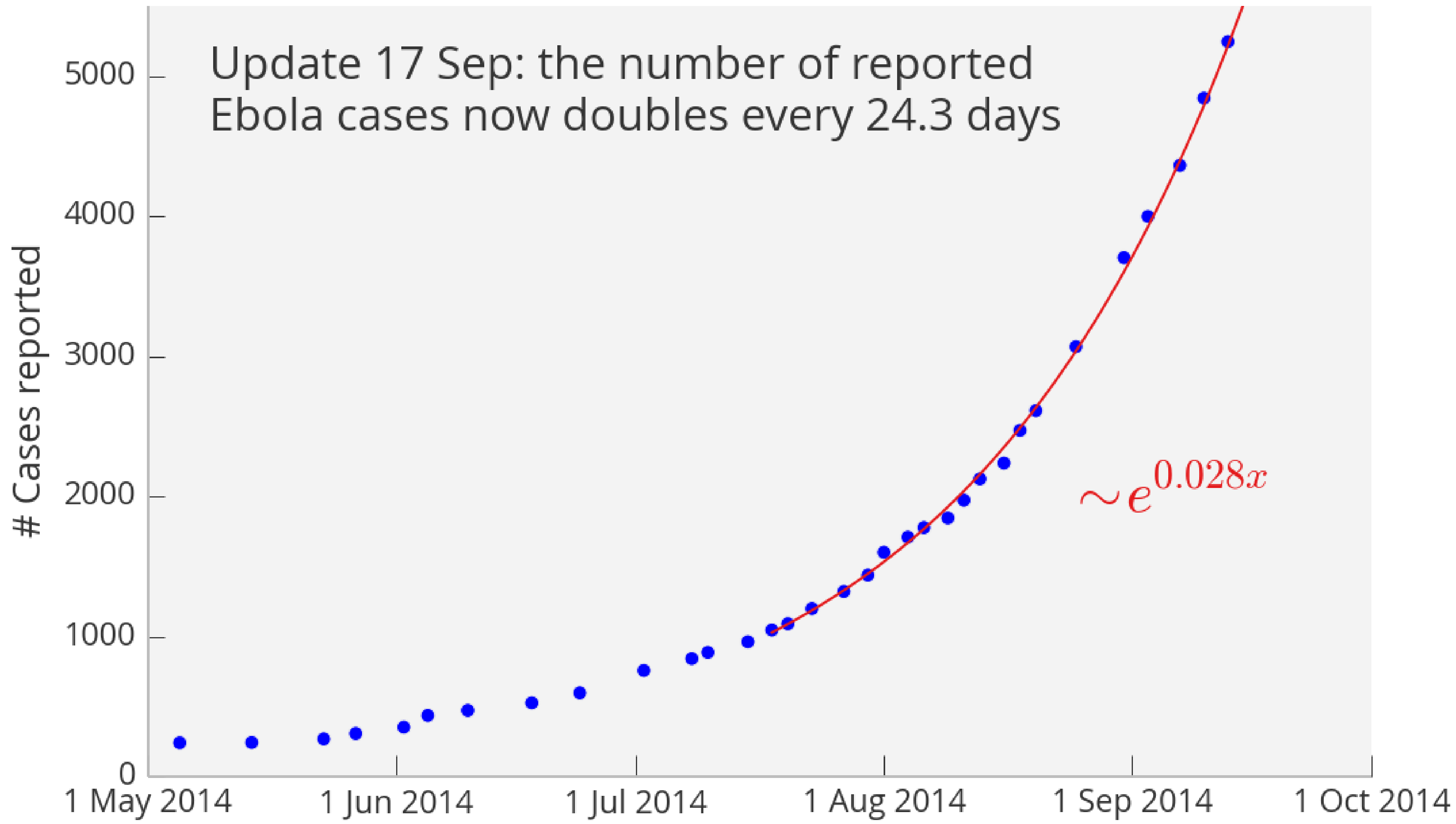
F-106 Fundamentos de Física para Biologia

Crescimento/Decaimento Exponencial

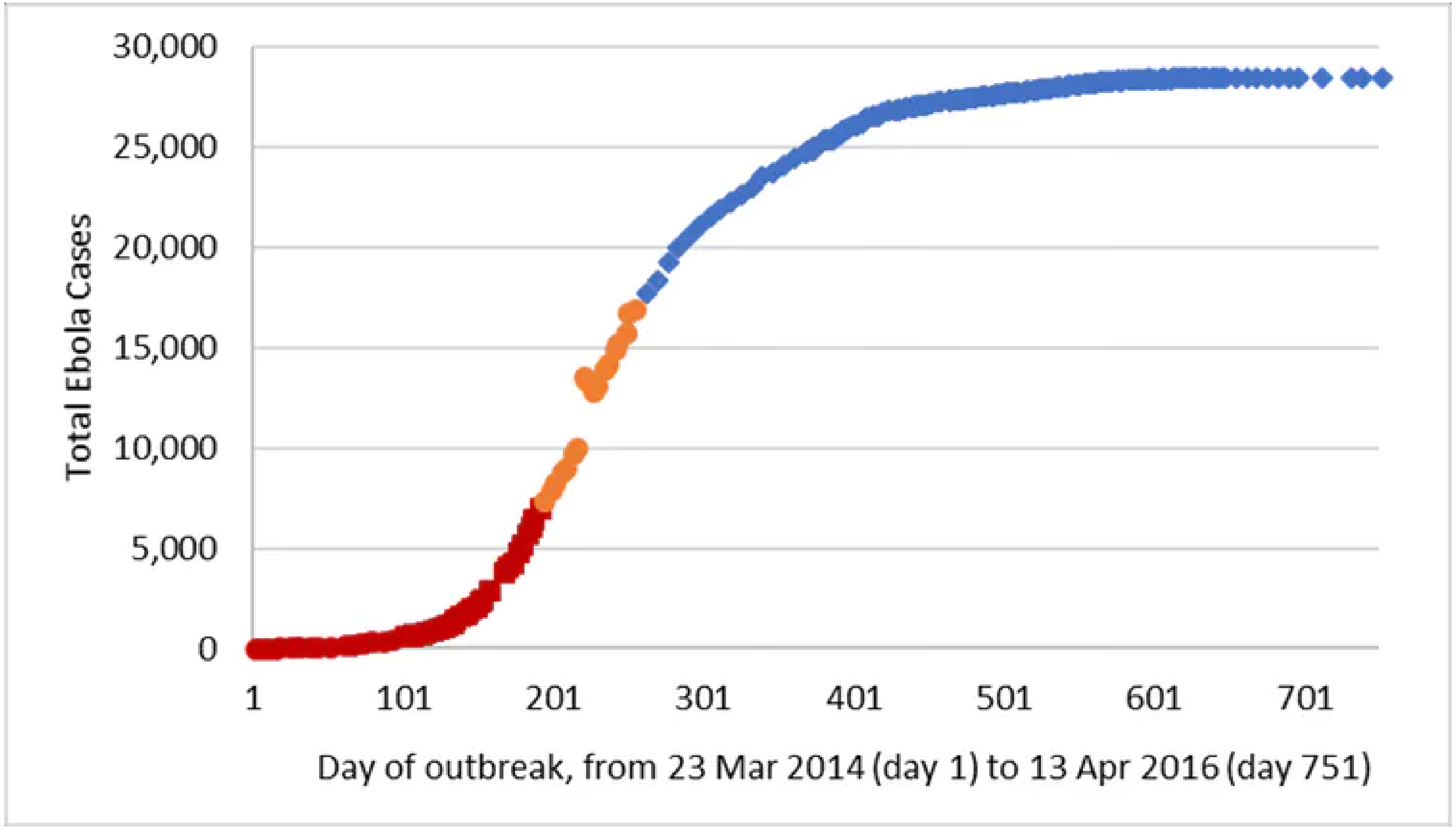
Prof. Dr. Edmilson J.T. Manganote

Introdução

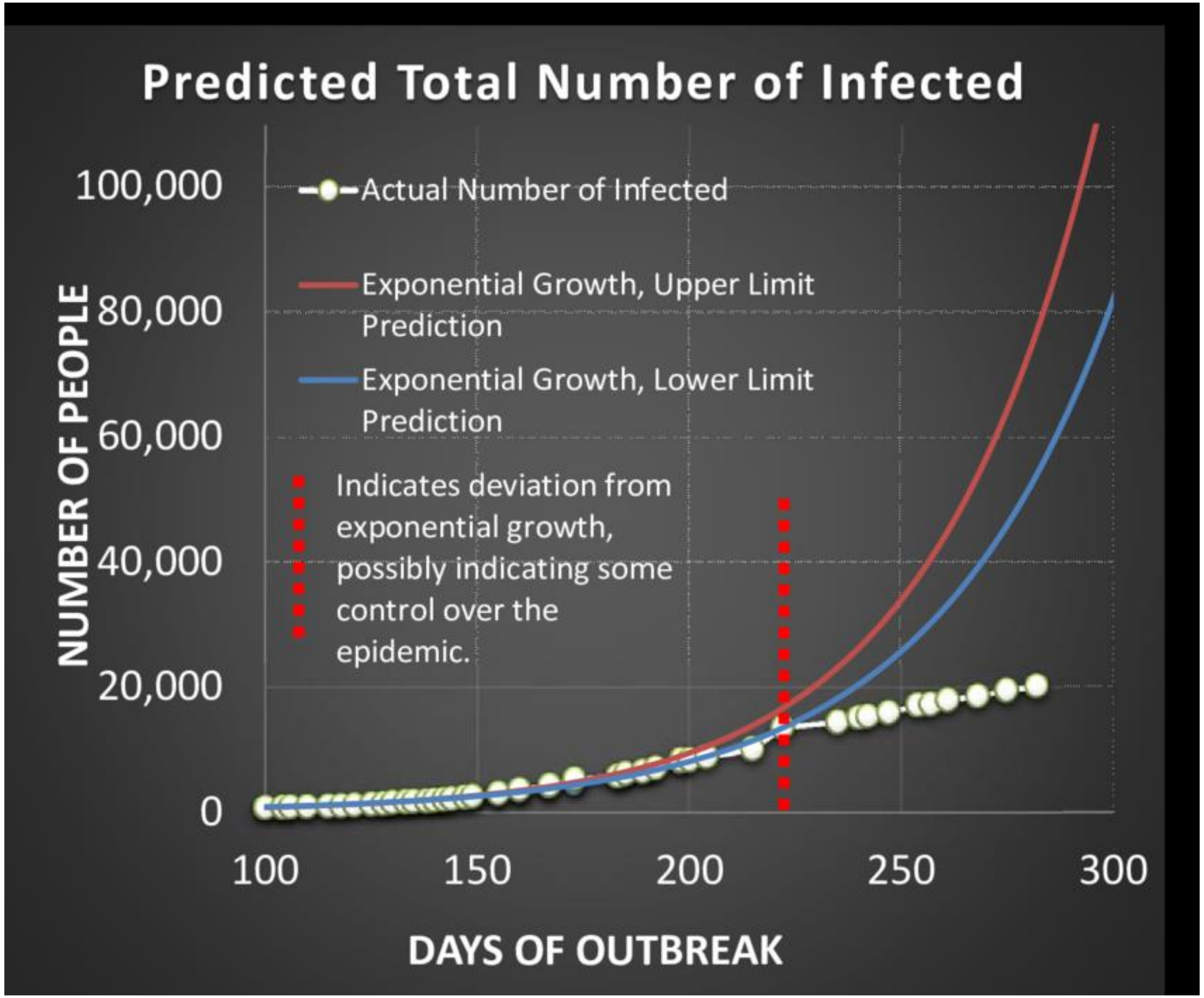


Source: http://en.wikipedia.org/wiki/2014_West_Africa_Ebola_outbreak#Timeline_of_the_outbreak
Author: Geert Barentsen (geert.io / @GeertHub)

Introdução

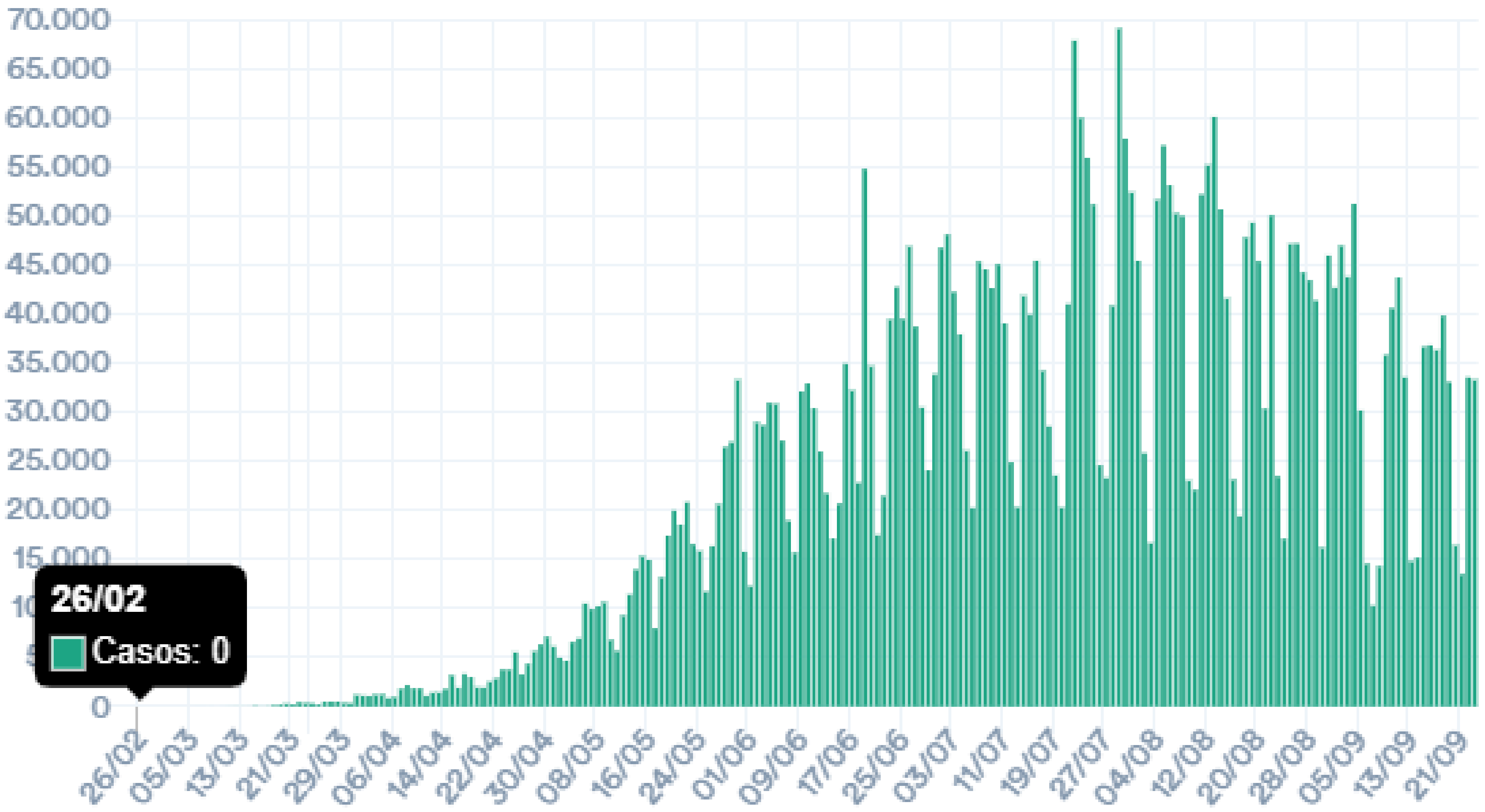

30,000
25,000
20,000
15,000
10,000
5,000
0
Total Ebola Cases
1
101
201
301
401
501
601
701
Day of outbreak, from 23 Mar 2014 (day 1) to 13 Apr 2016 (day 751)

Introdução

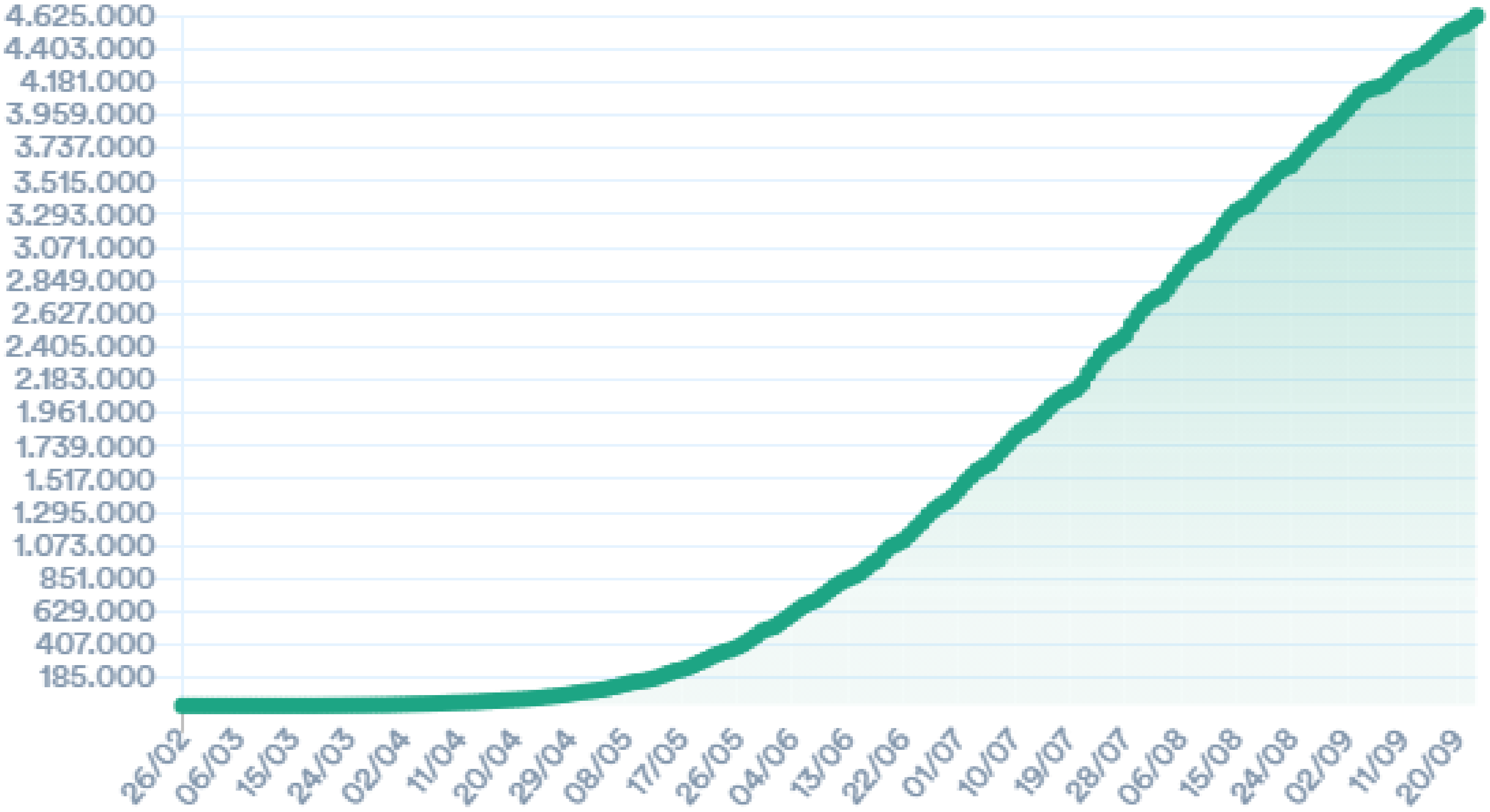


Predicted Total Number of Infected
Actual Number of Infected
Exponential Growth, Upper Limit Prediction
Exponential Growth, Lower Limit Prediction
Indicates deviation from exponential growth, possibly indicating some control over the epidemic.
NUMBER OF PEOPLE
100,000
80,000
60,000
40,000
20,000
0
100
150
200
250
300
DAYS OF OUTBREAK

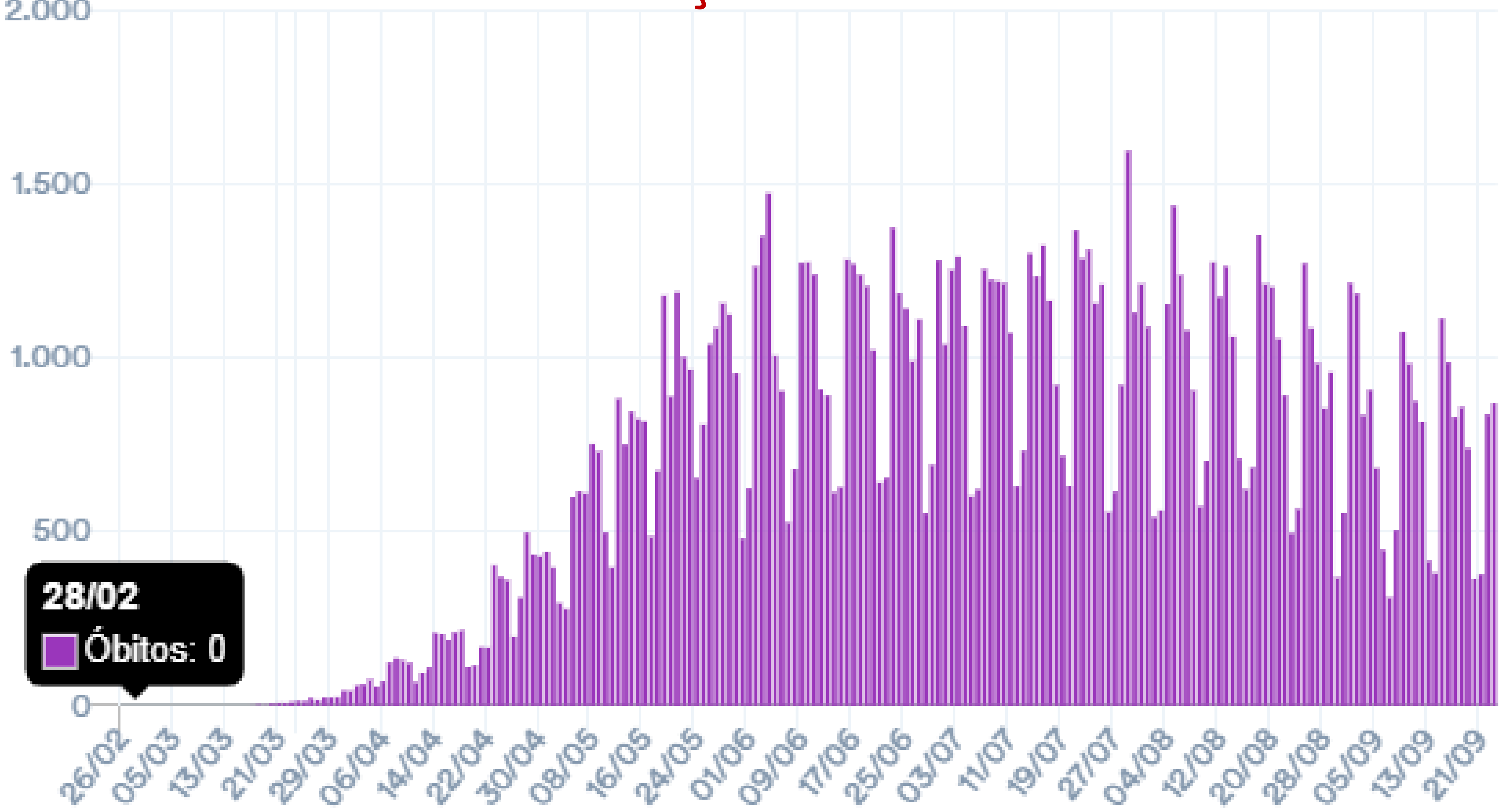
Introdução


70.000
65.000
60.000
55.000
50.000
45.000
40.000
35.000
30.000
25.000
20.000
0
26/02
Casos: 0
26/02
05/03
13/03
21/03
29/03
06/04
14/04
22/04
30/04
08/05
16/05
24/05
01/06
09/06
17/06
25/06
03/07
11/07
19/07
27/07
04/08
12/08
20/08
28/08
05/09
13/09
21/09

Introdução


4.625.000
4.403.000
4.181.000
3.959.000
3.737.000
3.515.000
3.293.000
3.071.000
2.849.000
2.627.000
2.405.000
2.183.000
1.961.000
1.739.000
1.517.000
1.295.000
1.073.000
851.000
629.000
407.000
185.000
26/02
06/03
15/03
24/03
02/04
11/04
20/04
29/04
08/05
17/05
26/05
04/06
13/06
22/06
01/07
10/07
19/07
28/07
06/08
15/08
24/08
02/09
11/09
20/09

Introdução


2.000
1.500
1.000
500
0
28/02
Óbitos: 0
26/02
05/03
13/03
21/03
29/03
06/04
14/04
22/04
30/04
08/05
16/05
24/05
01/06
09/06
17/06
25/06
03/07
11/07
19/07
27/07
04/08
12/08
20/08
28/08
05/09
13/09
21/09

Função Exponencial

$$f(x) = B^x \quad \Rightarrow \quad f(x) = A \cdot B^{c \cdot x}$$

$$\boxed{B > 0 \; e \; \neq 1}$$

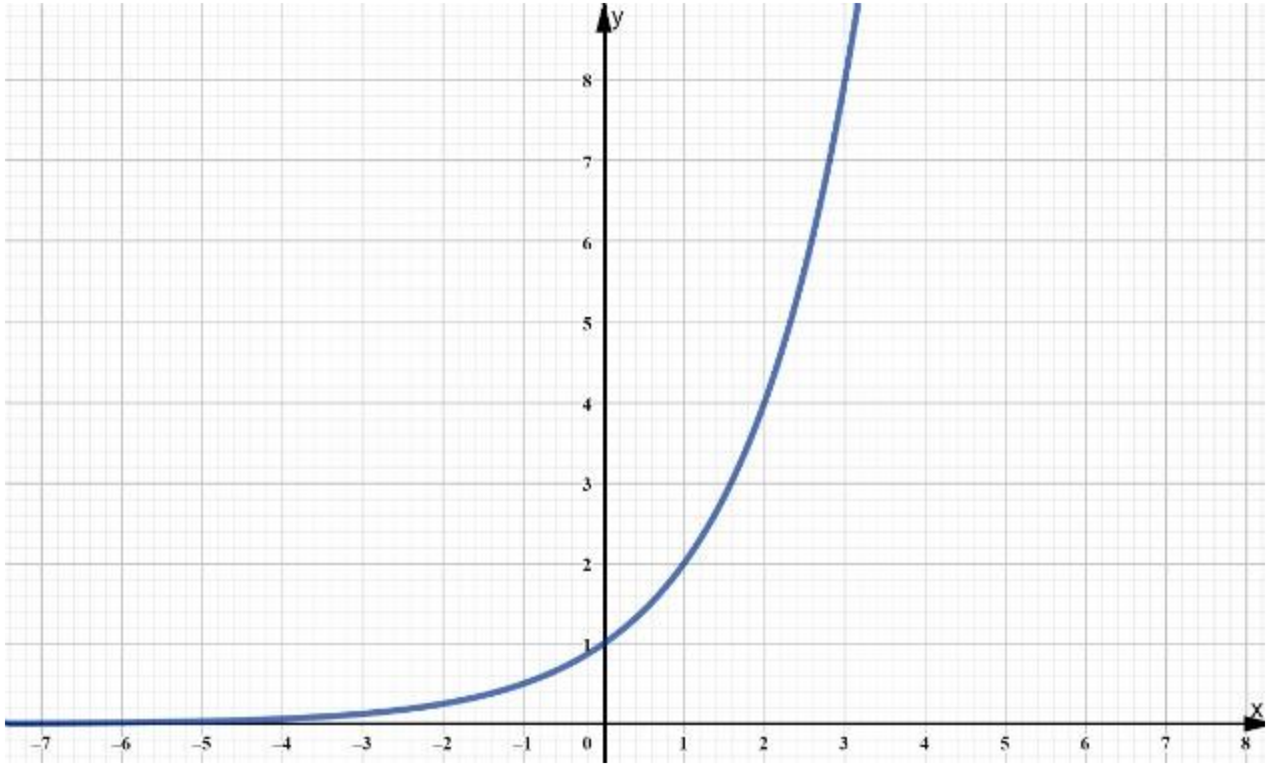
$$\boxed{f(x) = A \cdot e^{c \cdot x}}$$

$$\boxed{e = 2{,}718281\ldots}$$

Função Exponencial

$$f(x) = B^x \Rightarrow f(x) = A \cdot B^{c \cdot x}$$

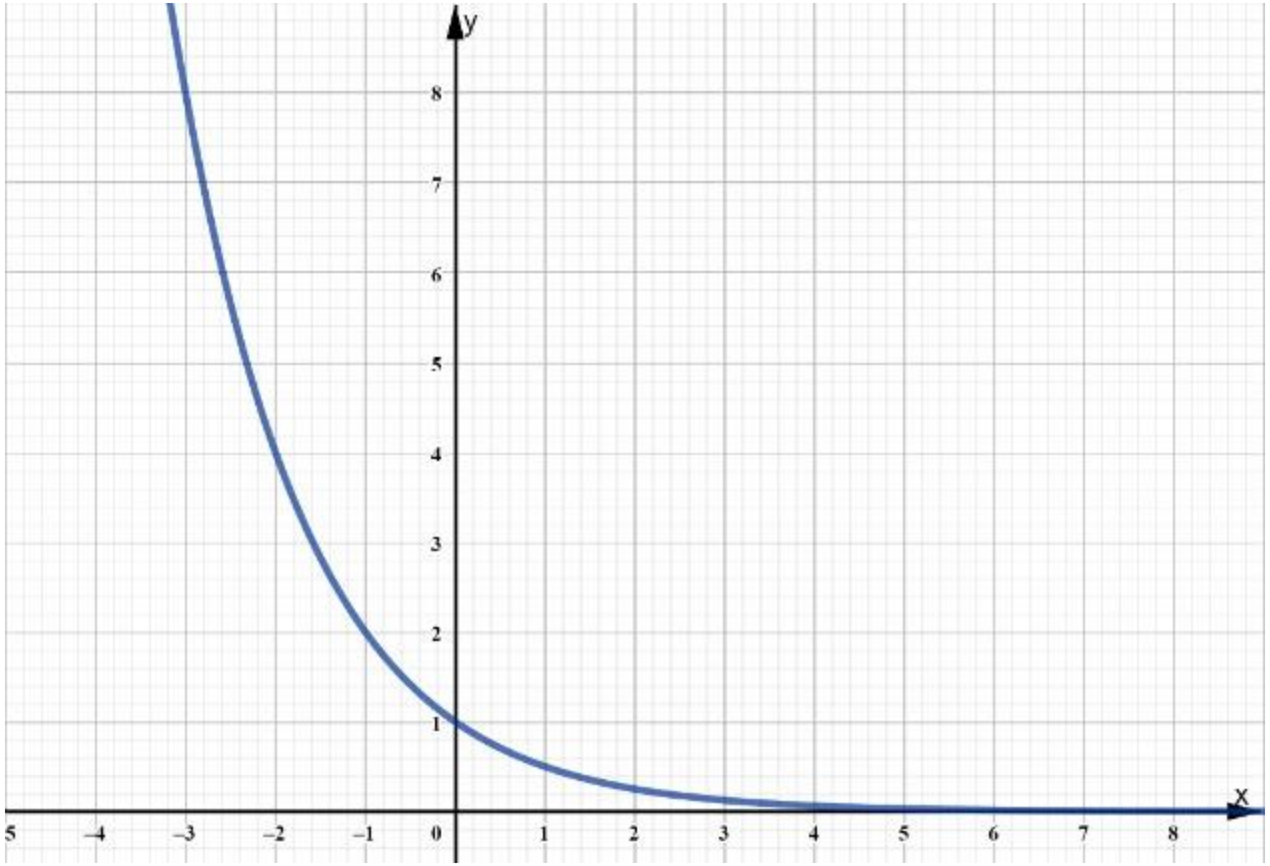
x	y = 2ˣ
-3	$y = 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
-2	$y = 2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
-1	$y = 2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
0	$y = 2^0 = 1$
1	$y = 2^1 = 2$
2	$y = 2^2 = 4$
3	$y = 2^3 = 8$



Função Exponencial

$$f(x) = B^x \Longrightarrow f(x) = A \cdot B^{c \cdot x}$$

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$
-2	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$
-1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$
0	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$
1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \left(\frac{1}{2}\right)$
2	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{1}{4}\right)$
3	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \left(\frac{1}{8}\right)$



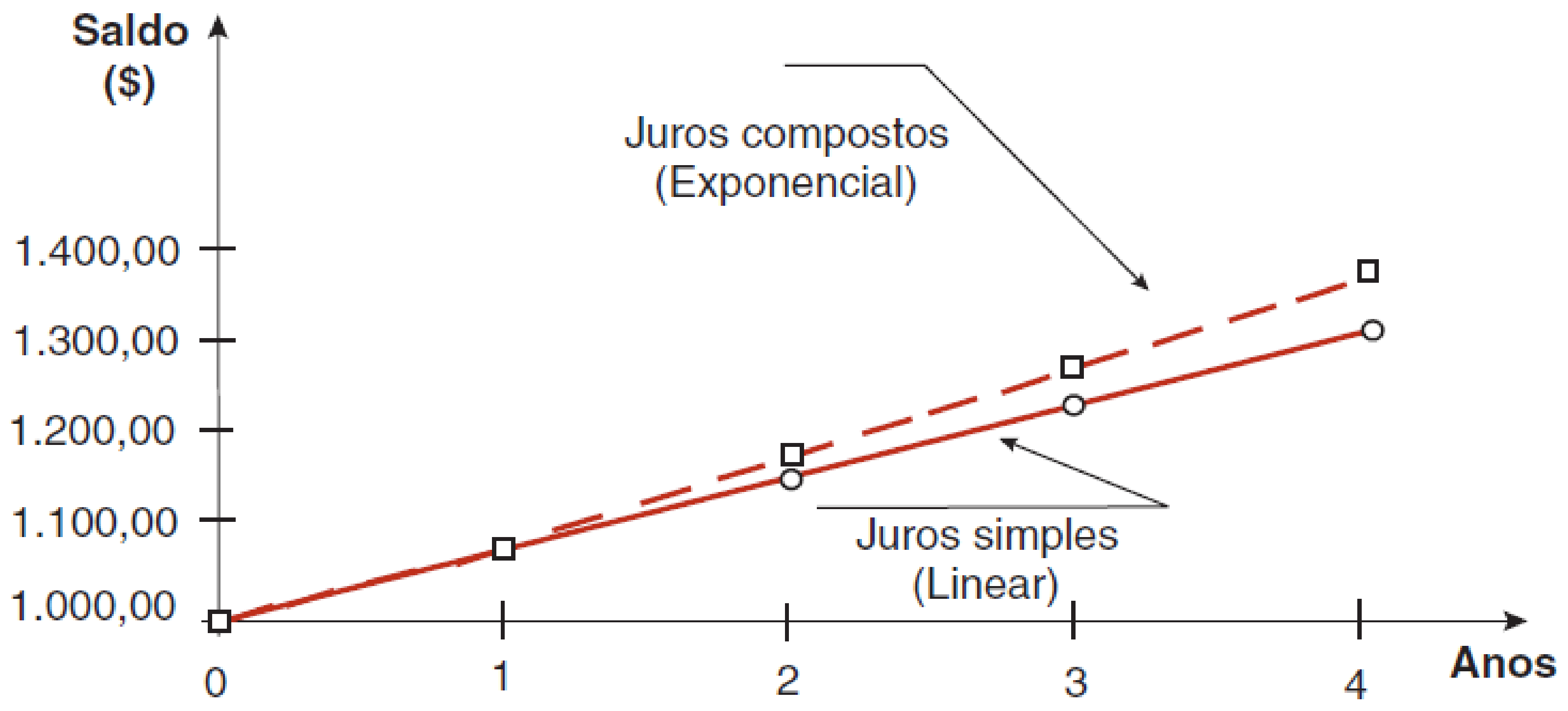
Juros Compostos – Crescimento Exponencial

Ano	Saldo no início do ano	Juros do ano	Saldo no final do ano antes do pagamento	Pagamento do ano	Saldo no final do ano após o pagamento
1	1.000,00	8% x 1.000,00 = 80,00	1.080,00	0,00	1.080,00
2	1.080,00	8% x 1.080,00 = 86,40	1.166,40	0,00	1.166,40
3	1.166,40	8% x 1.166,40 = 93,31	1.259,71	0,00	1.259,71
4	1.259,71	8% x 1.259,71 = 100,78	1.360,49	1.360,49	0,00

$$1°\,período\;\;FV = 1000{,}00(1+0{,}08) = 1080{,}00$$
$$2°\,período\;\;FV = 1080{,}00(1+0{,}08) = 1000{,}00(1+0{,}08)(1+0{,}08) = 1000{,}00(1+0{,}08)^2 = 1166{,}40$$
$$3°\,período\;\;FV = 1166{,}40(1+0{,}08) = 1000{,}00(1+0{,}08)^3 = 1259{,}71$$
$$4°\,período\;\;FV = 1259{,}71(1+0{,}08) = 1000{,}00(1+0{,}08)^4 = 1360{,}49$$

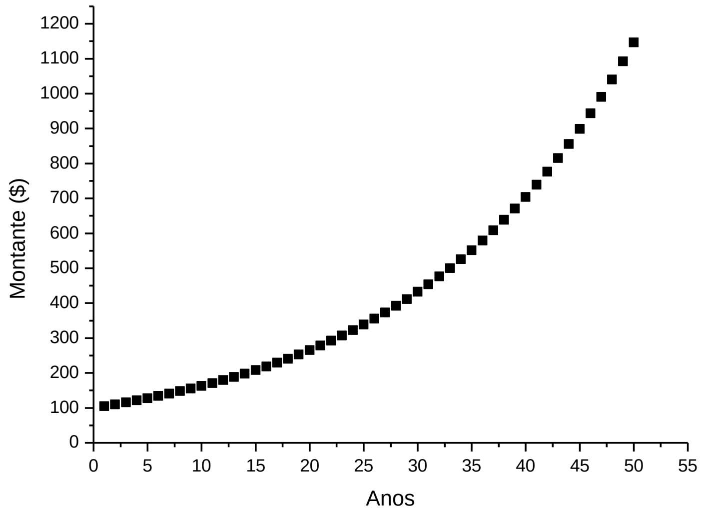
$$FV = PV(1+i)^n$$

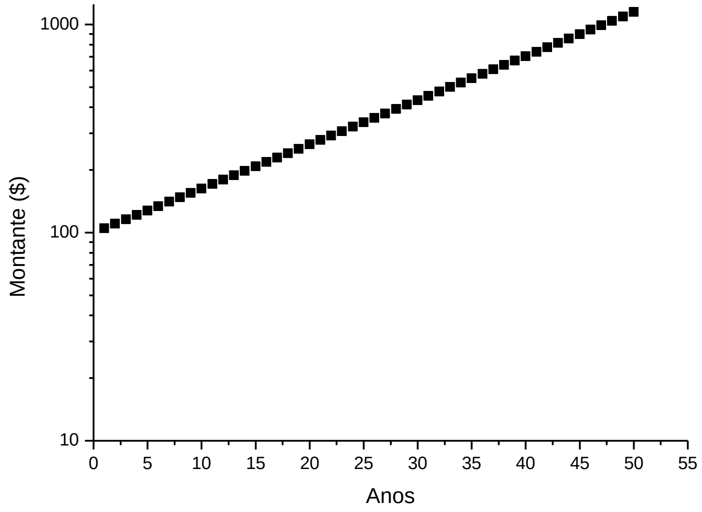
Juros Compostos – Crescimento Exponencial



Crescimento Exponencial

Ano	Montante	Ano	Montante
1	105,00	26	355,57
2	110,25	27	373,35
3	115,76	28	392,01
4	121,55	29	411,61
5	127,63	30	432,19
6	134,01	31	453,80
7	140,71	32	476,49
8	147,75	33	500,32
9	155,13	34	525,33
10	162,89	35	551,60
11	171,03	36	579,18
12	179,59	37	608,14
13	188,56	38	638,55
14	197,99	39	670,48
15	207,89	40	704,00
16	218,29	41	739,20
17	229,20	42	776,16
18	240,66	43	814,97
19	252,70	44	855,72
20	265,33	45	898,50
21	278,60	46	943,43
22	292,53	47	990,60
23	307,15	48	1040,13
24	322,51	49	1092,13
25	338,64	50	1146,74





$$FV = PV(1+i)^n$$

$$y = y_0(1+i)^t$$

$$y = y_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$$

$$y = y_0\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n}\right]^{t}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n} = e^{i}$$

$$y = y_0 e^{it} = y_0 \exp(it)$$

Entendendo a Matemática...

$$y = y_0 e^{bx}$$

$$\log(y) = \log(y_0 e^{bx})$$

$$\log(y) = \log(y_0) + \log(e^{bx})$$

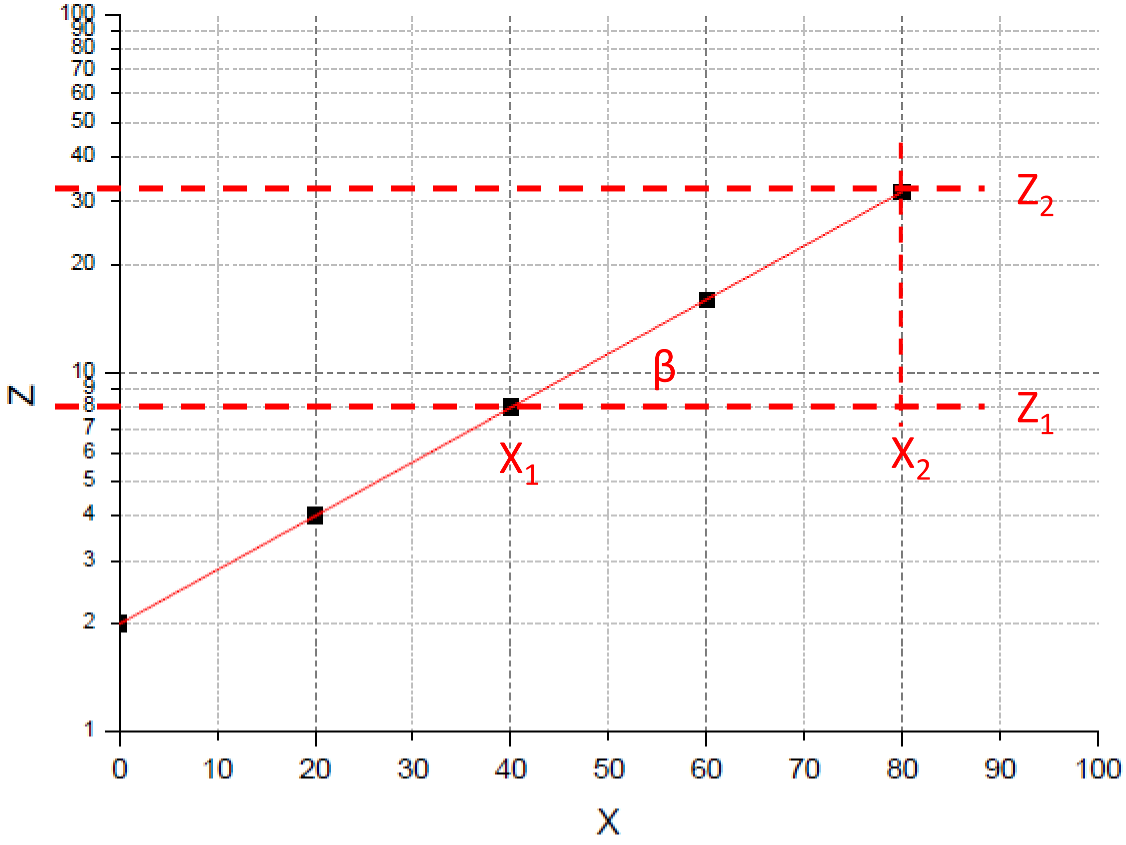
$$\log(y) = \log(y_0) + \log(e^{bx})$$

$$\log(y) = \log(y_0) + (\mathrm{bx})\log(e)$$

$$\boxed{\log(y)} = \boxed{\log(y_0)} + \boxed{(\mathrm{b}\cdot\log(e))}x$$

$$Z = Z_0 + \beta x \Rightarrow \beta = \frac{Z_2 - Z_1}{X_2 - X_1} = b\cdot\log(e) \Rightarrow b = \frac{\beta}{\log(e)}$$

$$\boxed{Z = \log(y)}$$



Construção de Escalas

Escala Linear

Exemplo: A velocidade de um animal em função do tempo foi medida. Os dados encontrados são apresentados a seguir.

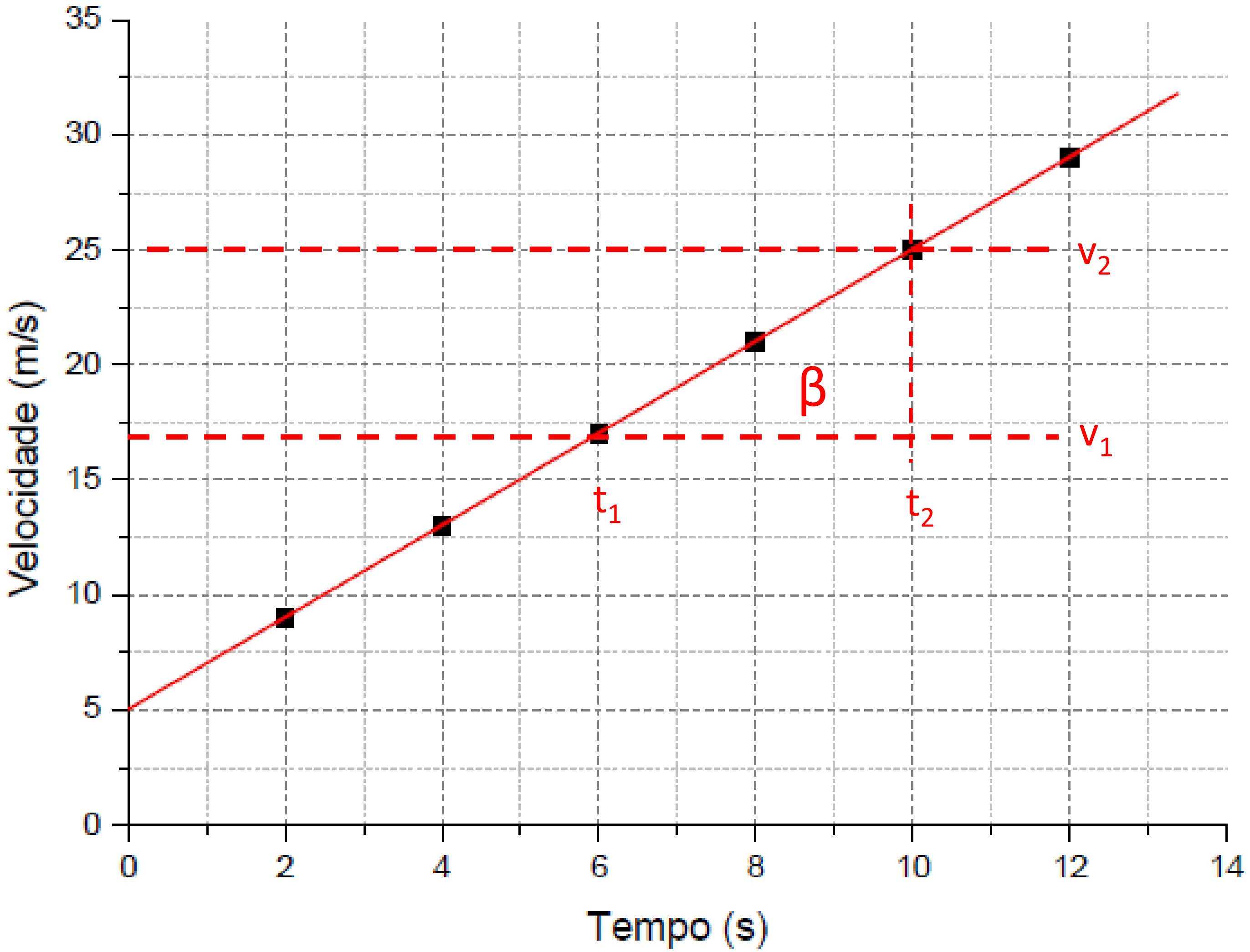
v(m/s):	9	13	17	21	25	29
t(s):	2	4	6	8	10	12

a) Em uma folha milimetrada faça o gráfico v × t.

b) Que relação há entre velocidade e tempo?

c) Encontre uma relação funcional entre essas grandezas.

Entendendo a Matemática...



$$y = y_0 + \beta x$$

$$v = v_0 + \beta t$$

$$\beta = \frac{v_2 - v_1}{t - t_1}$$

$$\beta = \frac{25 - 17}{10 - 6} = 2$$

$$v - v_0 = \beta(t - t_0)$$

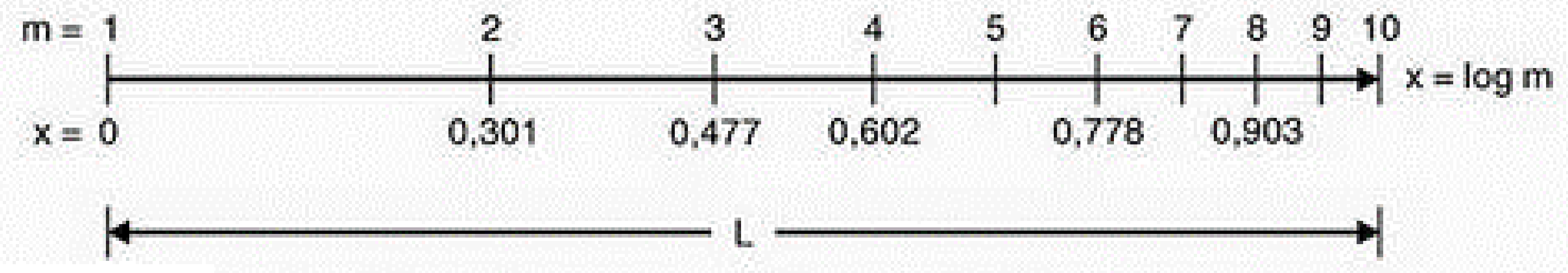
$$v_0 = 5 \;\; e \;\; t_0 = 0$$

$$v - 5 = 2(t - 0)$$

$$\boxed{\therefore \;\; v = 5 + 2t}$$

Construção de Escalas

Escala Logarítmica

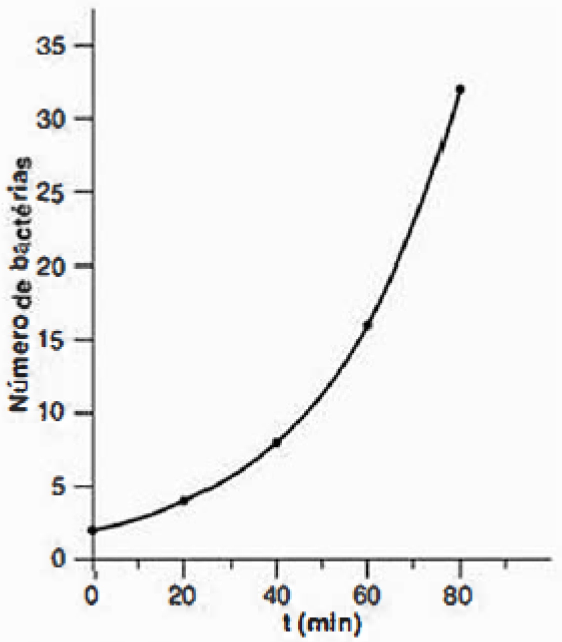


Escala logarítmica em um ciclo de escala L.

O *comprimento L* do ciclo é proporcional à diferença log10 – log1 = 1; ou, em geral, L é proporcional à diferença $\log 10^{n+1} - \log 10^{n}$, onde n = 0, ±1, ±2, ...

Exemplo: Um organismo unicelular se reproduz por *divisão binária* a uma taxa constante. Se, inicialmente, há *duas bactérias* e cada uma se divide em *duas* a cada 20 minutos, teremos o resultado a seguir.

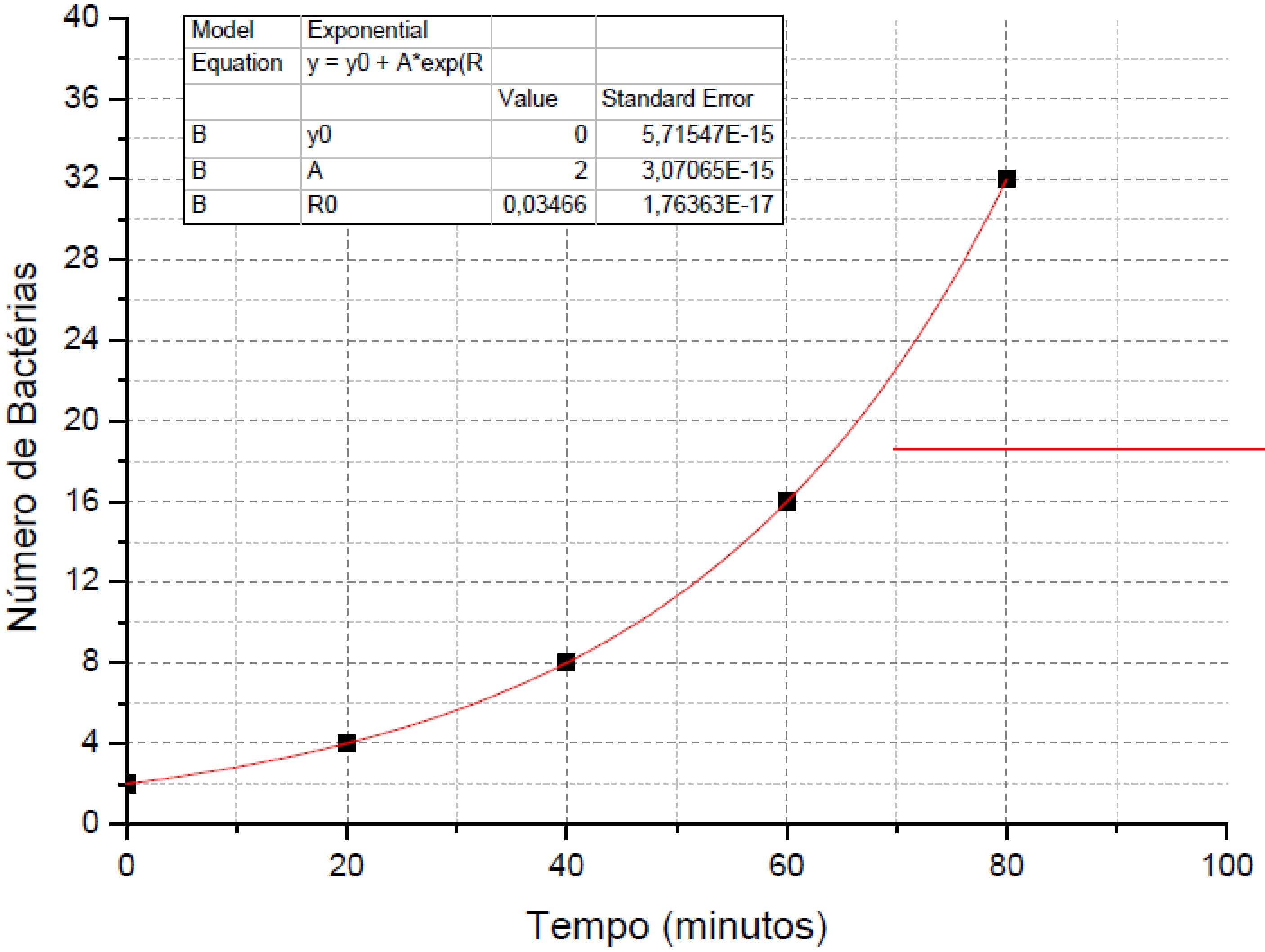
Número de bactérias N:	2	4	8	16	32	...
Tempo t (minutos):	0	20	40	60	80	...



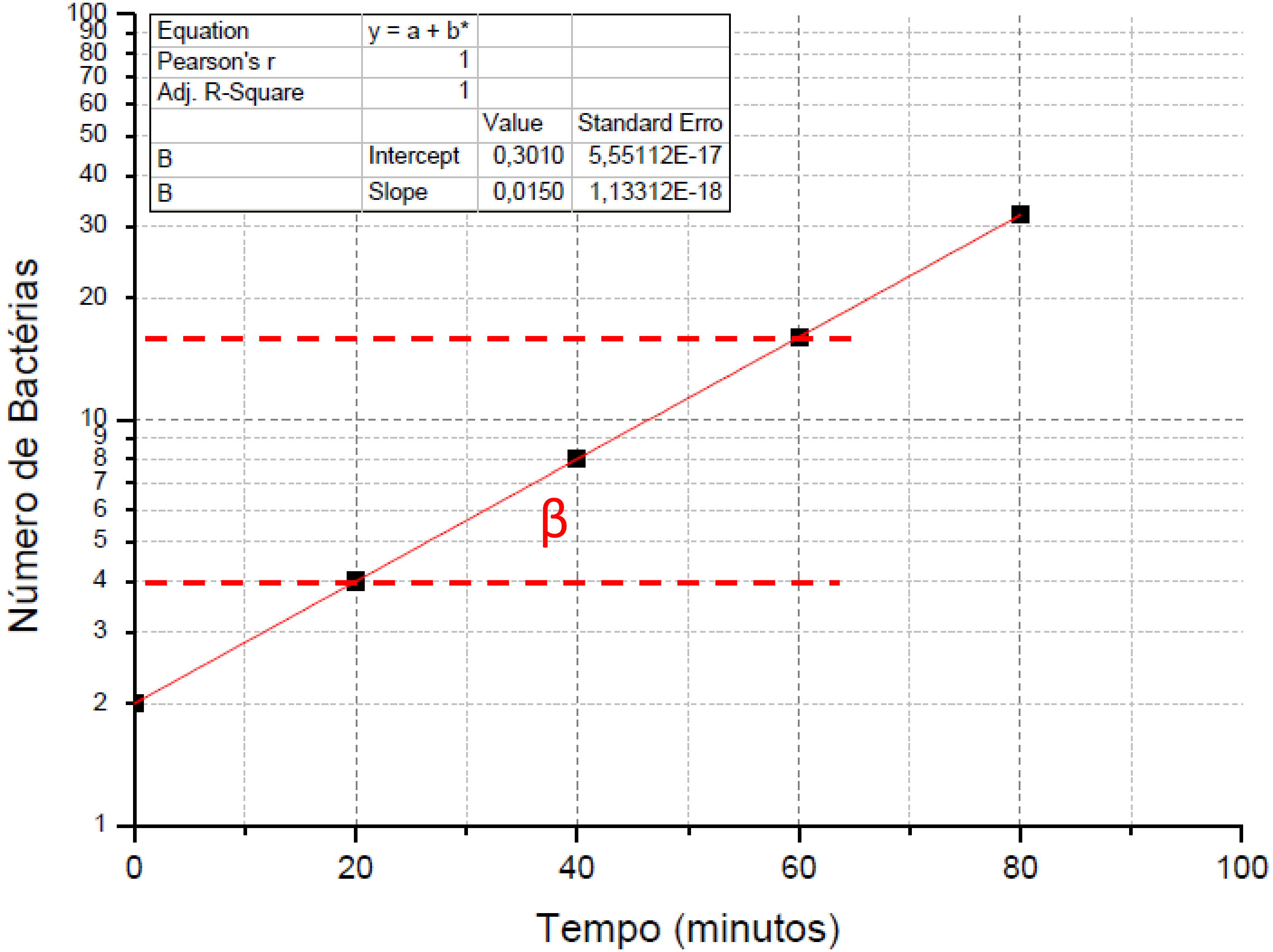
a) Determinar, a partir de um gráfico de N e o tempo t, uma relação funcional entre essas grandezas.

b) Calcular o número de bactérias quando $t = 1$ h e $t = 2$ h.

Entendendo a Matemática...



$$N = N_0 e^{bt}$$



$$Z = Z_0 + \beta t$$

$$\beta = \frac{Z_2 - Z_1}{t_2 - t_1} = b \cdot \log(e)$$

$$Onde\ Z = \log(y)$$

$$b = \frac{\beta}{\log(e)}$$

$$\beta = \frac{\log(16) - \log(4)}{60 - 20} = 0{,}0151$$

$$b = \frac{\beta}{\log(e)} = \frac{0{,}0151}{\log(e)} = 0{,}0346$$

$$\boxed{\mathrm{N} = \mathrm{N_0 e}^{bt} \quad \mathrm{em\ t} = 0 \ \ \mathrm{N} = 2 \quad \therefore \mathrm{N_0} = 2} \Rightarrow \boxed{\mathrm{N} = 2e^{0{,}0346t}}$$

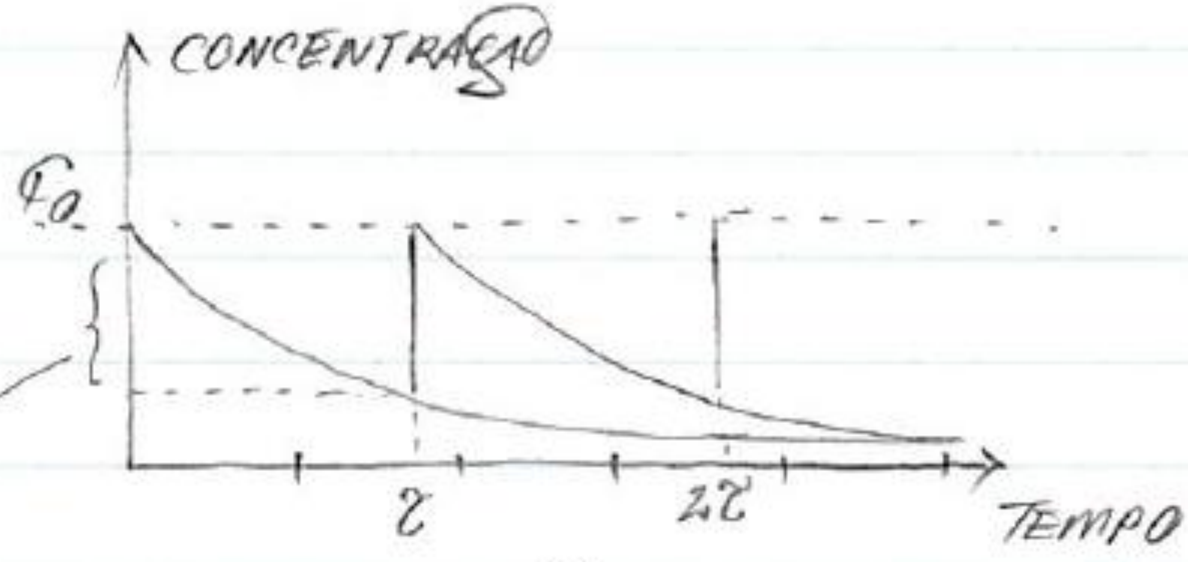
Para pensar...

Uma cultura de bactérias em crescimento exponencial aumentou de $10^6\, para\, 5 \times 10^8$ células em 6 h. Qual é o tempo entre as divisões celulares sucessivas, se não há mortalidade celular?

Uma dose *D* de uma droga faz com que a concentração de plasma suba de $0\ a\ C_0$. Em seguida a concentração cai segundo $C = C_0 e^{-bt}$. No tempo *T*, que dose deve ser dada para elevar a concentração para C_0novamente? O que vai acontecer se a dose inicial for administrada repetidamente em intervalos de *T*?

F106 – Fundamentos de Física para Biologia

a)



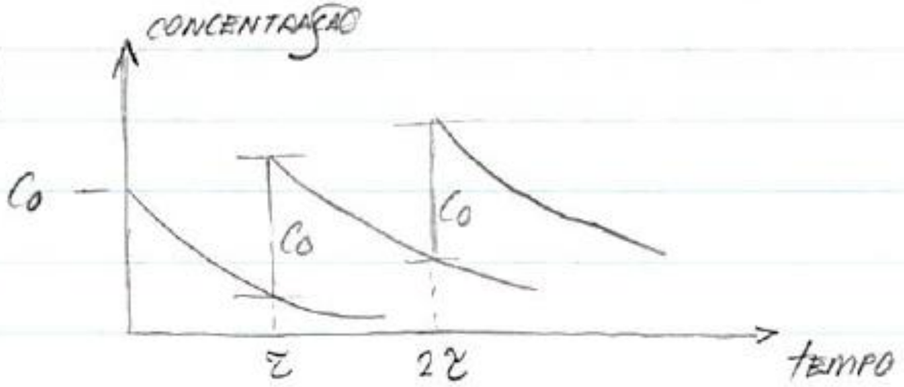
$D_0 \Rightarrow C_0$

$F = e^{-b\tau}$

$$C_0 - C_0 e^{-b\tau} = C_0(1-e^{-b\tau})$$

$$\therefore D = D_0(1-e^{-b\tau})$$

b)



CONTRIBUIÇÕES:

$t = 0 \quad C_0$

$t = \tau \quad C_0 e^{-b\tau} = C_0 F$

$t = 2\tau \quad C_0 e^{-b2\tau} = C_0 F^2$

$t = 3\tau \quad C_0 e^{-b3\tau} = C_0 F^3$

$\vdots$

Assim, $C = C_0 (1 + F + F^2 + F^3 + \ldots)$

$(1 + F + F^2 + F^3 + \ldots) \rightarrow$ SÉRIE DE SOMA $\dfrac{1}{1 - F}$

$F < 1$

$$\therefore \; C = \frac{C_0}{1 - e^{-b\tau}}$$

Decaimento Exponencial

$$y = y_0 e^{-bt} = y_0 \exp(-bt)$$

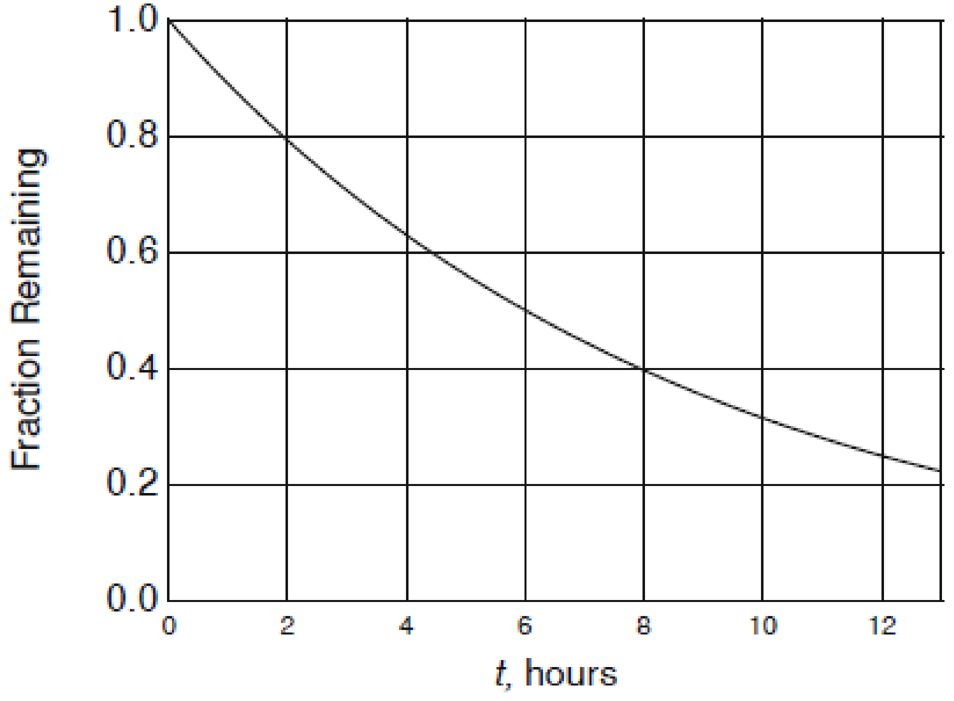


Fig. 2.3 A plot of the fraction of nuclei of ^{99m}Tc surviving at time t

Decaimento Radioativo

$$fração\ sobrevivente = \frac{y}{y_0} = e^{-bt}$$

Meia-Vida

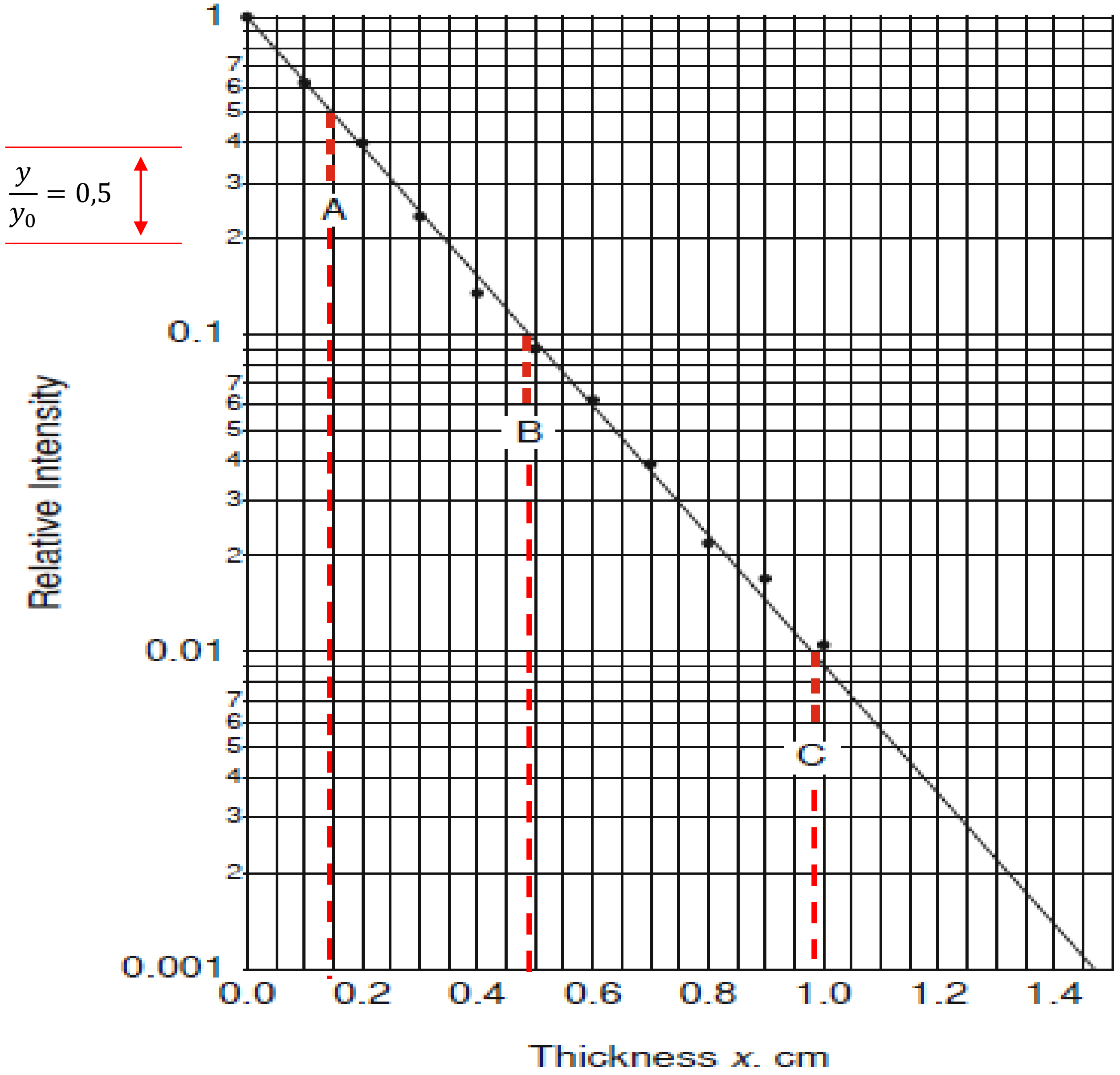
$$\frac{y}{y_0} = 0{,}5 = e^{-bt}$$

$$\ln(0{,}5) = ln\left(e^{-bT_{1/2}}\right)$$

$$-0.693 = -bT_{1/2}$$

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{0{,}693}{b}}$$

Gráficos MonoLog – O Coeficiente de Decaimento



Intensidade da luz após passar por um absorvedor de espessura x.

$$y = y_0 e^{-bx}$$

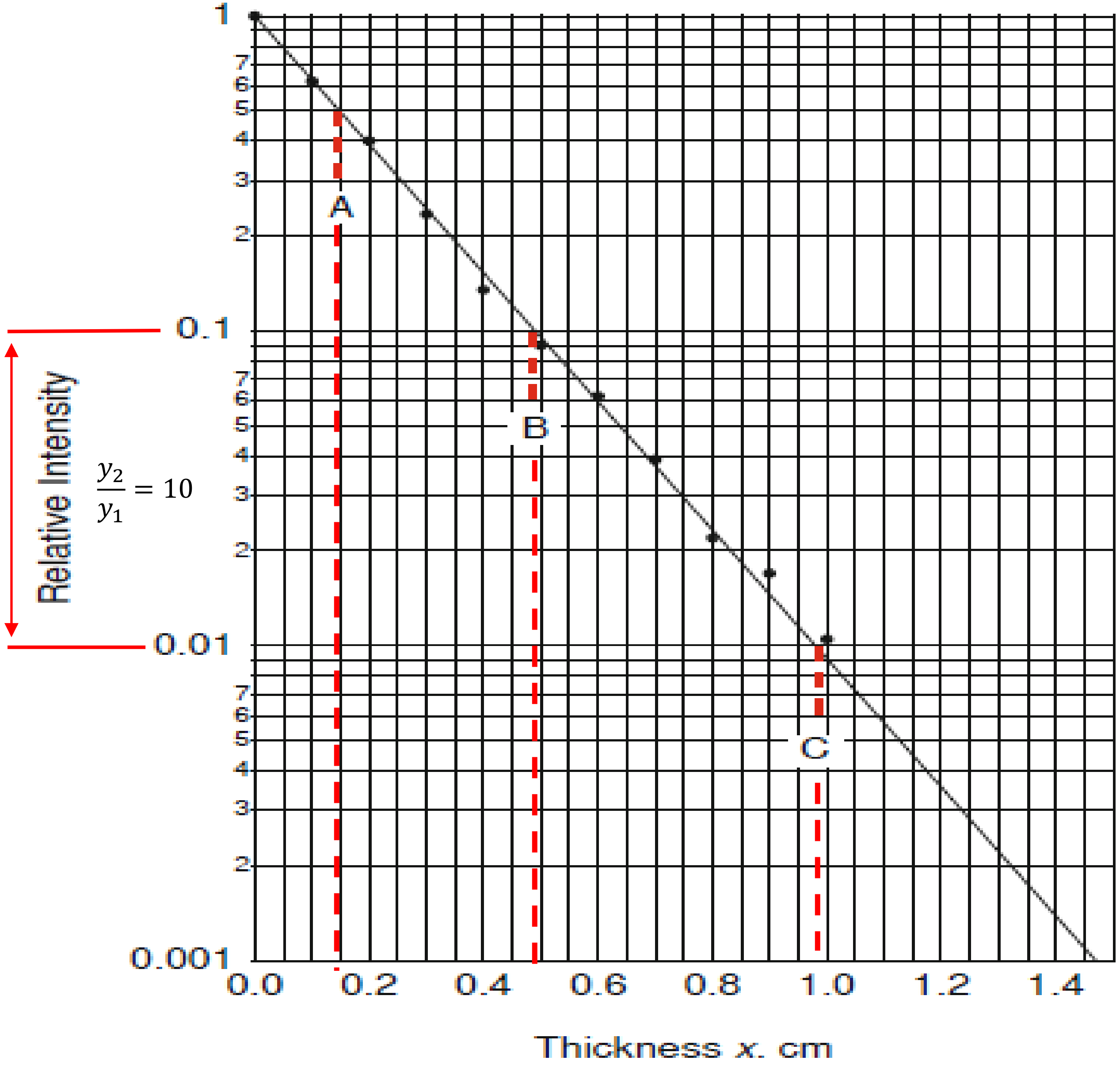
$$\frac{y}{y_0} = 0,5 = e^{-bx}$$

$$\boxed{b = \frac{0,693}{x_{1/2}}}$$

$$b = \frac{0,693}{0,145} = 4,8\ cm^{-1}$$

Qual a dificuldade?

Gráficos MonoLog – O Coeficiente de Decaimento



Intensidade da luz após passar por um absorvedor de espessura x:

$$y_1 = y_0 e^{bx_1}$$

$$y_2 = y_0 e^{bx_2}$$

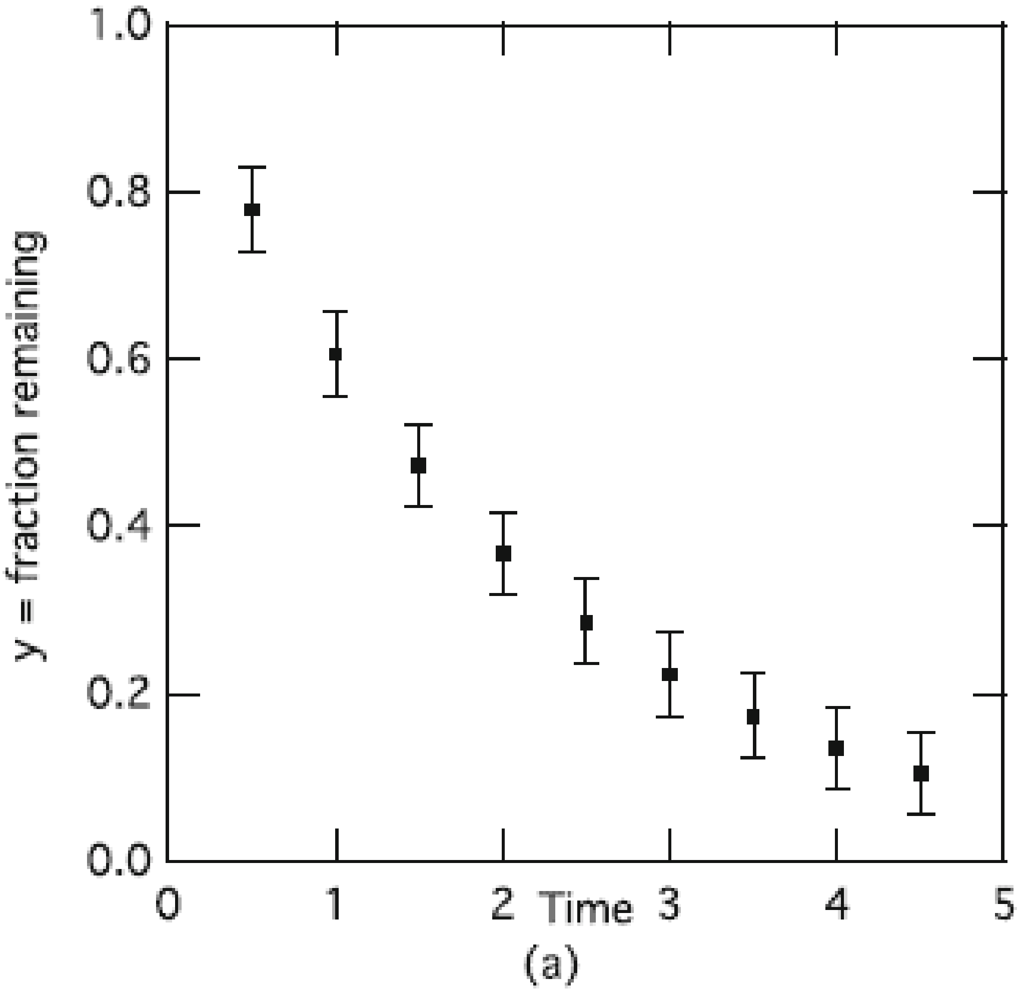
$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_0 e^{bx_2}}{y_0 e^{bx_1}} = e^{-b(x_2 - x_1)}$$

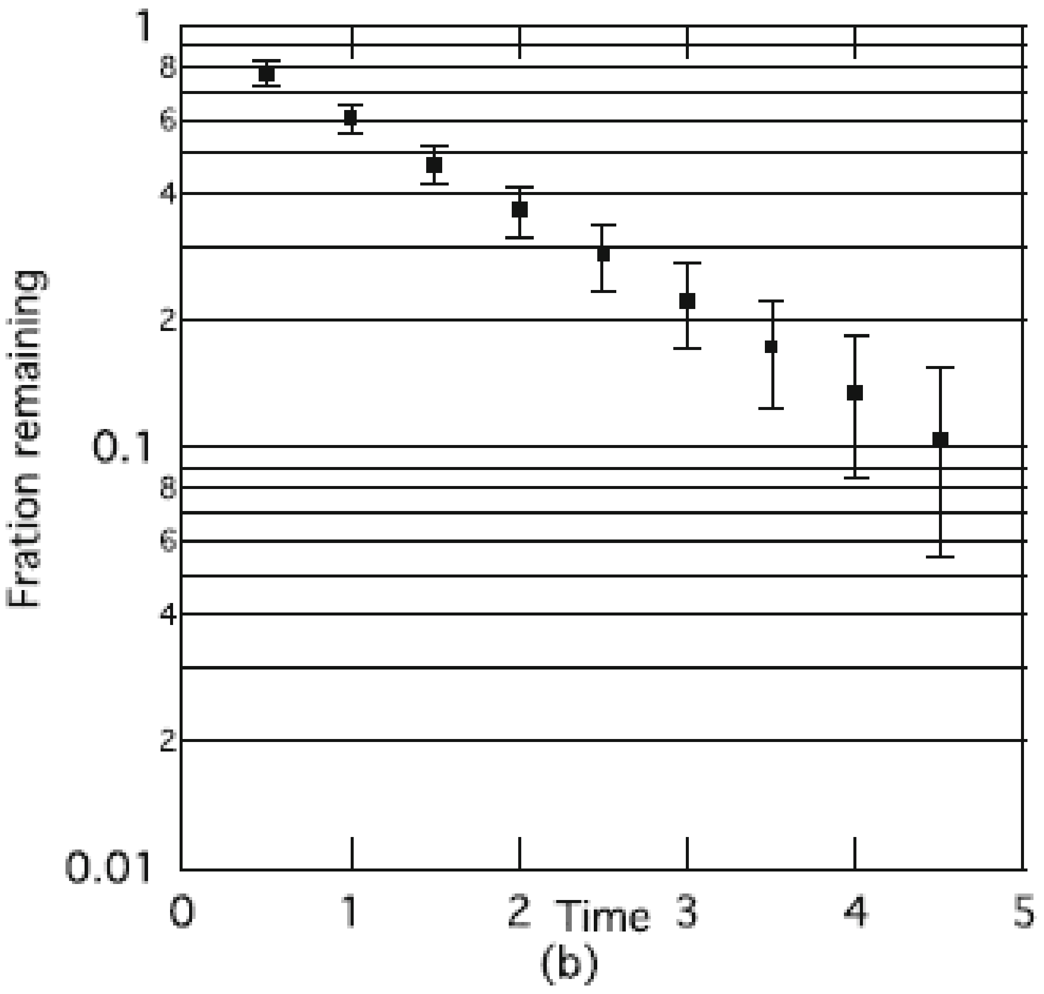
$$\frac{y_2}{y_1} = 10 = e^{-bX_{10}}$$

$$-b = \frac{2{,}303}{X_{10}} = \frac{2{,}303}{0{,}48 - 0{,}97}$$

$$\therefore \; b = 4{,}7 \; cm^{-1}$$

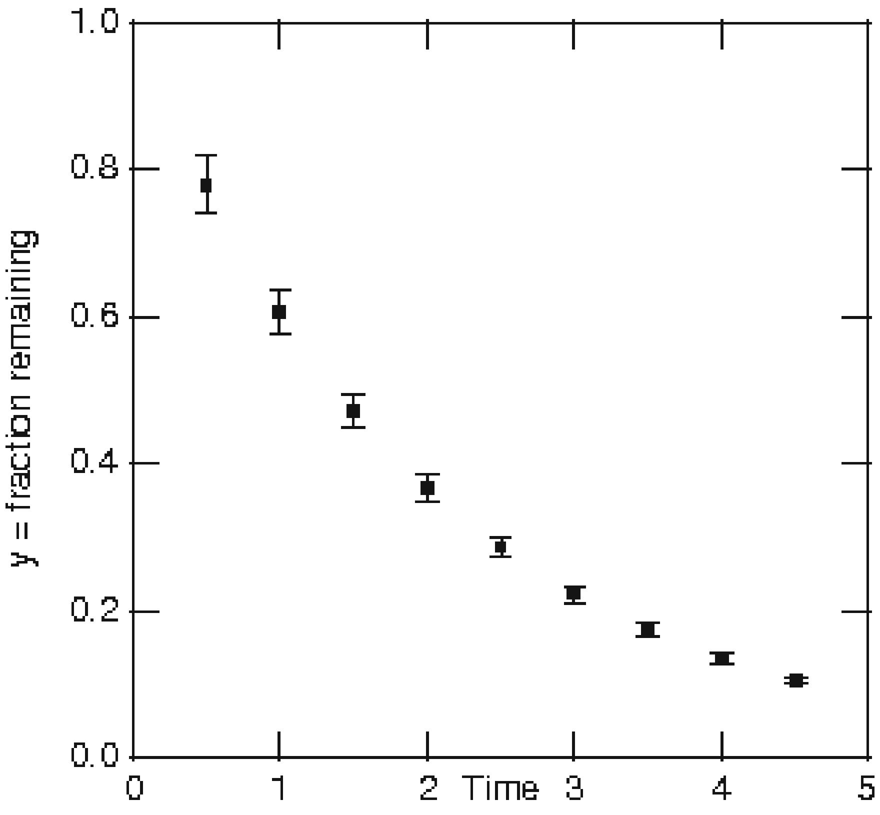
Gráficos MonoLog



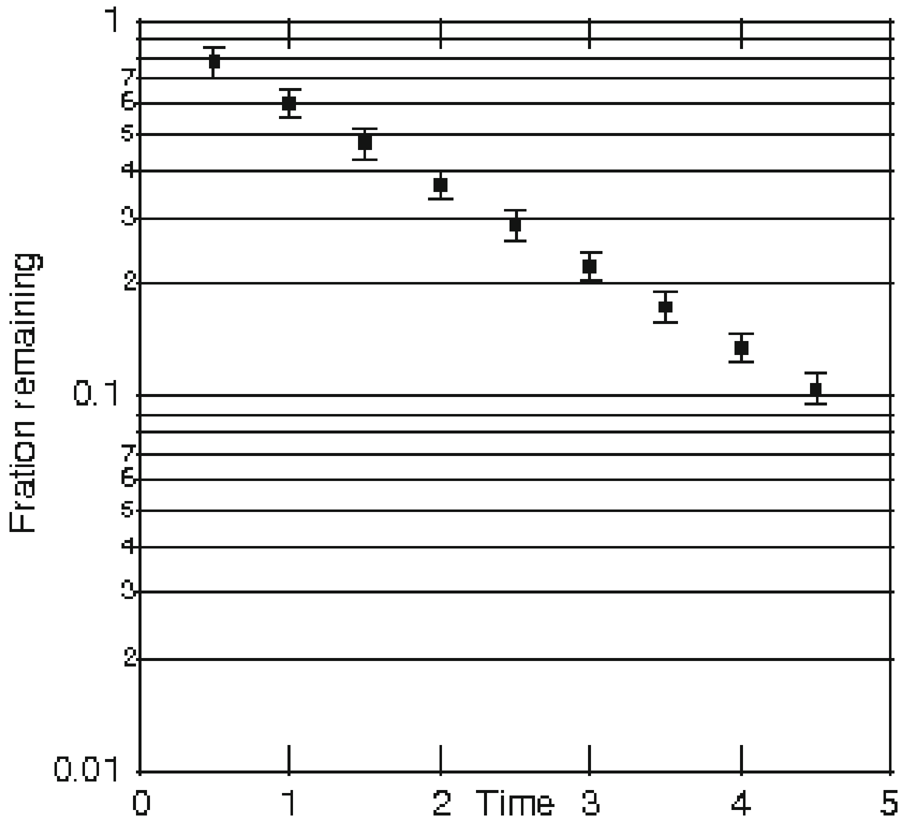


$y = e^{-0,5t}$ Com barras de erro de ±0,05

Gráficos MonoLog



(a)



(b)

$y = e^{-0,5t}$ Com barras de erro de 5%

Taxas Variáveis

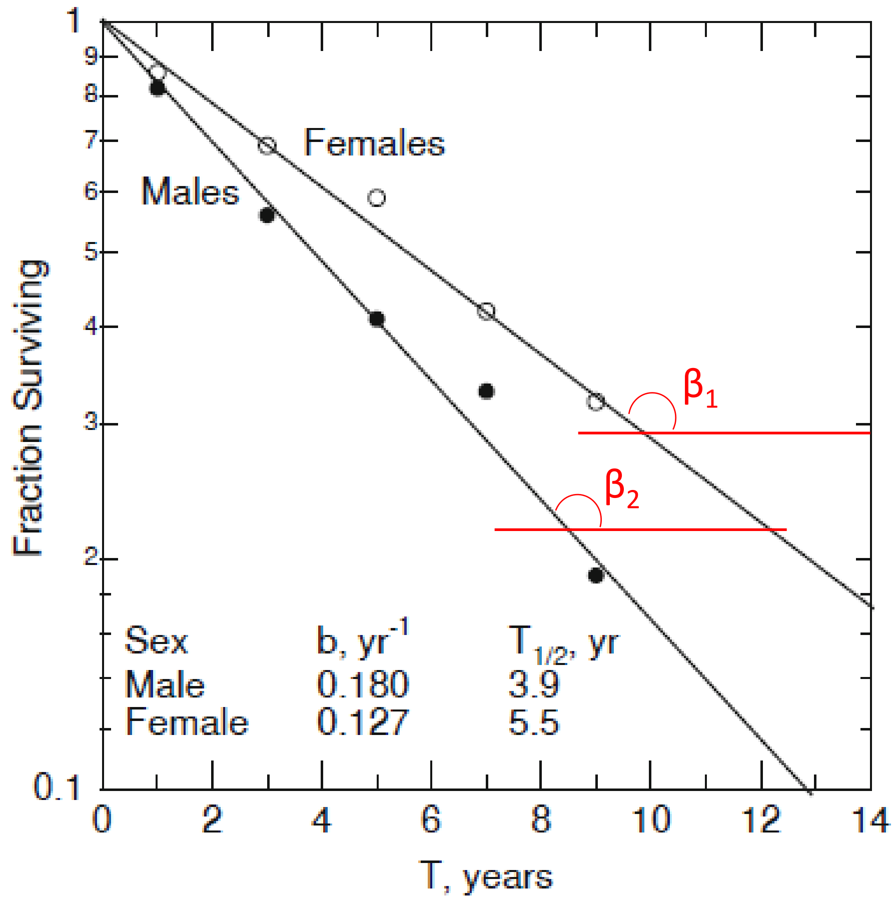


Fig. 2.10 Survival of patients with congestive heart failure. (Data are from McKee et al. 1971)

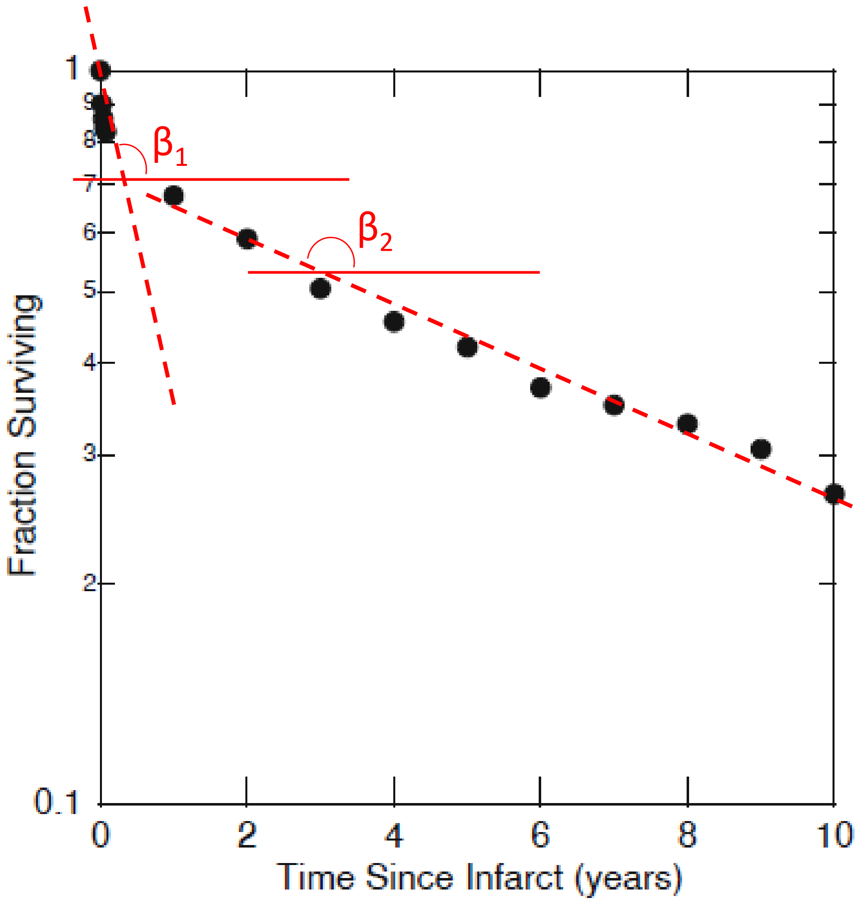


Fig. 2.11 The fraction of patients surviving after a myocardial infarction (heart attack) at $t = 0$. The mortality rate decreases with time. (From data in Bland and White 1941)

Clearance

Em alguns casos, em fisiologia, a quantidade de uma substância pode decair exponencialmente, porque a taxa de remoção é proporcional à concentração da substância (quantidade por unidade volume) e não em relação à quantidade total. Por exemplo, a taxa com a qual os rins excretam uma substância pode ser proporcional à sua concentração no sangue que passa através os rins, enquanto que a quantidade total depende do volume total de fluido em que a substância está distribuída.

Substância $$\frac{dy}{dt} = -KC = -K\left(\frac{y}{V}\right) = -\frac{K}{V}y \quad \Longrightarrow \quad y = y_0 e^{-\left(\frac{K}{V}\right)t}$$

Concentração $\longrightarrow$ $$C = C_0 e^{-\left(\frac{K}{V}\right)t}$$

Clearance: Remoção/Liberação/Depuração

OBS: É o termo adotado na medicina para designar a capacidade de retirada, pelos rins, de alguma substância da corrente sanguínea.

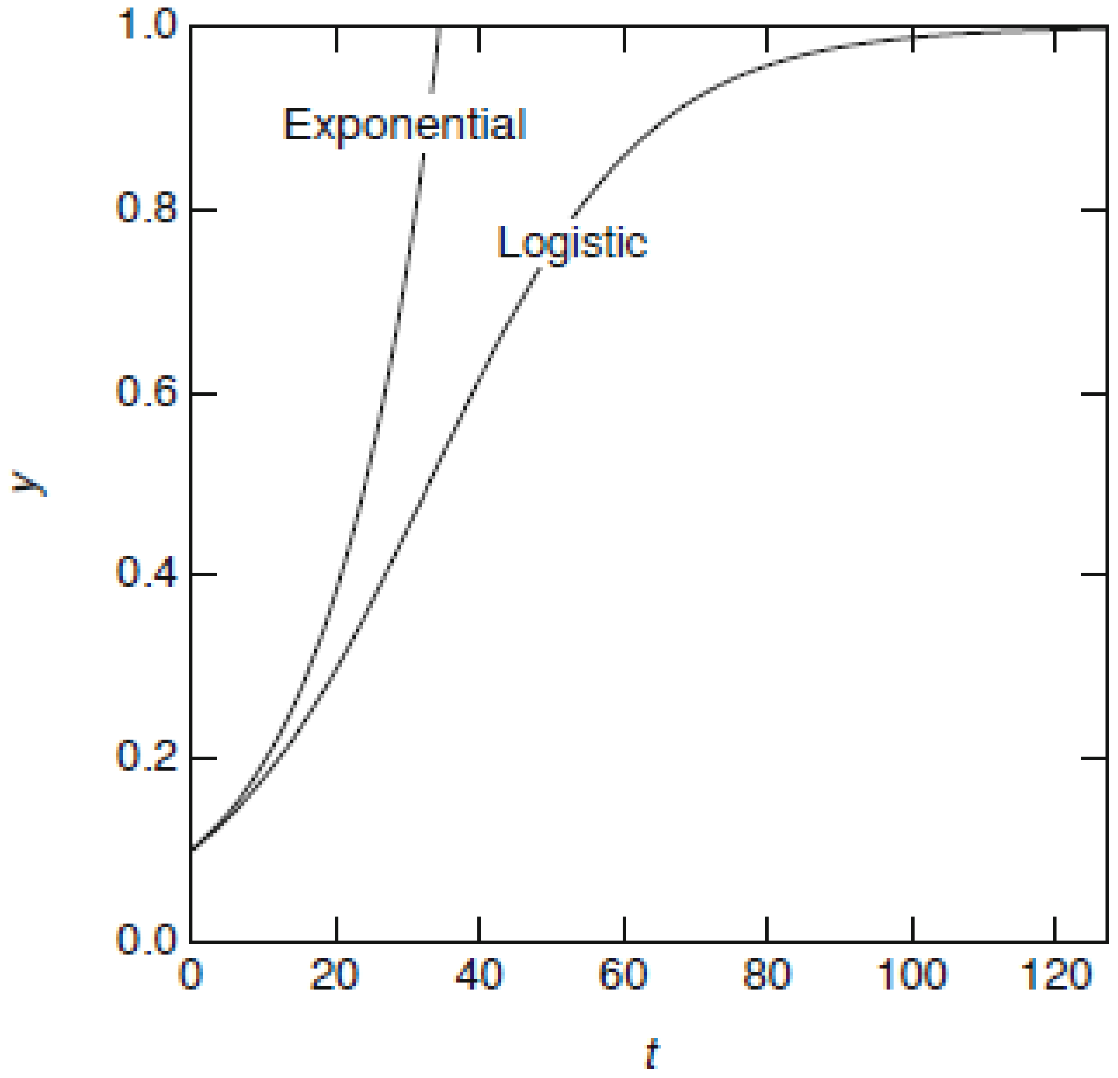
Para pensar...

Que informações podemos obter, dos dados abaixo, sobre o processo de metabolização do álcool?

t (min)	Ethanol concentration (mg dl^{-1})
90	134
120	120
150	106
180	93
210	79
240	65
270	50

Bennison LJ, Li TK (1976) Alcohol metabolism in American Indians and whites—lack of racial differences in metabolic rate and liver alcohol dehydrogenase. N Engl J Med 294:9–13

A Equação Logística – O Crescimento Exponencial não é para sempre...



Taxa de Variação

$$\frac{dy}{dt} = b_0 y\left(1 - \frac{y}{y_\infty}\right)$$

Onde b_0 e y_∞ são constantes

Solução

$$y(t) = \frac{y_0 y_\infty}{y_0 + (y_\infty - y_0)e^{-b_0 t}}$$

Biologia das Populações...

A Equação Logística

Aplicações:

Modelagem do crescimento de populações

Capacidade de suporte variável no tempo

Regressão logística

Redes neurais

Modelagem do crescimento de tumores

Modelos de reação

Distribuição de Fermi

Mudança de linguagem

Difusão de inovações

Gráficos Log-Log, Leis de Potência

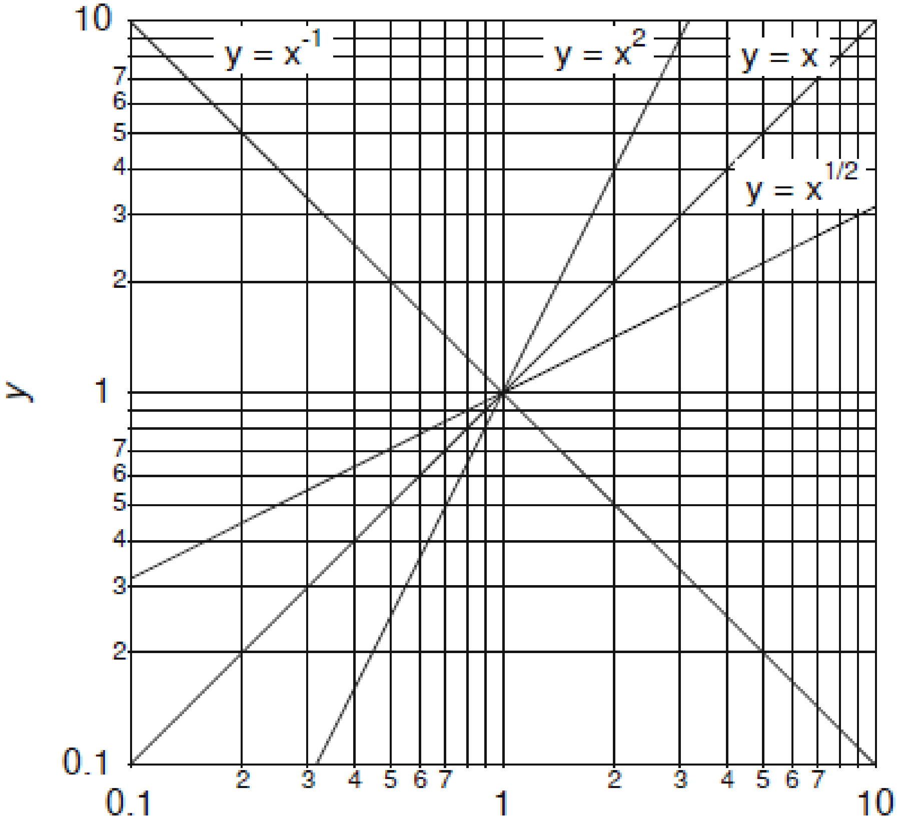


Fig. 2.17 Log–log plots of $y = x^n$ for different values of n. When $x = 1$, $y = 1$ in every case

$$y = Bx^n$$

Scaling

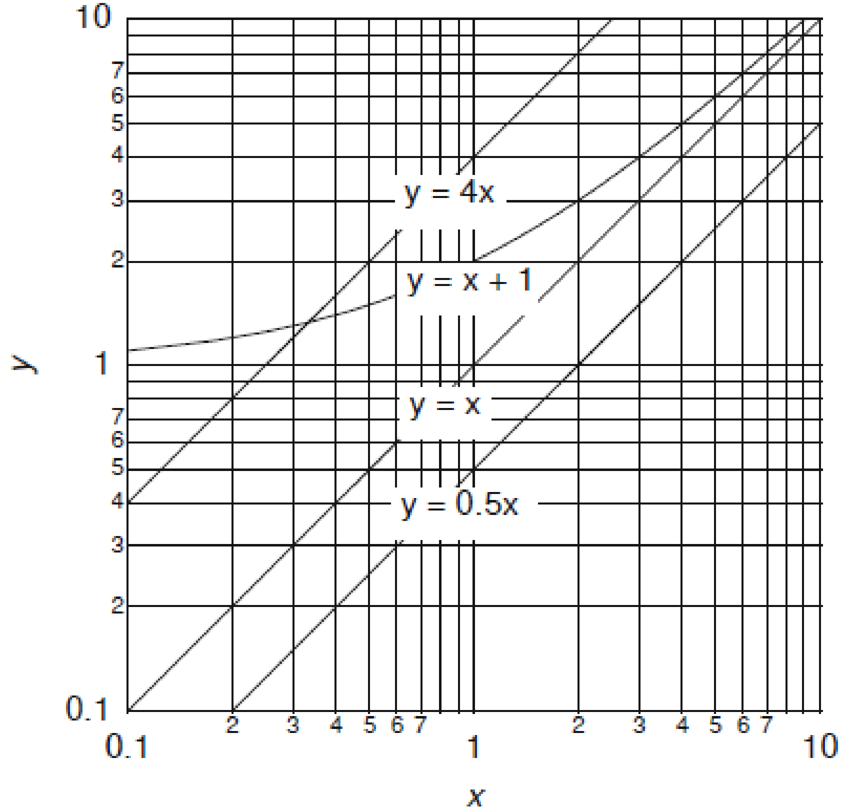


Fig. 2.18 Log–log plots of $y = Bx$, showing how the curves shift on the paper as B changes. Since $n = 1$ for all the curves, they all have the same slope. There is also a plot of $y = x + 1$ to show that a polynomial does not plot as a straight line

$$\log y = \log Bx^n \Rightarrow \log y = \log B + \mathrm{n} \log x \Rightarrow u = constante + nv$$

Consumo Alimentar, Taxa de Metabolismo

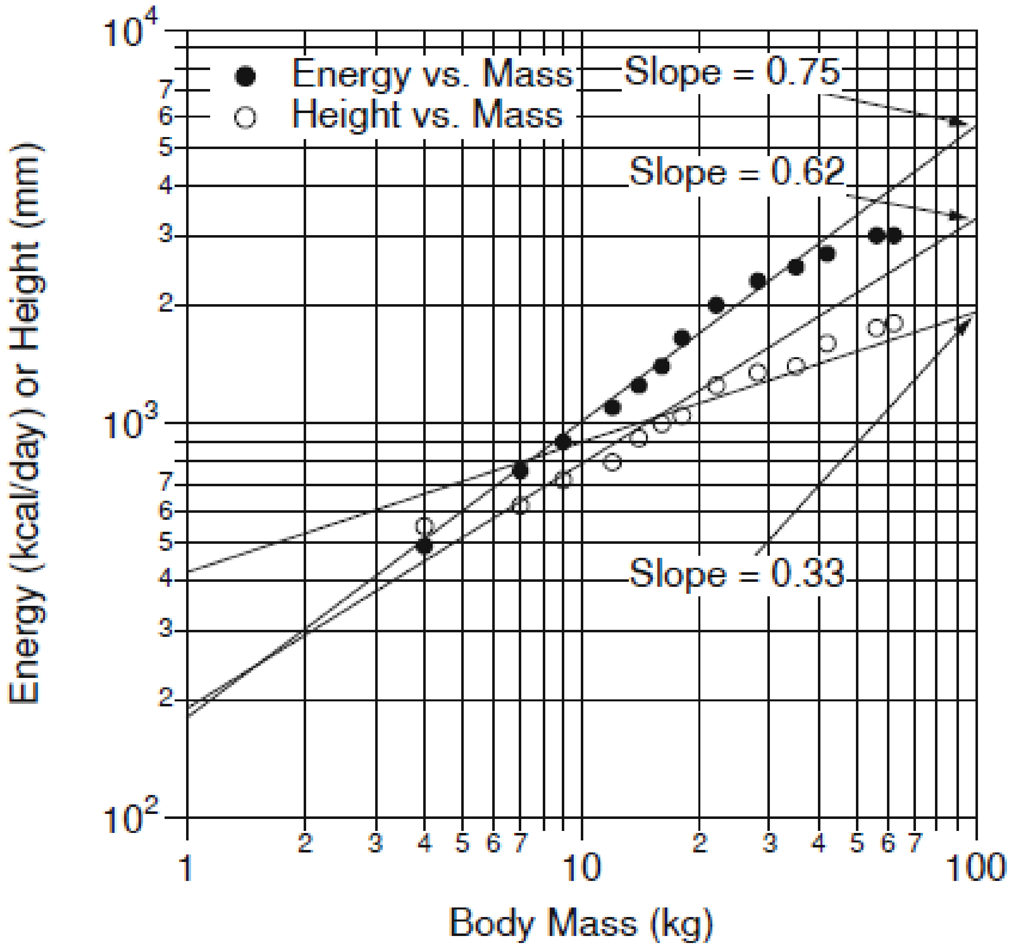


Fig. 2.19 Plot of daily food requirement F and height H vs mass M for growing children. (Data are from Kempe et al. 1970, p. 90)

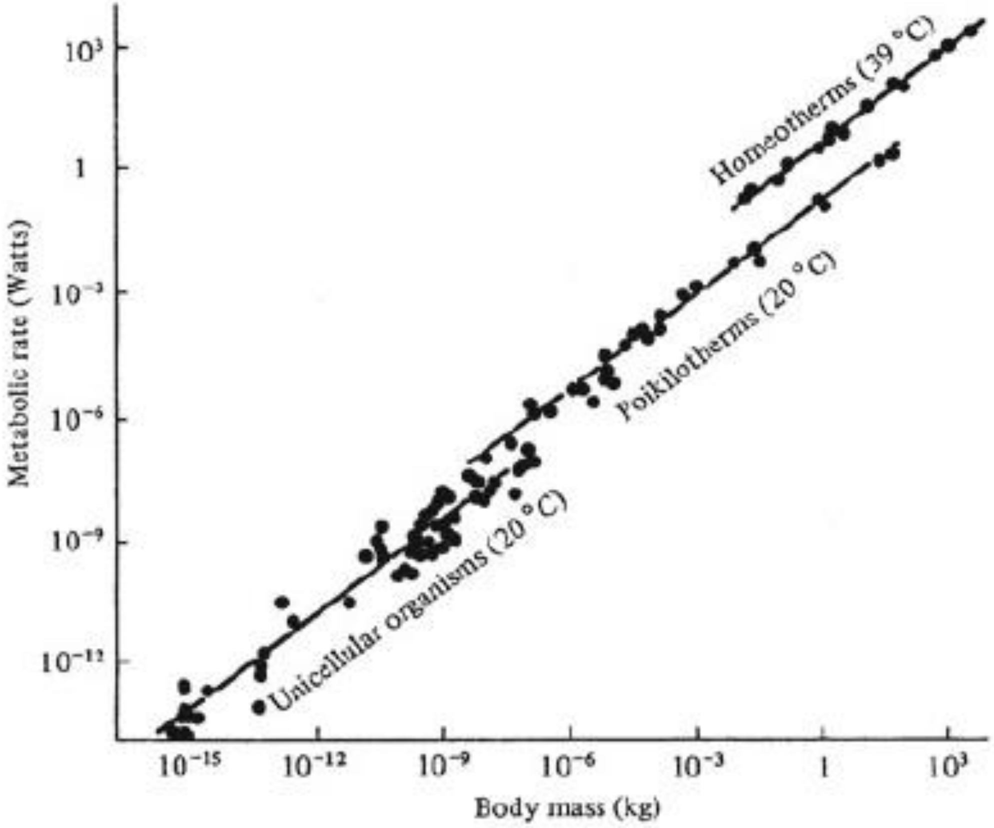


Fig. 2.20 Plot of resting metabolic rate vs. body mass for many different organisms. (Graph is from R. H. Peters 1983. Modified from A. M. Hemmingsen 1960). Used with permission

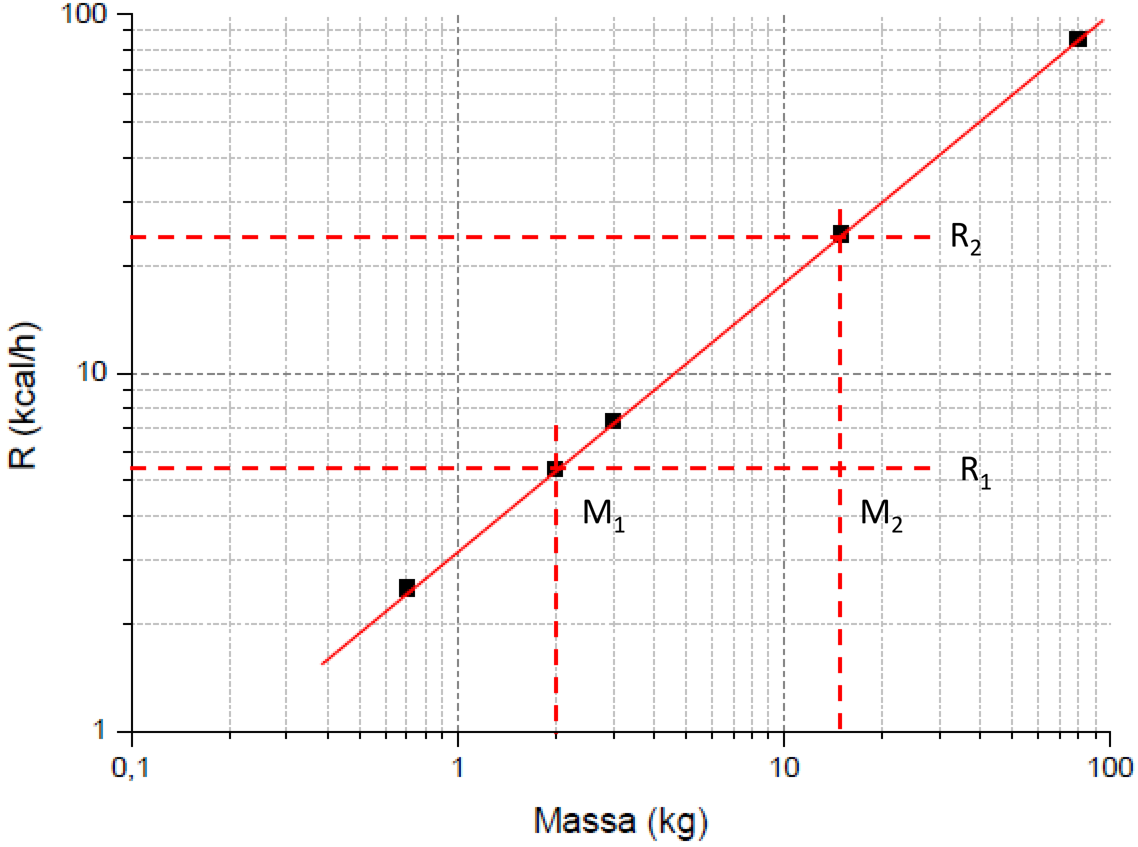
Para pensar...

A taxa metabólica R de um espécime de massa M indica a quantidade de energia que um organismo usa, por unidade de tempo, para executar uma função. A tabela abaixo apresenta alguns valores de R:

Espécimes	Rato	Coelho	Gato	Cão	Homem
R (kcal/h)	2,5	5,4	7,3	24,3	85,5
Massa (kg)	0,7	2,0	3,0	15,0	80,0

a) Encontre uma relação funcional entre essas grandezas.
b) Quais serão os valores de R para um camundongo de 20 g e para um cavalo de 800 kg?

$$\log y = \log B + \mathrm{n} \log x \Rightarrow u = constante + nv$$



$$n = \frac{log(R_2) - log(R_1)}{log(M_2) - log(M_1)}$$

$$n = \frac{log(24{,}3) - log(5{,}4)}{log(15{,}0) - log(2{,}0)}$$

$$n = 0{,}747$$

$$y = Bx^n \qquad R = BM^{0{,}747}$$

$$B = \frac{R}{M^{0{,}747}} = \frac{24{,}3}{15^{0{,}747}} = 3{,}2$$

$$R = 3{,}2M^{0{,}747}$$

Para pensar...

Suponha-se que a taxa de consumo de um recurso aumenta exponencialmente (pode ser o petróleo, ou o nutriente em uma cultura bacteriana). Durante a primeira duplicação do tempo, a quantidade utilizada é de 1 unidade. Durante a segunda duplicação do tempo é de 2 unidades, a próxima de 4, etc. Como é que a quantidade consumida durante um tempo de duplicação pode ser comparada com a quantidade total consumida durante todos os tempos de duplicação anteriores?

CONSIDERE :

$$\underbrace{\underbrace{1, 2, 4}_{7}, \underbrace{8}_{8}}_{15}, \underbrace{16}_{16}, 32, \ldots, N$$

E ASSIM POR DIANTE, OU SEJA, SE N UNIDADES FORAM CONSUMIDAS, $N-1$ UNIDADES FORAM CONSUMIDAS NOS TEMPOS PRECEDENTES. PARA GRANDES VALORES DE N, TEMOS QUE O QUE É CONSUMIDO NO TEMPO t CORRESPONDE A TUDO QUE FOI CONSUMIDO ANTERIORMENTE

Para pensar...

Considere o problema clássico predador-presa. Seja F o número de raposas e R o número de coelhos. Os coelhos comem grama, que é abundante. As raposas comem apenas coelhos. O número de raposas e coelhos podem ser modeladas pelas equações de *Lotka-Volterra*:

$$\frac{dR}{dt} = aR - bRF$$

$$\frac{dF}{dt} = -cF + dRF$$

Descreva o significado físico de cada termo no lado direito de cada equação. O que cada uma das constantes a, b, c, e d significam?

Vito Volterra (1860-1940)   Alfred J. Lotka (1880-1949)