônico fundamental: 
$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{343 \text{ m/s}}{2 \times (0,26\text{m})} = 660 \text{ Hz}$$

Os parciais, que incluem todos os harmônicos, são 1320 Hz, 1980 Hz, 2640 Hz, e assim por diante

(b) Harmônico fundamental: 
$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{343 \text{ m/s}}{4 \times (0,26\text{m})} = 330 \text{ Hz}$$

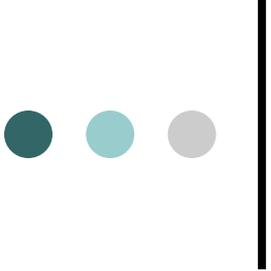
Os parciais, que incluem apenas os harmônicos ímpares, são então 990 Hz, 1650 Hz, 2310 Hz, e assim por diante

# Ondas estacionárias: Flauta

- Uma flauta é desenhada para tocar no na nota dó central (262 Hz) como frequência fundamental quando todos os buracos estão tampados. Qual deve ser a distância entre o bocal e o fim da flauta (obs: essa é apenas uma distância aproximada)? Assuma a temperatura de 20°C.

$$f = \frac{v}{2L}$$

$$L = \frac{v}{2f} = \frac{343 \text{ m/s}}{2 \times 262 \text{ s}^{-1}} = 0,655 \text{ m}$$



# Ondas estacionárias: Flauta

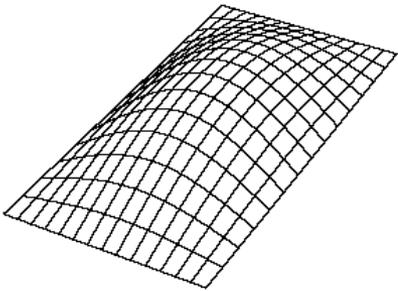
Dado que a velocidade do som no ar depende da temperatura como  $v = 331 + 0.6 T (^{\circ}\text{C})$ . Qual seria a frequência da nota tocada do mesmo modo que no problema anterior se a temperatura fosse apenas  $10^{\circ}\text{C}$  ?

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{337 \text{ m/s}}{2 \times 0,655 \text{ m}} = 257 \text{ Hz}$$

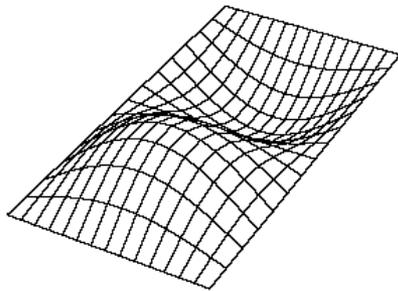
Este exemplo ilustra porque os músicos “aquecem” os instrumentos para afiná-los...

# Modos vibracionais: membranas

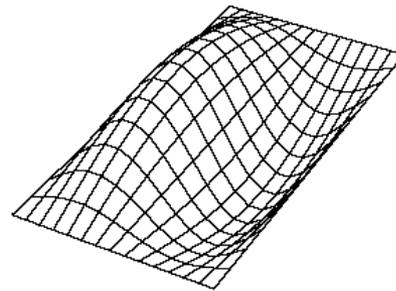
## ○ Membrana retangular



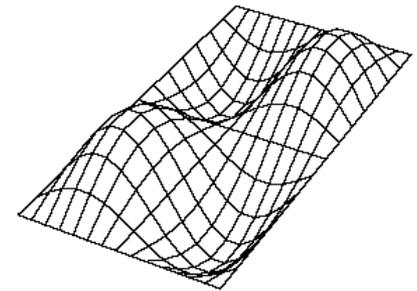
Modo (1,1)



Modo (1,2)



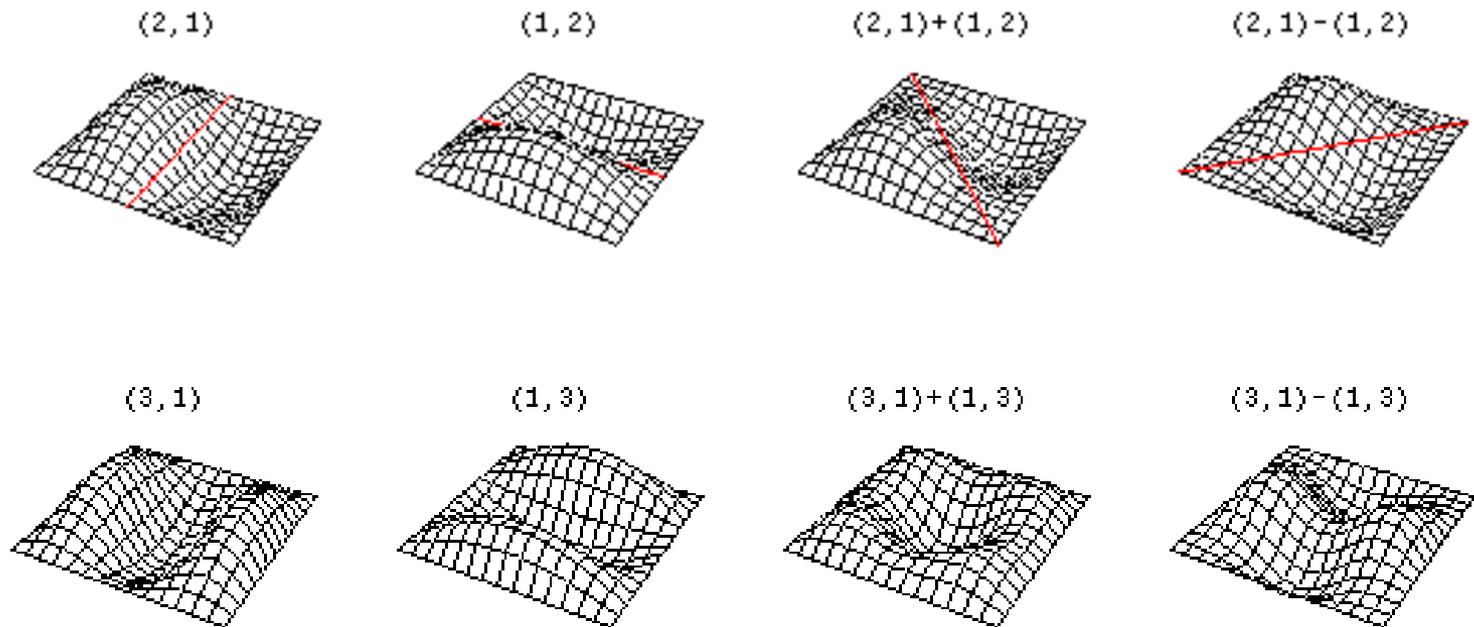
Modo (2,1)



Modo (2,2)

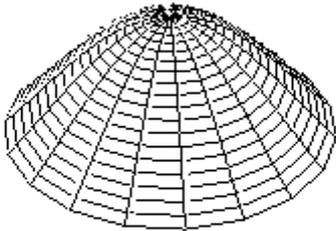
# Modos vibracionais: membranas

## ○ Membranas quadradas

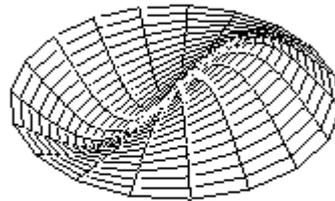


# Modos vibracionais: membranas

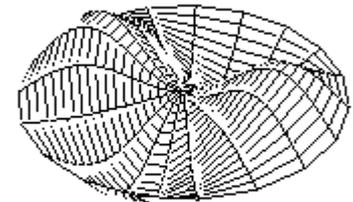
## ○ Membrana circular - tambores



Modo (0,1)



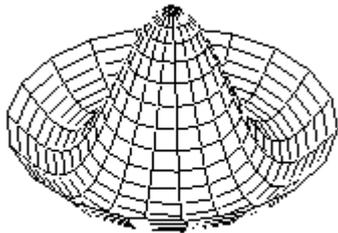
Modo (1,1)



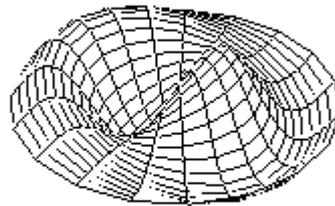
Modo (2,1)

# Modos vibracionais: membranas

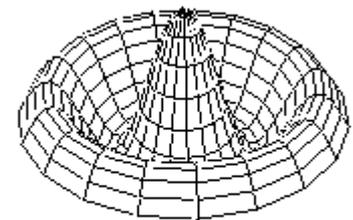
## ○ Membrana circular - tambores



Modo (0,2)



Modo (1,2)

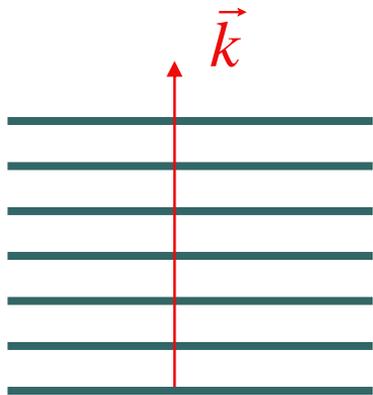


Modo (0,3)

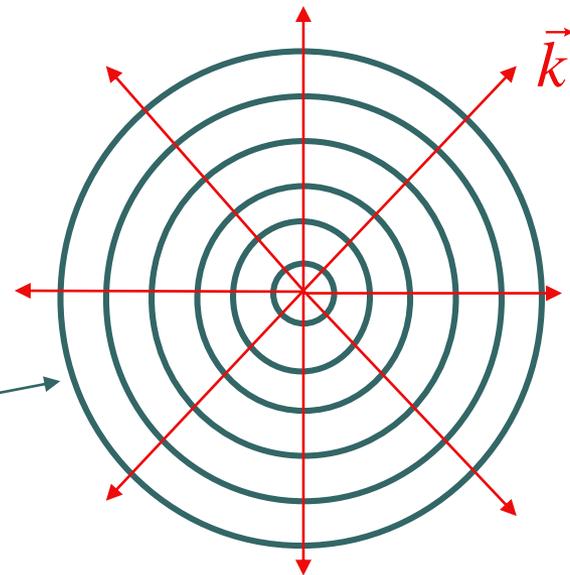
# Ondas bi e tridimensionais

- Para ondas bi e tridimensionais estaremos preocupados com frentes de onda, ou seja, a largura completa da crista da onda. O raio é uma linha desenhada na direção do movimento, perpendicular à frente de onda.

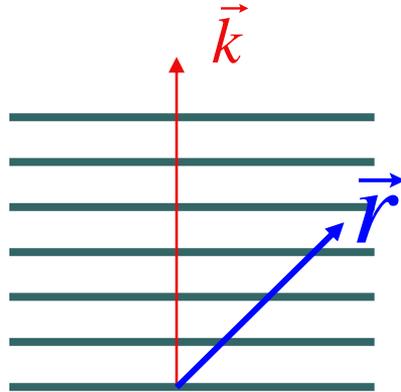
- Ondas planas e esféricas



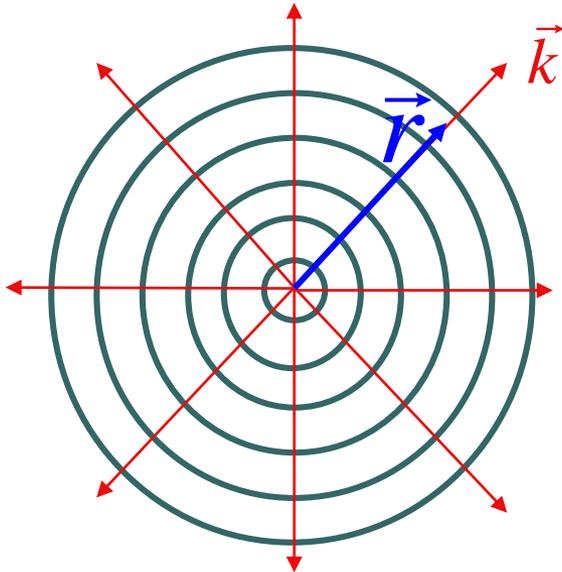
← Cristas de ondas →



# Ondas bi e tridimensionais



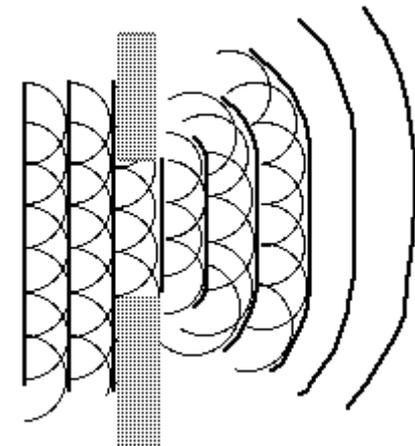
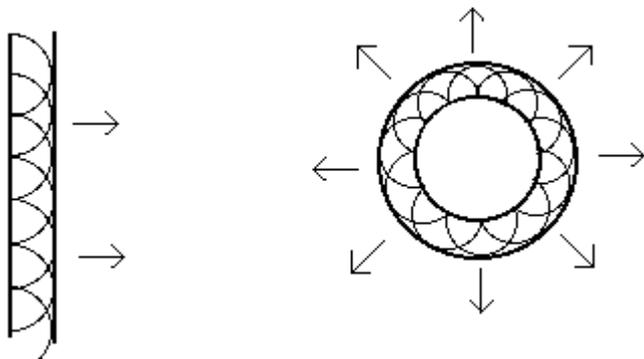
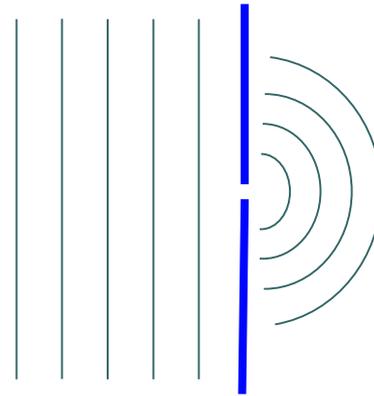
$$\varphi(\vec{r}, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$



$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi(r, t) = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega t)$$

# Princípio de Huygens

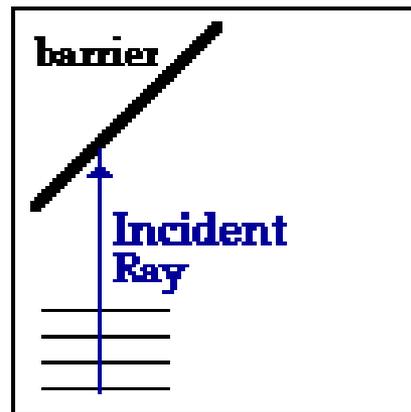
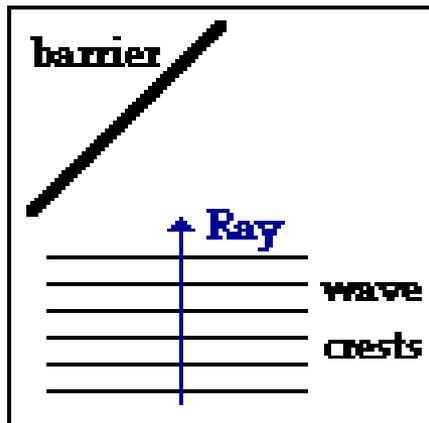
Cada ponto do espaço age como uma nova fonte pontual de emissão quando atingida por uma frente de onda. A **envoltória** das **novas frentes** ( **frentes secundárias**) são as frentes de onda ulteriores.



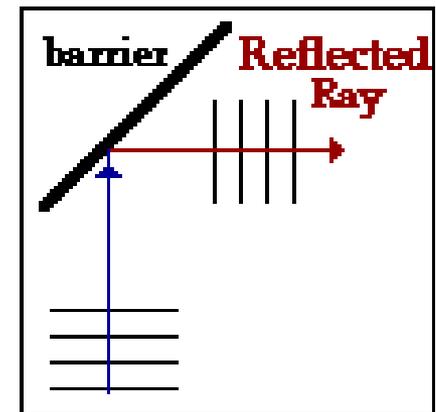
# Reflexão de ondas

- Lei da reflexão: o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência

## The Law of Reflection



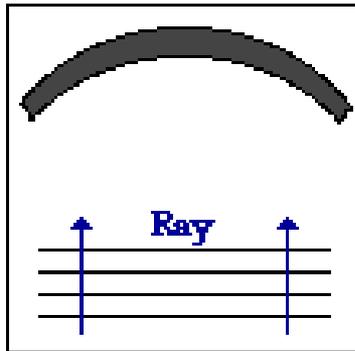
Before Reflection



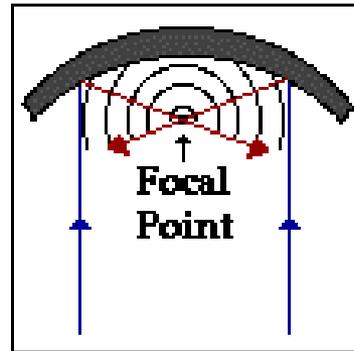
After Reflection

# Reflexão de ondas

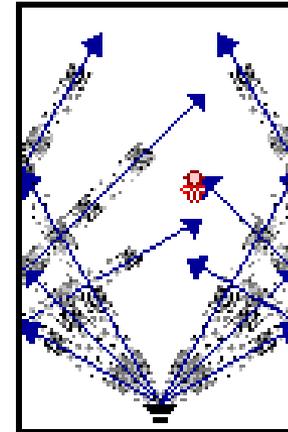
## Reflection off of Curved Surfaces



Before Reflection

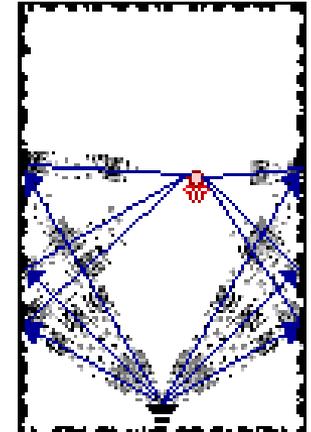


After Reflection



Smooth walls fail to give the room a feel of full sound.

Parede lisa



Rough walls give a room a feel of full and lively sound.

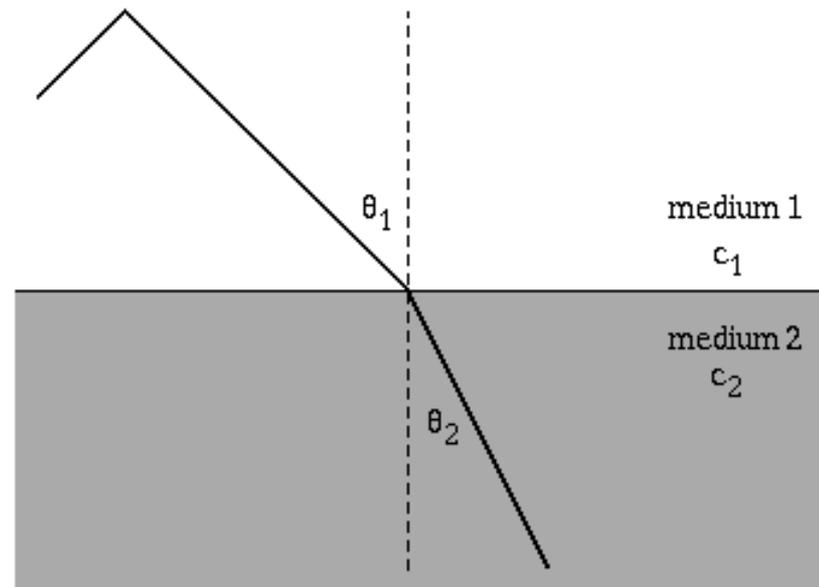
Parede rugosa

# Refração de ondas

- Causada pela variação da velocidade da onda quando cruza dois meios com características diferentes.

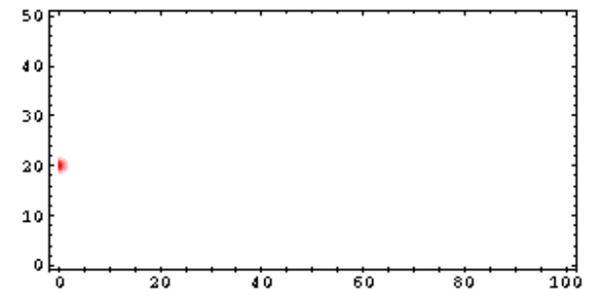
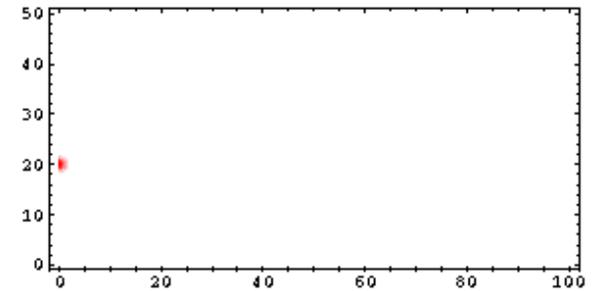
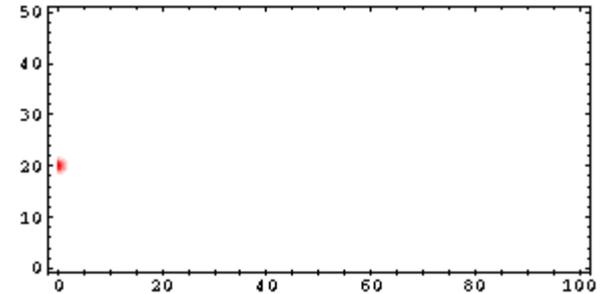
## ○ Lei de Snell:

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$$



# Gradientes de Temperatura

- Um gradiente de temperatura voltado para cima (temperaturas do solo menores) produzem uma deflexão para baixo.
- Um gradiente de temperatura voltado para baixo (temperaturas do solo maiores) produzem uma deflexão para cima.

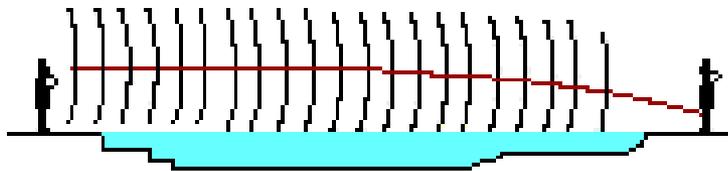


# Efeitos de temperatura

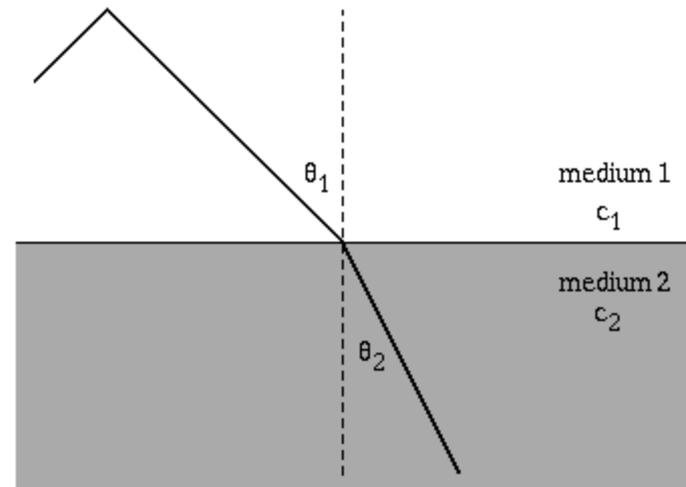
- A velocidade do som depende da temperatura:

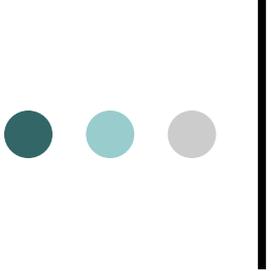
$$v = 331 + 0.6 T (^{\circ}\text{C}) \text{ no ar.}$$

Então, gradientes de temperatura implicam em variações de velocidade... (lei de Snell)



**Refraction of Sound Waves**





# Difração de ondas

- Objetos interagem com a onda sonora das seguintes maneiras:
- Objetos que são menores que  $1/6$  do comprimento de onda são 'transparentes' ao som.
- Objetos com tamanhos comparáveis ao comprimento de onda espalham ou difratam a onda sonora
- Objetos com tamanhos de mais de 5-10 comprimentos de onda refletem a onda sonora

# Difração de ondas

- Como conseguimos às vezes escutar atrás de um muro?

