

F-106 Fundamentos de Física para Biologia

Conservação de Energia – Movimentos

Physics Today
August 2020



**DOES NEW
PHYSICS LURK
INSIDE LIVING
MATTER?**

**Nanosensors
mitigate vision loss**

**X-ray photography at
Wellesley College**

**Nuclear plants to
manufacture hydrogen**



Mecânica

Definição:

A Mecânica é o ramo da Física que está relacionado com o estudo dos movimentos.

Ela é subdividida em :

Cinemática e Dinâmica.

Essa área pode explicar desde o movimento de pessoas e carros até o movimento dos planetas ao redor do Sol.

Mecânica

- Dinâmica

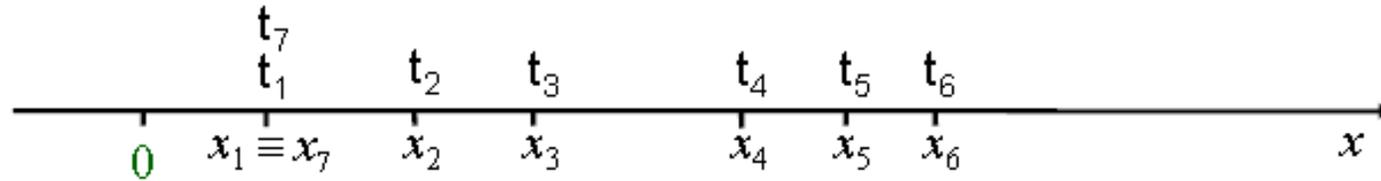
A Dinâmica é a parte da Mecânica que analisa as causas que dão origem aos movimentos. Como o movimento é originado por forças, podemos dizer que a Dinâmica é o estudo das forças. Dentro desse estudo, destacam-se as [leis de Newton e suas aplicações](#), o estudo da energia e o [impulso e a quantidade de movimento](#).

- Cinemática

A Cinemática é a parte da Mecânica que faz uma análise matemática dos movimentos, mostrando equações e gráficos que podem expressá-los e diferenciá-los. A Cinemática não se preocupa com as causas dos movimentos, mas somente em analisar o movimento em si, entendendo-o e propondo padrões matemáticos. Dentro da Cinemática, destacam-se os estudos relacionados com os movimentos com velocidade constante ([movimentos uniformes](#)), os [movimentos uniformemente variados](#), onde existe [aceleração](#), e os [movimentos circulares](#).

Posição – 1 Dimensão

Em cinemática, os conceitos de *tempo* e *posição* são primitivos. Um objeto é localizado pela sua posição ao longo de um eixo *orientado*, relativamente a um ponto de referência, geralmente tomado como a *origem* ($x = 0$). Exemplo:



O *movimento* de um objeto consiste na mudança de sua posição com o decorrer do tempo.

Um conceito importante é o da *relatividade* do movimento: sua descrição depende do observador. Já a escolha da origem é *arbitrária*.

A *trajetória* é o lugar geométrico dos pontos do espaço ocupados pelo objeto que se movimenta.

Deslocamento e Velocidade Média

O *deslocamento* unidimensional de um objeto num intervalo de tempo $(t_2 - t_1)$ é a diferença entre a posição final (x_2) no instante t_2 e a posição inicial (x_1) no instante t_1 .

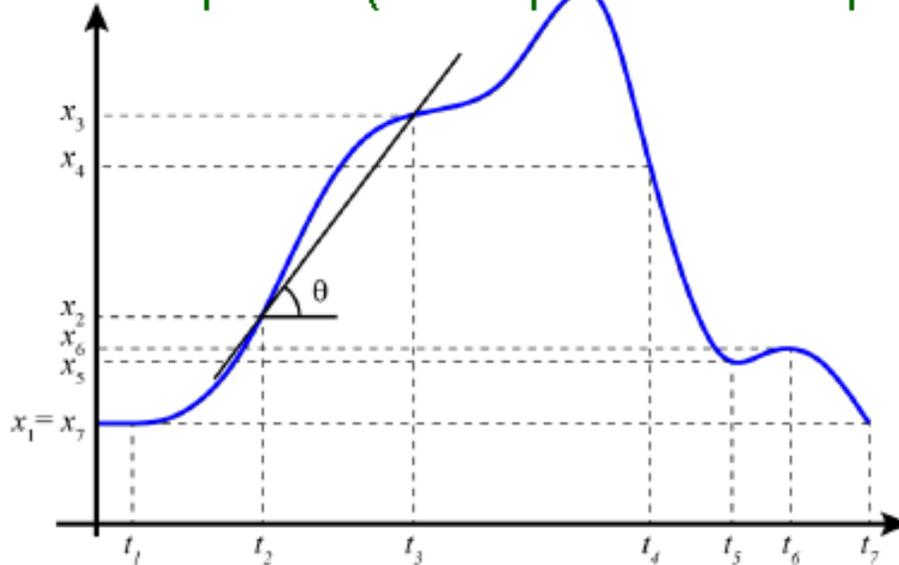
A velocidade média é definida como:

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (\text{unidade: m/s})$$

- Se $\Delta x > 0 \Rightarrow v_m > 0$ (movimento para a direita, ou no sentido de x **crecente**);
- Se $\Delta x < 0 \Rightarrow v_m < 0$ (movimento para a esquerda, ou no sentido de x **decrecente**).

Deslocamento e Velocidade Média

Exemplo: (uma possível representação do movimento)

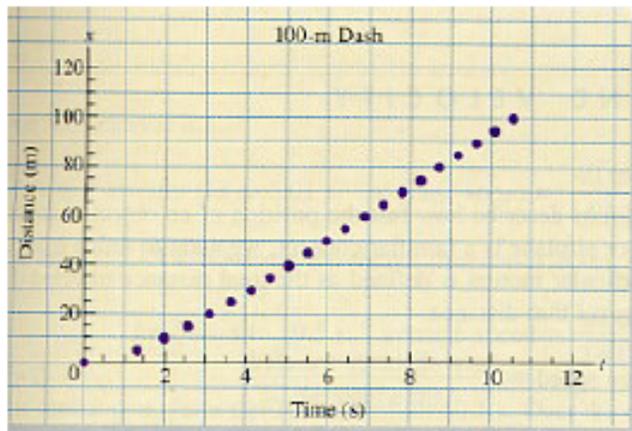


$$v_m = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} > 0 \quad (v_m \text{ entre } t_2 \text{ e } t_3)$$

$$v_m = \frac{x_7 - x_1}{t_7 - t_1} = 0 \quad (v_m \text{ entre } t_1 \text{ e } t_7)$$

$$v_m = \frac{x_6 - x_4}{t_6 - t_4} < 0 \quad (v_m \text{ entre } t_4 \text{ e } t_6)$$

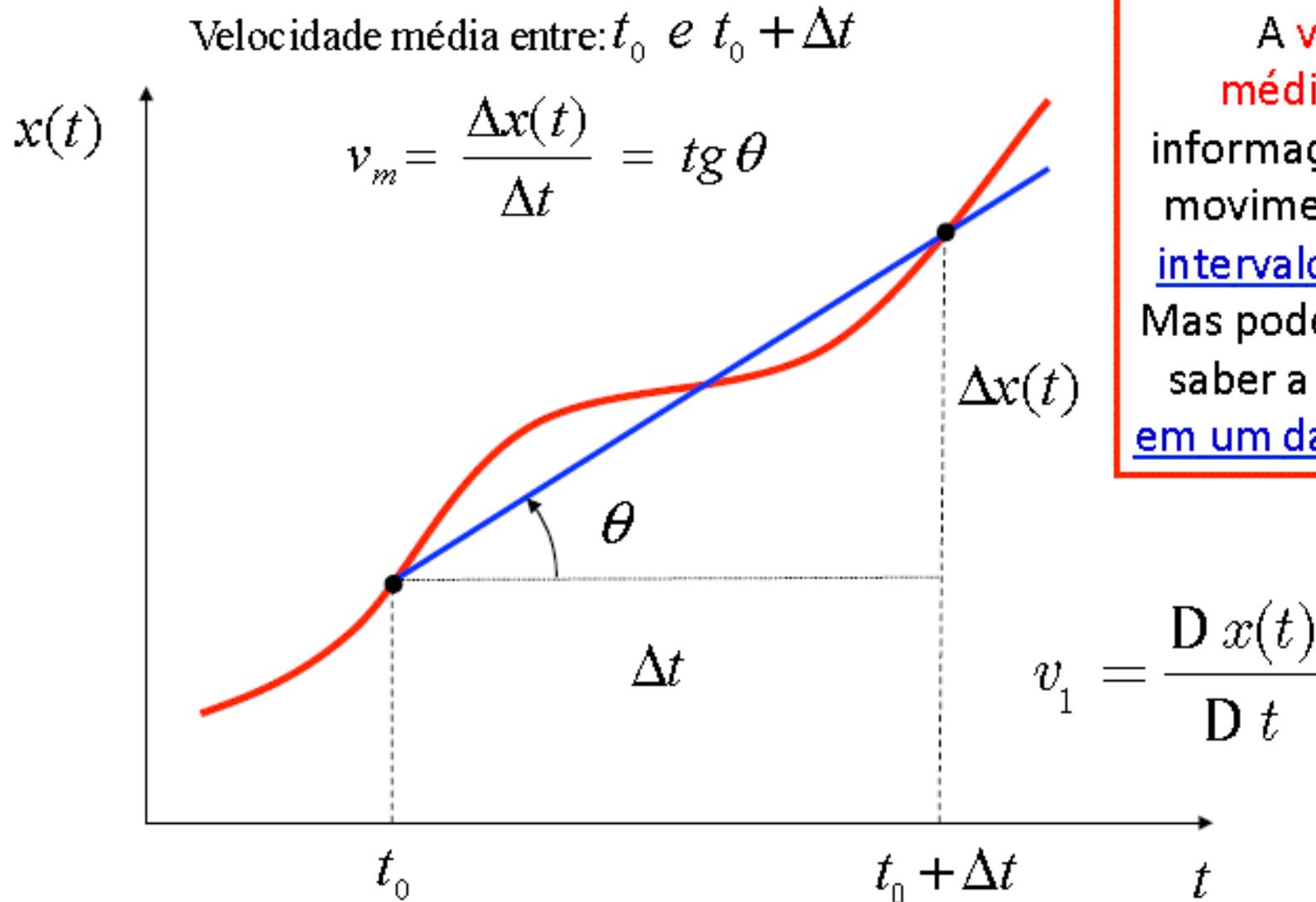
Exemplo numérico: corrida de 100 metros.

de 0 a 5,0 s : $v_m = 40 \text{ m}/5,0\text{s} = 8,0 \text{ m/s}$ de 5,0 a 10,5 s : $v_m = 60 \text{ m}/5,5\text{s} = 10,9 \text{ m/s}$

Em todo o intervalo (de 0 a 10,5 s) :

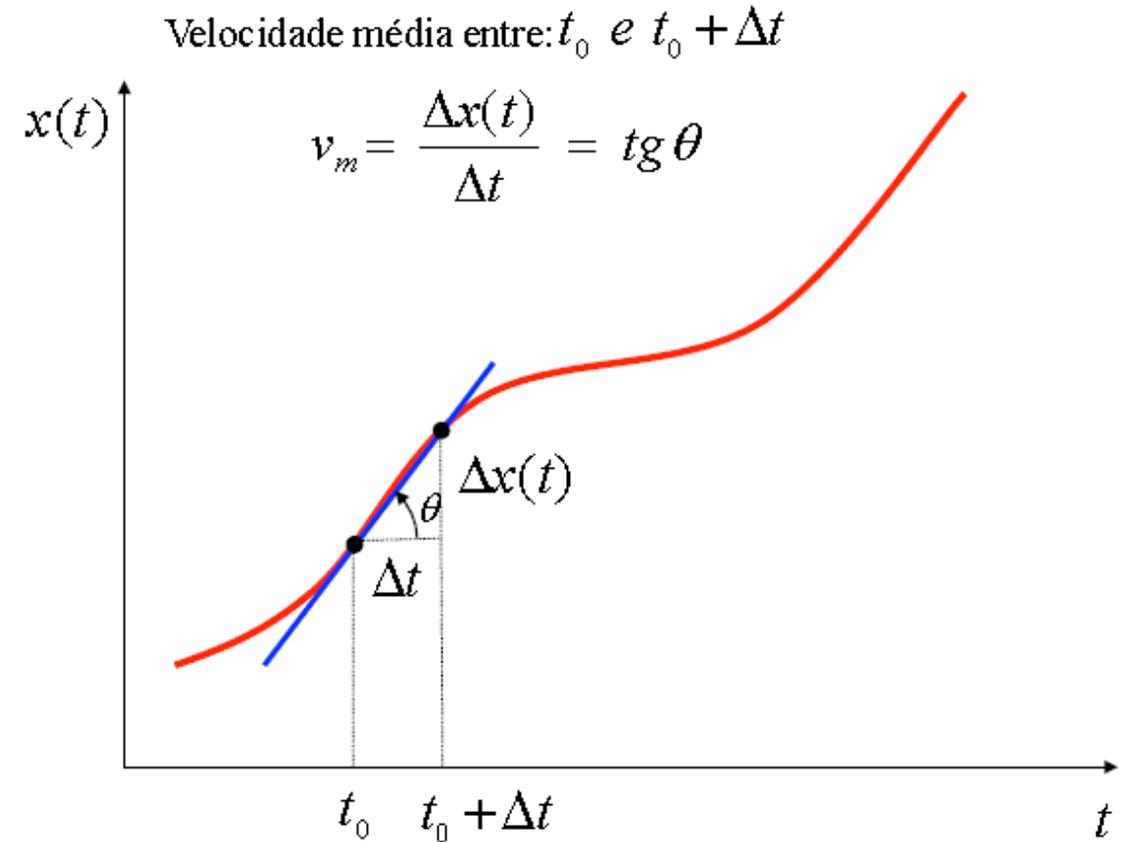
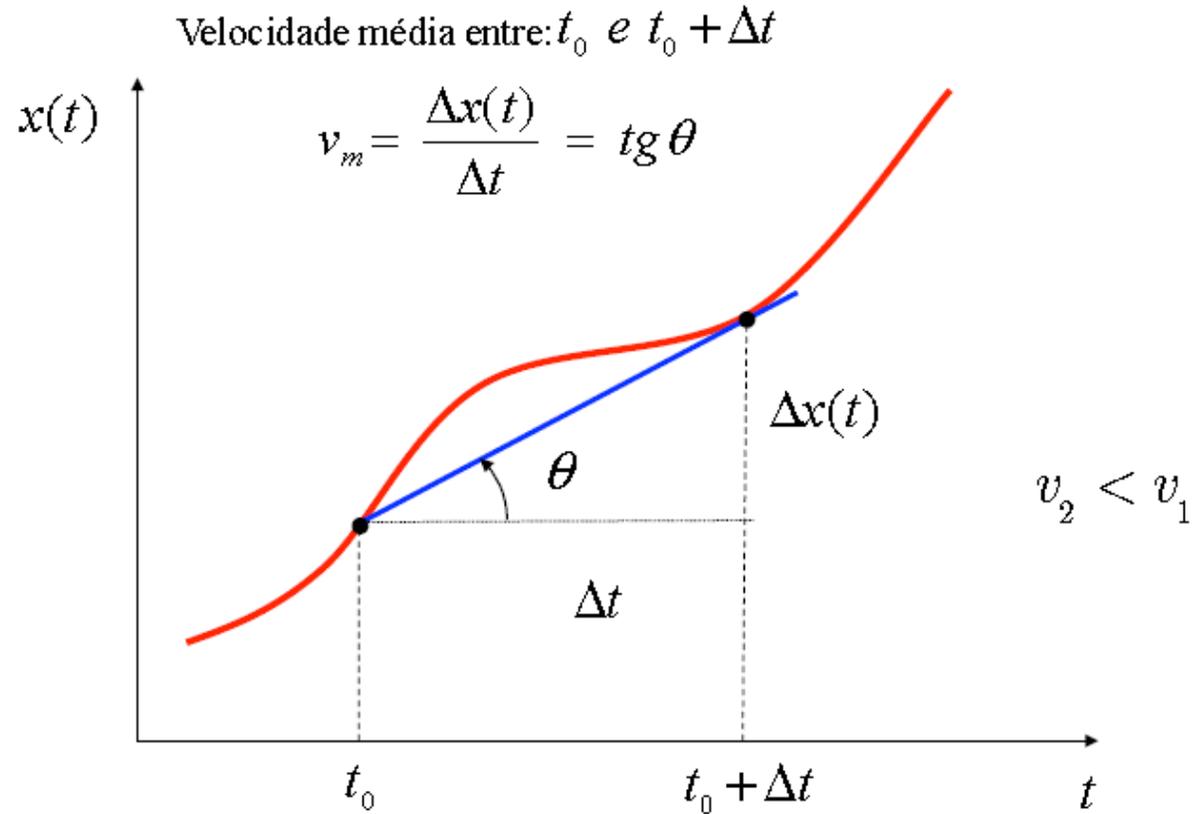
$$v_m = 100 \text{ m}/10,5\text{s} = 9,5 \text{ m/s}$$

Velocidade Média

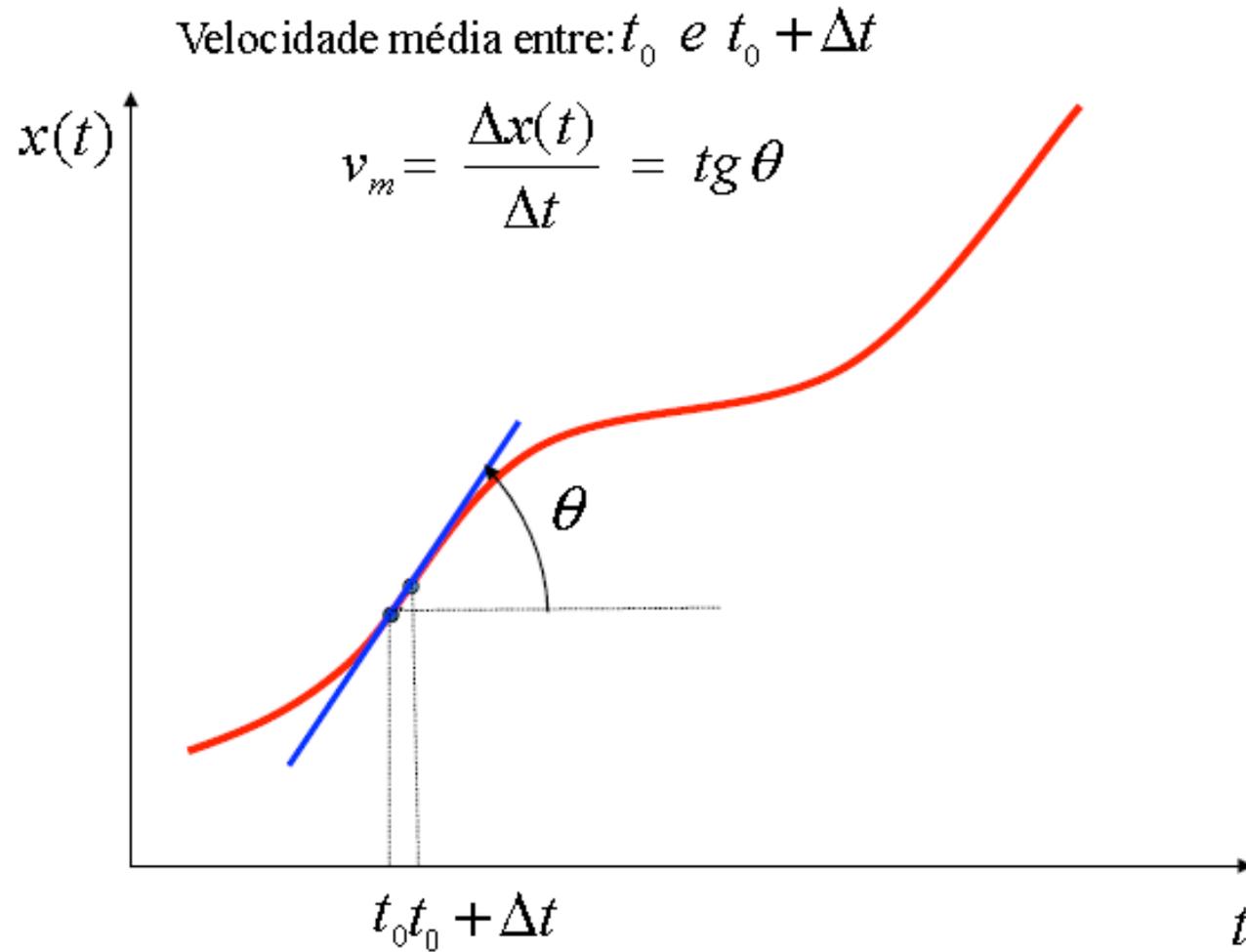


A **velocidade média** nos dá informações sobre o movimento em um intervalo de tempo. Mas podemos querer saber a velocidade em um dado instante.

Velocidade Média

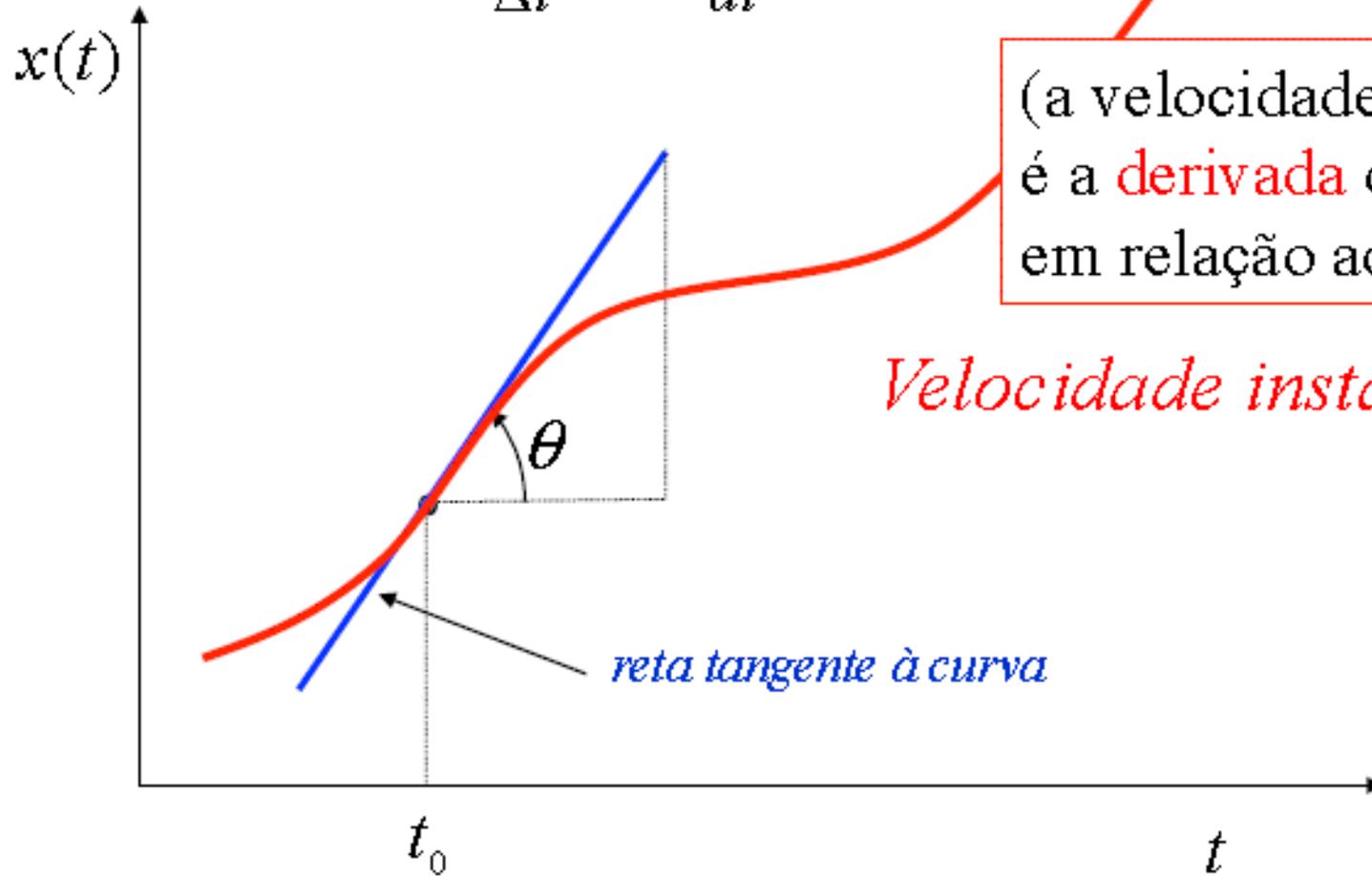


Velocidade Média



Velocidade Instantânea

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dx(t)}{dt} = \operatorname{tg} \theta$$



(a velocidade instantânea é a **derivada** da posição em relação ao tempo)

Velocidade instantânea em t_0

reta tangente à curva

Velocidade Instantânea

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

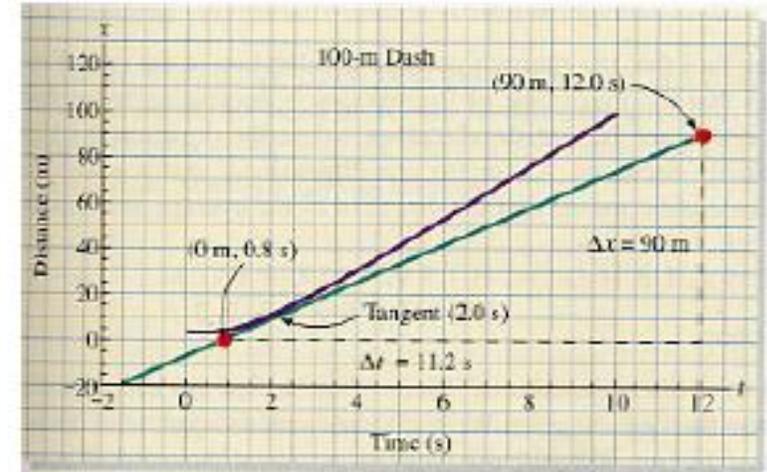
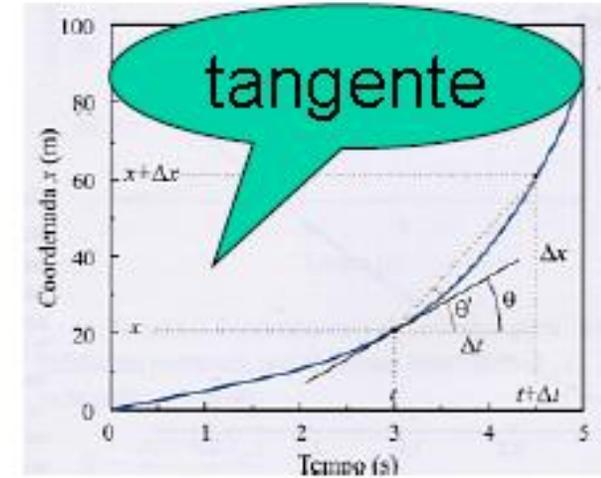
Derivada

Exemplo:

No gráfico abaixo (corrida de 100 m), a velocidade em $t = 2\text{ s}$ é

$$v(t=2\text{s}) = \frac{90\text{m}}{11,2\text{s}} \cong 8,0\text{m/s}$$

Geometricamente:

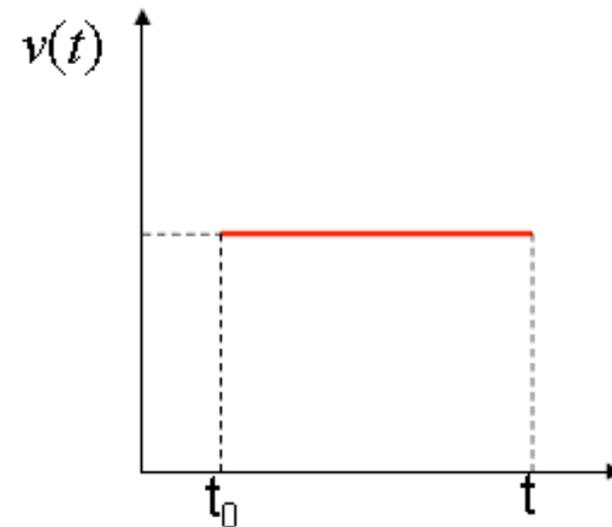
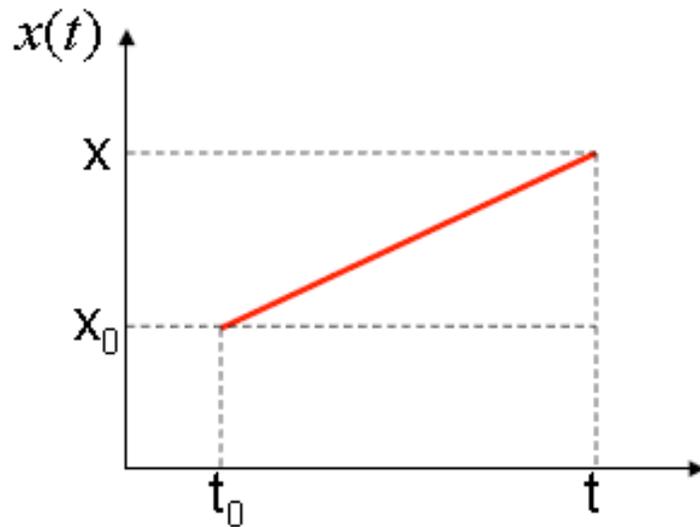


Velocidade Instantânea

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_m = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

ou: $x - x_0 = v(t - t_0)$

Graficamente:



Aceleração Média

Aceleração média: $a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (unidade: m/s^2)

Note que a_m também pode ser >0 , <0 ou $=0$.

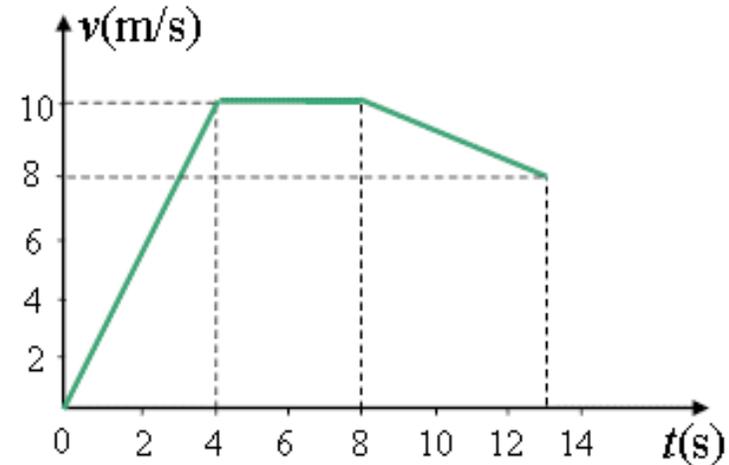
Exemplo: Um corredor acelera uniformemente até atingir 10 m/s em $t = 4,0 \text{ s}$. Mantém a velocidade nos próximos $4,0\text{s}$ e reduz a velocidade para $8,0 \text{ m/s}$ nos $5,0\text{s}$ seguintes.

Acelerações médias:

de 0s até 4s : $a_m = 10 \text{ m/s} / 4\text{s} = 2,5 \text{ m/s}^2$

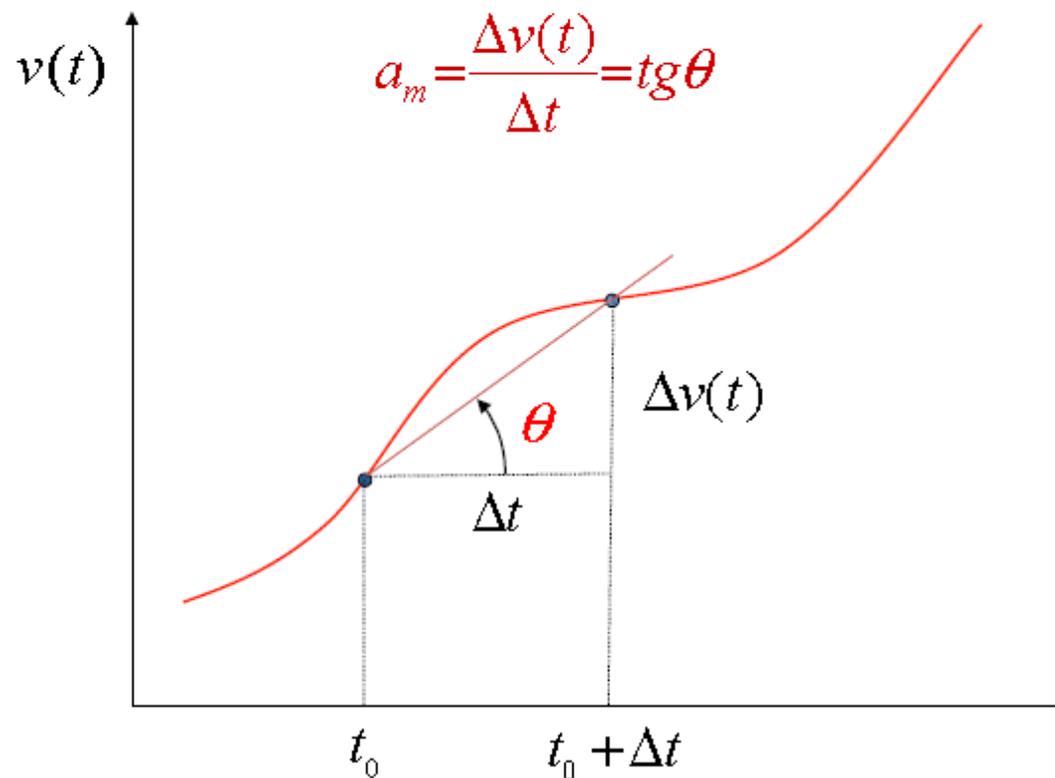
de 4s até 8s : $a_m = 0 \text{ m/s} / 4\text{s} = 0 \text{ m/s}^2$

de 8s até 13s : $a_m = -2 \text{ m/s} / 5\text{s} = -0,4 \text{ m/s}^2$

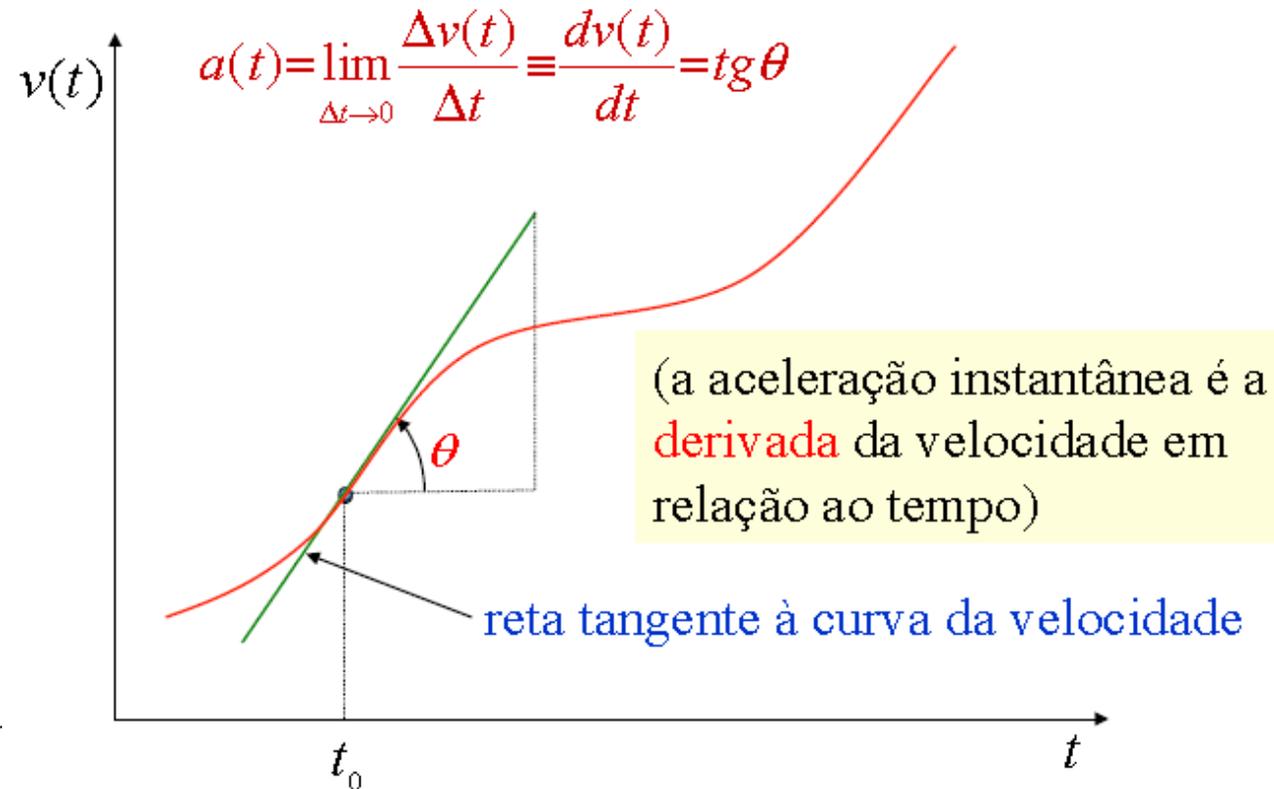


Aceleração Instantânea

Aceleração média entre: t_0 e $t_0 + \Delta t$



Aceleração instantânea em t_0 :



Aceleração Instantânea

Note que

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{dx}{dt} \right] = \frac{d^2x}{dt^2}$$

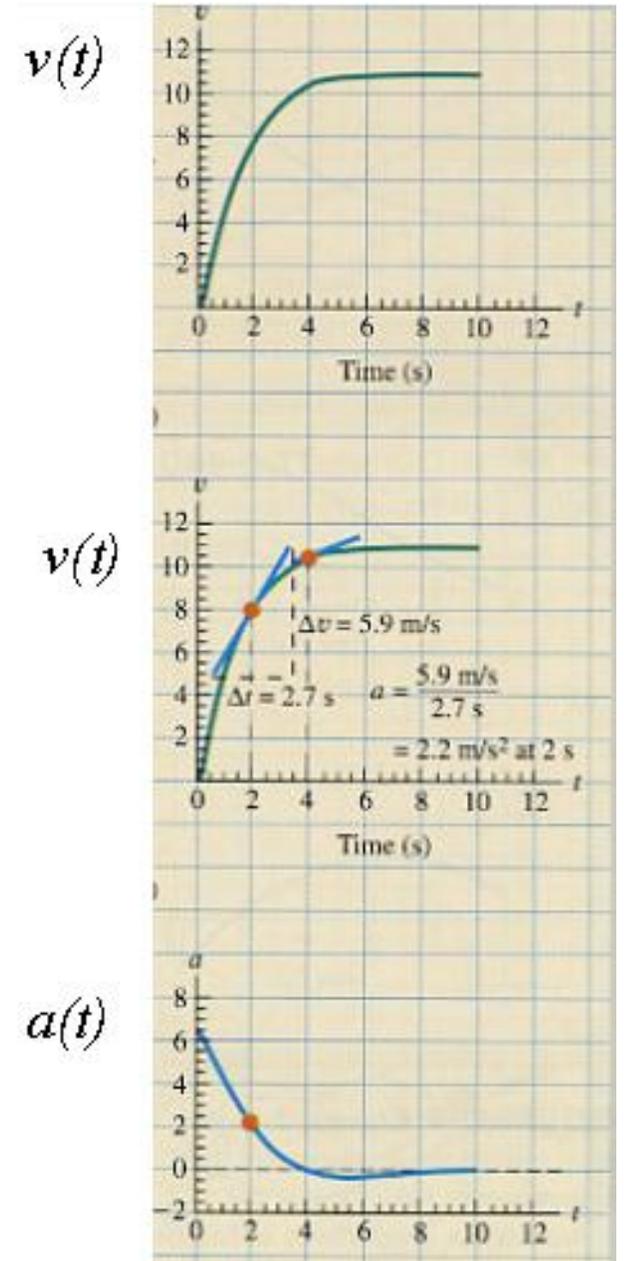
Segunda derivada

Exemplo:

Na corrida de 100 m, a aceleração em

$t = 2\text{s}$ é:

$$a(t=2\text{s}) = \frac{5,9\text{m/s}}{2,7\text{s}} = 2,2 \text{ m/s}^2$$



Aceleração Constante

Se a aceleração a é constante: $a = a_m = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$

Se $t_0 = 0$ e $v(t_0) = v_0$, a velocidade fica:

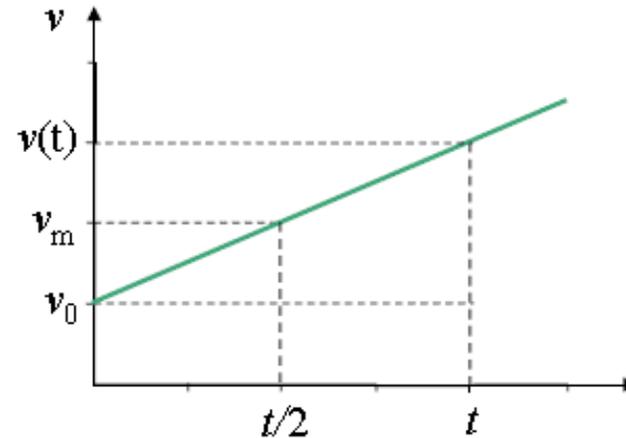
$$v = v_0 + at$$

Note que neste movimento a velocidade média é dada por

$$v_m = \frac{x - x_0}{t} = \frac{v_0 + v(t)}{2}$$

Como $x = x_0 + v_m t$, temos:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$



RESUMO

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2} (v_0 + v) t$$

Movimento relativo – 1 Dimensão

Dadas as posições x_A e x_B de dois corpos A e B em relação a uma origem 0 (**referencial**), a posição relativa de A em relação a B é dada por:

$$x_{AB} = x_A - x_B$$

Então, a velocidade relativa v_{AB} de A em relação a B é:

$$v_{AB} = \frac{dx_{AB}}{dt} = \frac{dx_A}{dt} - \frac{dx_B}{dt} = v_A - v_B$$

E a aceleração relativa a_{AB} de A em relação a B é:

$$a_{AB} = \frac{dv_{AB}}{dt} = a_A - a_B$$

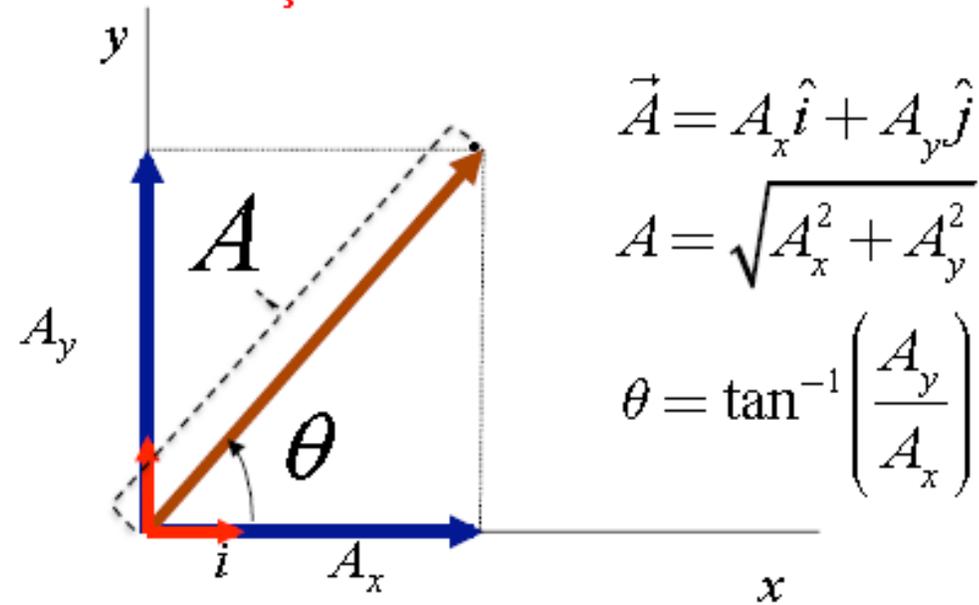
Alternativamente, podemos escrever:
$$\begin{cases} v_A = v_{AB} + v_B \\ a_A = a_{AB} + a_B \end{cases}$$

Regra mnemônica: $v_{AT} = v_{AB} + v_{BT}$

Movimento em 2 e 3 Dimensões

- **Escalar:** *grandeza sem direção associada, caracterizada apenas por um número.*
 - Massa de uma bola, 0.25 kg.
 - Tempo para a massa se mover uma distância
 - Energia de um corpo.
- Algumas grandezas escalares são sempre positivas (massa). Outras podem ter os dois sinais.

- **Vetor:** *quantidades descritas por uma magnitude (sempre positiva) e uma direção (sentido implícito).*
- Para a velocidade, por exemplo, importa não só o seu **valor**, por exemplo 2 m/s, mas também a **direção** do movimento.



Movimento em 2 e 3 Dimensões

Na natureza há inúmeros exemplos de **grandezas vetoriais que variam no tempo**. Estamos interessados na **posição** e **deslocamento** de um corpo em movimento **bidimensional** ou **tridimensional**, e na **velocidade** e **aceleração** deste corpo.

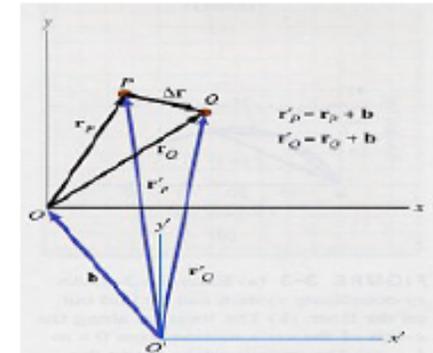
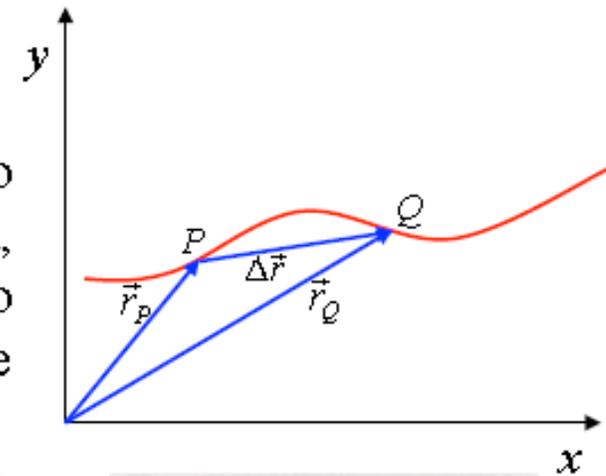
Posição e deslocamento

A **trajetória** é o lugar geométrico dos pontos do espaço ocupados pelo objeto (planeta, cometa, foguete, carro etc) que se movimenta. Qualquer ponto da trajetória pode ser descrito pelo vetor posição que denotamos por $\vec{r}(t)$.

O deslocamento $\Delta\vec{r}$ entre os pontos \vec{r}_Q e \vec{r}_P é dado por:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P$$

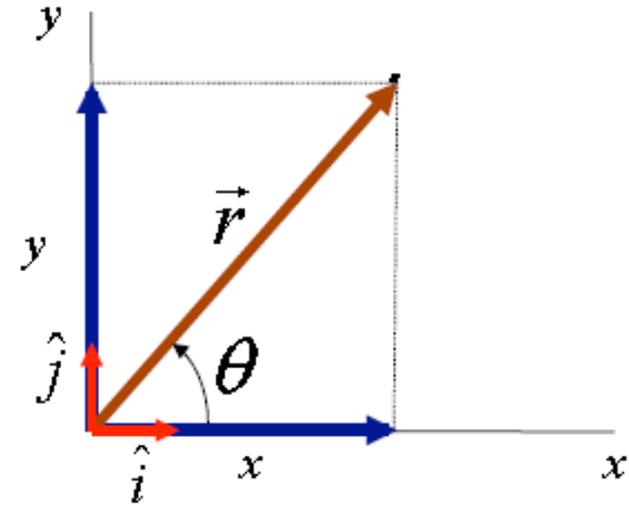
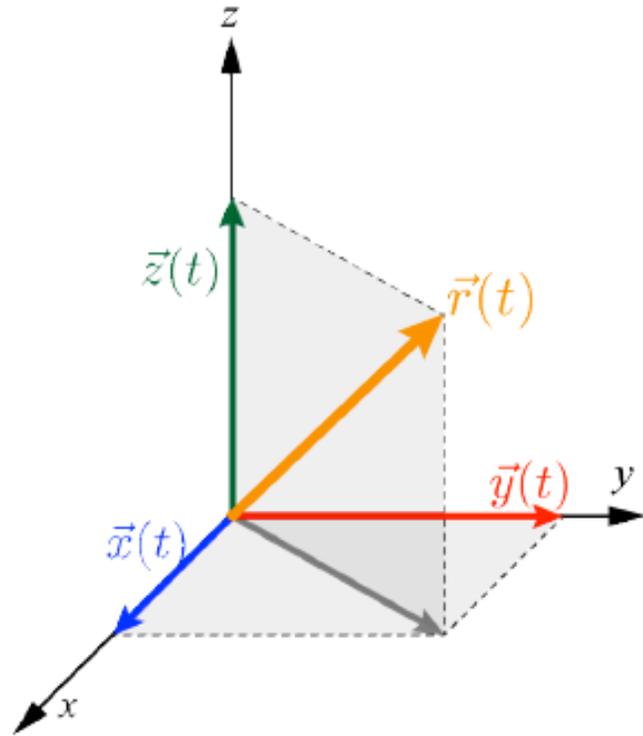
Note que $\Delta\vec{r}$ não depende da origem.



Posição e Deslocamento

O vetor posição em 2D fica definido em termos de suas coordenadas cartesianas por:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$



No caso espacial, 3D, temos:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Posição e Deslocamento

Exemplo: um ponto na trajetória de um móvel é dado pelas equações (em unidades SI):

$$\begin{cases} x(t) = 0,2t^2 + 5,0t + 0,5 \\ y(t) = -1,0t^2 + 10,0t + 2,0 \end{cases}$$

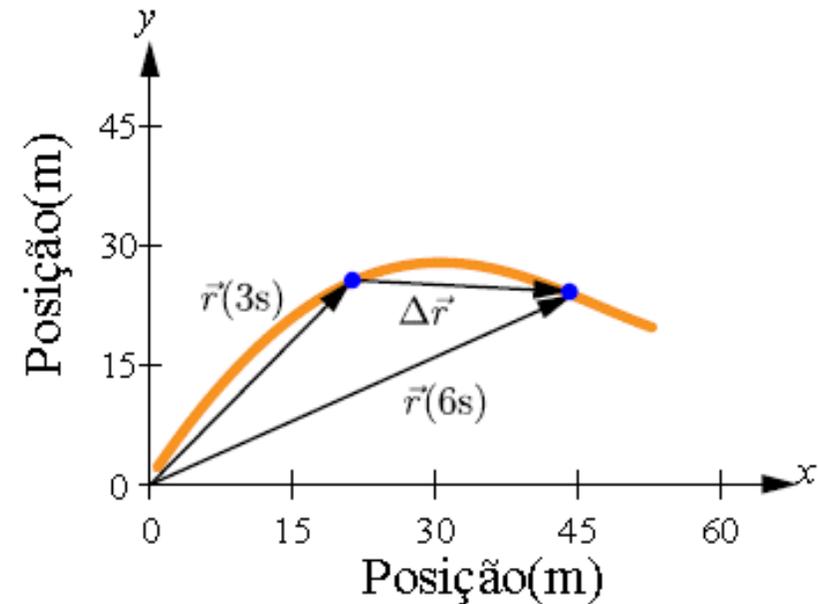
Calcular o deslocamento entre 3 e 6 s:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(6) - \vec{r}(3)$$

em $t = 3 \text{ s}$: $x(3) = 17 \text{ m}$ e $y(3) = 23 \text{ m}$

em $t = 6 \text{ s}$: $x(6) = 38 \text{ m}$ e $y(6) = 26 \text{ m}$

Daí: $\Delta \vec{r} = \vec{r}(6) - \vec{r}(3) \equiv (21\hat{i} + 3\hat{j})\text{m}$



Velocidade

Como no caso unidimensional, o vetor velocidade média é:

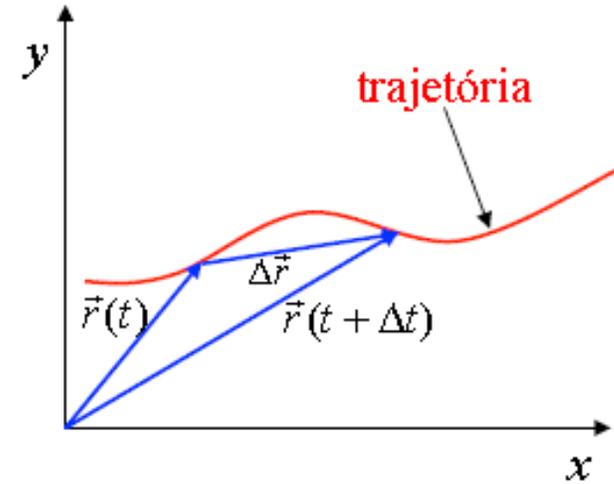
$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j}$$

O vetor velocidade instantânea é:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1)$$

Em termos de componentes cartesianas:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} \quad \text{ou:} \quad \vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$



Decorências da definição (1):

- a) \vec{v} é sempre **tangente** à trajetória;
- b) $|\vec{v}|$ coincide com o módulo da velocidade escalar definida anteriormente.

Aceleração

Novamente como no caso 1D, a aceleração média é:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{j}$$

A aceleração instantânea é:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2) \quad \text{ou:} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}$$

Em termos de componentes cartesianas:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} \quad \text{ou:} \quad \vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

Decorências da definição (2):

- a aceleração resulta de *qualquer variação* do vetor velocidade (quer seja do módulo, da direção ou do sentido de \vec{v});
- O vetor aceleração está sempre voltado para o “interior” da trajetória.

Velocidade e Aceleração

Voltando ao exemplo do móvel, as componentes do vetor velocidade são:

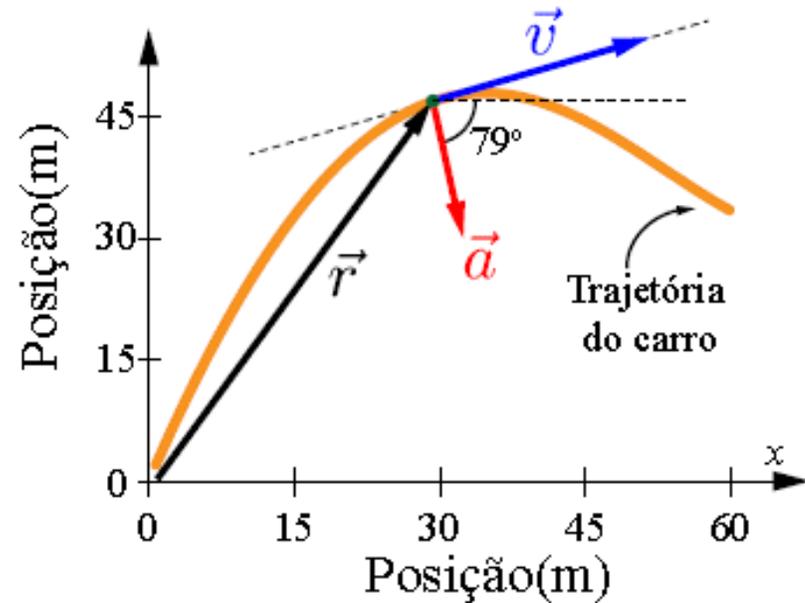
$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(0,2t^2 + 5,0t + 0,5) = 0,4t + 5,0$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-1,0t^2 + 10t + 2,0) = -2,0t + 10$$

Em $t = 3$ s:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 6,2 \text{ m/s} \\ \frac{dy}{dt} = 4,0 \text{ m/s} \end{array} \right\} \vec{v} = (6,2\hat{i} + 4,0\hat{j}) \text{ m/s}$$

$$\begin{cases} x(t) = 0,2t^2 + 5,0t + 0,5 \\ y(t) = -1,0t^2 + 10,0t + 2,0 \end{cases}$$



\vec{v} é tangente à trajetória!

Velocidade e Aceleração

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(0,2t^2 + 5,0t + 0,5) = 0,4t + 5,0$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-1,0t^2 + 10t + 2,0) = -2,0t + 10$$

As componentes do vetor aceleração são:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(0,4t + 5) = 0,4 \text{ m/s}^2$$

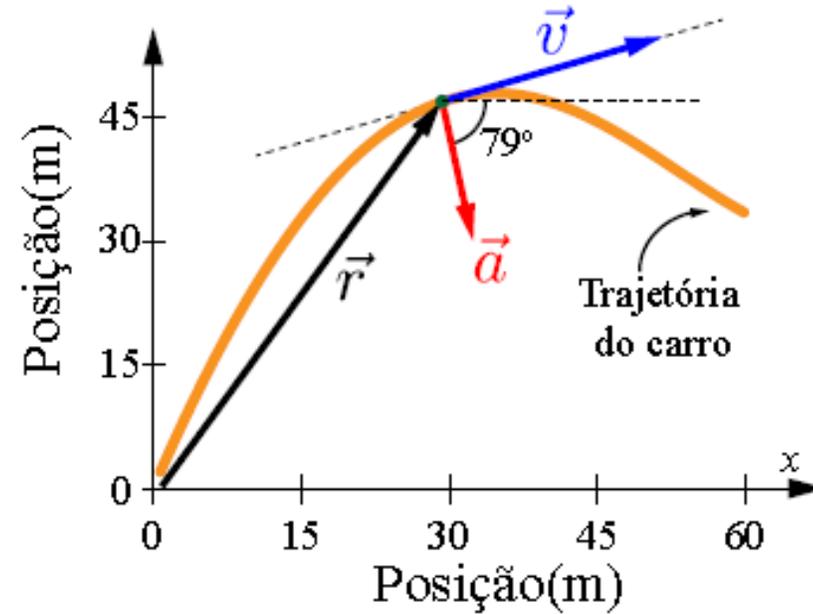
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(-2,0t + 10) = -2,0 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = (0,4\hat{i} - 2,0\hat{j}) \text{ m/s}^2$$

Módulo:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cong \sqrt{4,2} = 2,0 \text{ m/s}^2$$

$$\begin{cases} x(t) = 0,2t^2 + 5,0t + 0,5 \\ y(t) = -1,0t^2 + 10,0t + 2,0 \end{cases}$$



$$\hat{\text{Ângulo:}} \quad \text{tg } \theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-2,0}{0,4} = -5,0$$

$$\theta \cong -79^\circ$$

Exemplo: Movimento em 2D - Aceleração Constante

Aceleração constante \rightarrow teremos um movimento no **plano** definido pelos vetores **velocidade inicial** e **aceleração**:

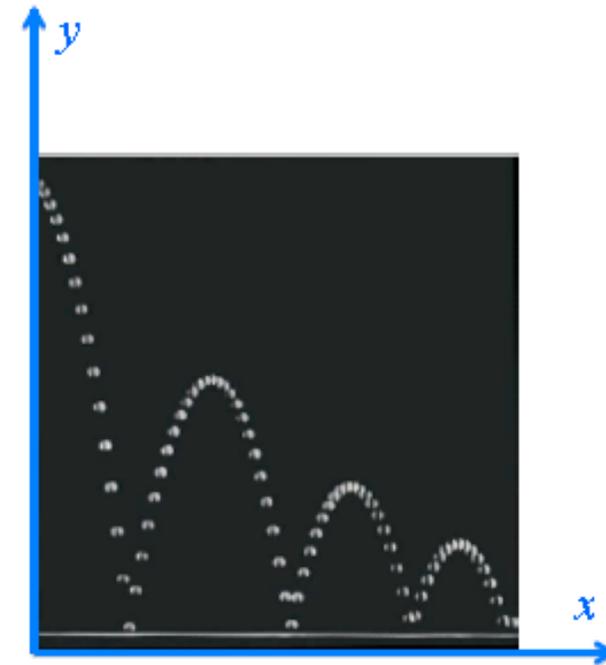
Movimento 2D

Vamos escolher os eixos de tal forma que o movimento se dê no **plano xy** .

Aceleração constante no plano xy : a_x e a_y **constantes** ou seja:

2 problemas 1D independentes

Teremos um **MRUA** na direção x e outro na direção y .



Exemplo: Movimento em 2D - Aceleração Constante

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z(t)}{dt} \hat{k} \Rightarrow \vec{a}(t) = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$



componente x de \vec{r} \longrightarrow $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

componente x de \vec{v} \longrightarrow $v_x = v_{0x} + a_x t$

componente y de \vec{r} \longrightarrow $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$

componente y de \vec{v} \longrightarrow $v_y = v_{0y} + a_y t$

Exemplo: Movimento em 2D - Aceleração Constante

Um caso particular: movimento sob aceleração da gravidade

Nesse caso $a_y = -g$ e $a_x = 0$. Na direção x , v_x é **constante**!

componente x de \vec{r} \longrightarrow $x = x_0 + v_{0x}t$

componente x de \vec{v} \longrightarrow $v_x = v_{0x} = \text{constante}$

componente y de \vec{r} \longrightarrow $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

componente y de \vec{v} \longrightarrow $v_y = v_{0y} - gt$

$$\text{Em } t = 0: \begin{cases} \vec{r}_0 = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} \\ \vec{v}_0 = v_{0x} \hat{i} + v_{0y} \hat{j} \end{cases}$$

Nota: \vec{r}_0 e \vec{v}_0 são as **condições iniciais** do movimento.

Exemplo: Movimento em 2D - Aceleração Constante

Um caso particular: movimento sob aceleração da gravidade

Se tomamos $x_0 = y_0 = 0$ (saindo da origem):

de $x = v_{0x}t$, temos: $t = x/v_{0x}$

Substituindo t na equação para y encontramos a equação da trajetória:

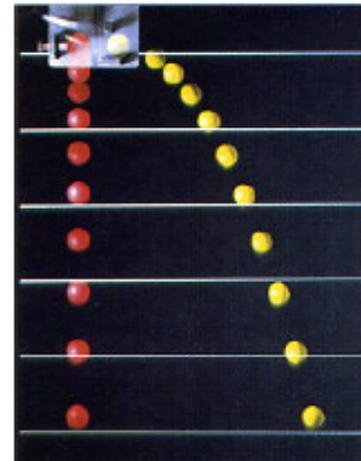
$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2 \quad (\text{Equação de uma parábola !})$$

O movimento na direção y não depende da velocidade v_x . Na figura ao lado, duas bolas são jogadas sob a ação da gravidade. A vermelha é solta ($v_{0y}=0$) e a amarela tem velocidade inicial horizontal v_{0x} .

Em qualquer instante elas estão sempre na mesma posição vertical!



Fotografia estroboscópica do movimento parabólico



Exemplo: Movimento em 2D - Aceleração Constante

Um caso particular: movimento sob aceleração da gravidade

Objeto lançado com velocidade \vec{v}_0 ($v_{0x} \neq 0$, $v_{0y} \neq 0$) formando um ângulo θ_0 com a horizontal.

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 = \text{constante}$$

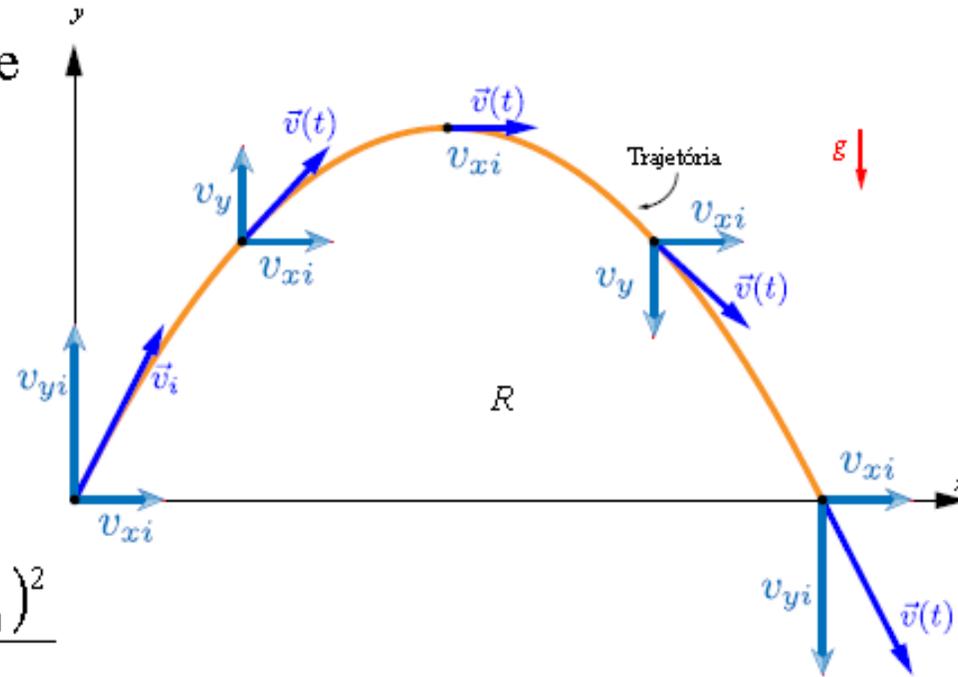
$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \theta_0 - gt$$

Tempo para atingir altura máxima h
(quando $v_y = 0$):

$$t_h = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$$

Altura máxima h :

$$h = v_0 \sin \theta_0 t_h - \frac{1}{2} g t_h^2 = \frac{(v_0 \sin \theta_0)^2}{2g}$$



Note que o movimento é **simétrico**: o corpo leva um tempo t_h para subir e o **mesmo** tempo t_h para voltar ao mesmo nível.

Exemplo: Movimento em 2D - Aceleração Constante

Um caso particular: movimento sob aceleração da gravidade

Alcance: distância horizontal percorrida até o objeto voltar à altura inicial : $R = x(2t_h)$

$$R = v_{0x} 2t_h = v_0 \cos\theta_0 \left(\frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} \right) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0$$

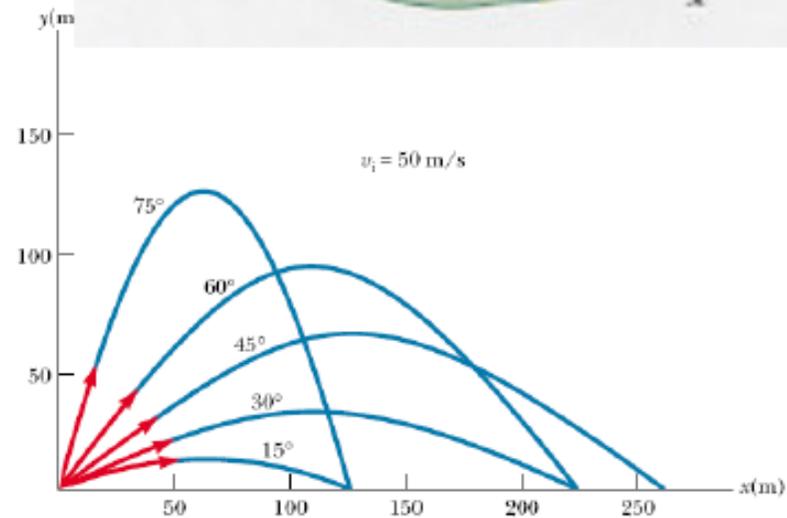
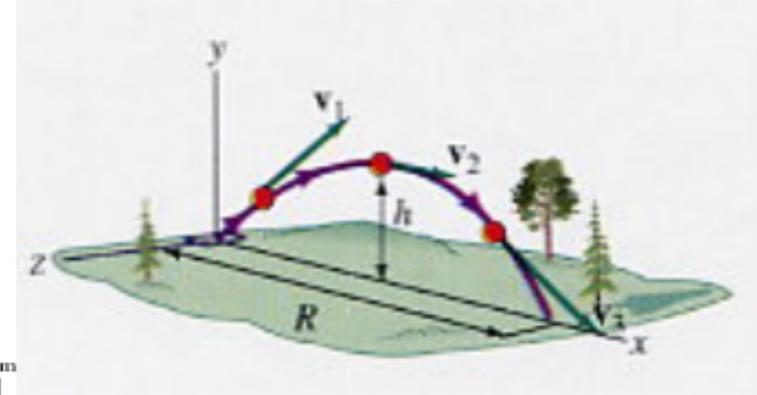
$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0$$

Para um dado **módulo da velocidade** inicial, o alcance será **máximo** para

$$2\theta_0 = \pi/2 \longrightarrow \theta_0 = 45^\circ$$

Então:

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$



Forças na natureza

Até onde sabemos, existem apenas 4 tipos de interações fundamentais na natureza, cuja composição de forças levam a todos os fenômenos que conhecemos e observamos

- Interação gravitacional (massas)
- Interação eletromagnética (cargas)
- Interação fraca (quarks e léptons)
- Interação forte (quarks)



FORÇAS

Standard Model of Elementary Particles

	three generations of matter (elementary fermions)			three generations of antimatter (elementary antifermions)			interactions / force carriers (elementary bosons)	
	I	II	III	I	II	III		
mass	$\approx 2.2 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.28 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 173.1 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 2.2 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.28 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 173.1 \text{ GeV}/c^2$	0	$\approx 124.97 \text{ GeV}/c^2$
charge	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0
spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
	u up	c charm	t top	\bar{u} antiup	\bar{c} anticharm	\bar{t} antitop	g gluon	H higgs
	d down	s strange	b bottom	\bar{d} antidown	\bar{s} antistrange	\bar{b} antibottom	γ photon	
	e electron	μ muon	τ tau	e^+ positron	$\bar{\mu}$ antimuon	$\bar{\tau}$ antitau	Z Z ⁰ boson	
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	$\bar{\nu}_e$ electron antineutrino	$\bar{\nu}_\mu$ muon antineutrino	$\bar{\nu}_\tau$ tau antineutrino	W^+ W ⁺ boson	W^- W ⁻ boson

QUARKS (vertical label on the left side of the quark rows)

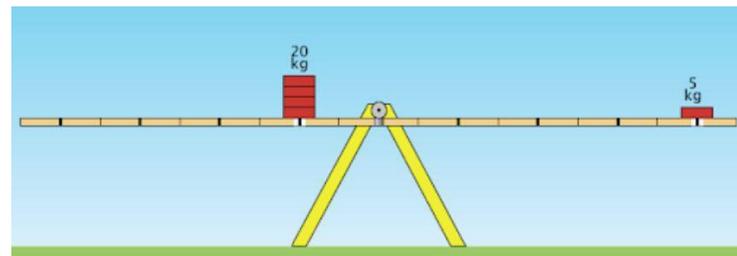
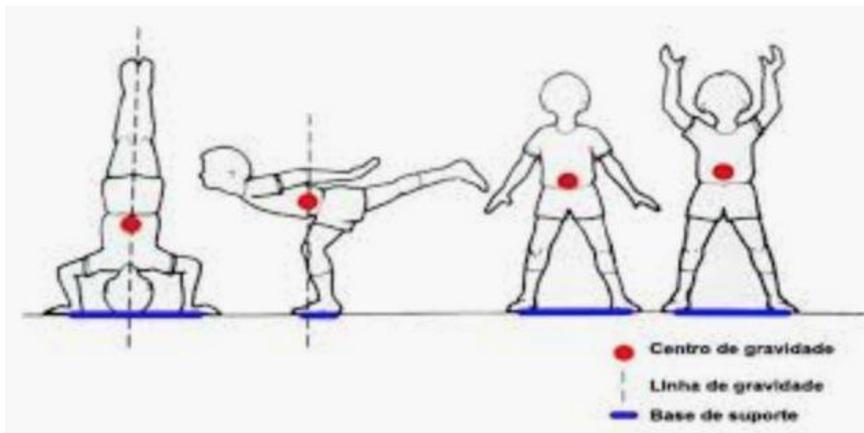
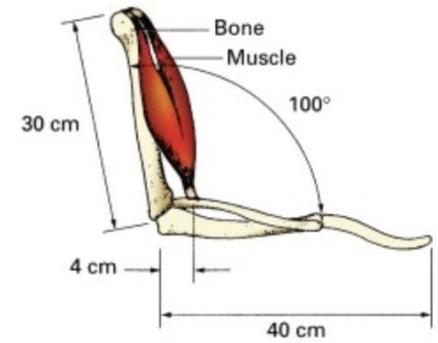
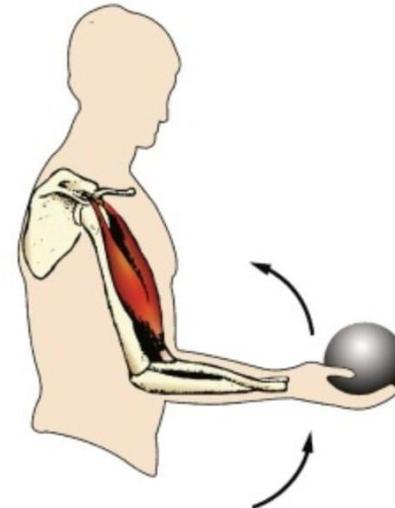
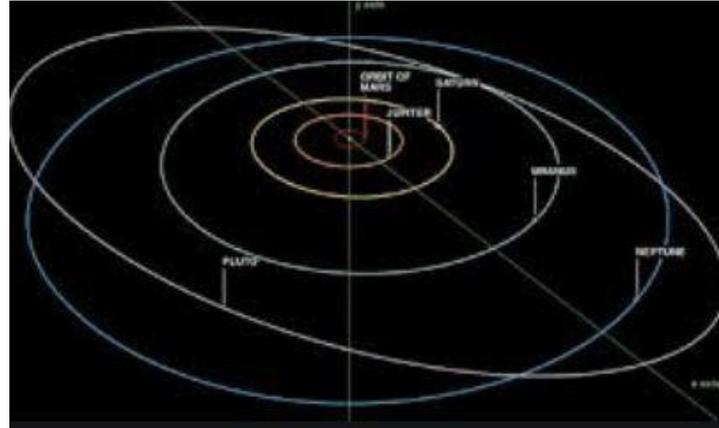
LEPTONS (vertical label on the left side of the lepton rows)

GAUGE BOSONS VECTOR BOSONS (vertical label on the right side, red text)

SCALAR BOSONS (vertical label on the right side, yellow text)

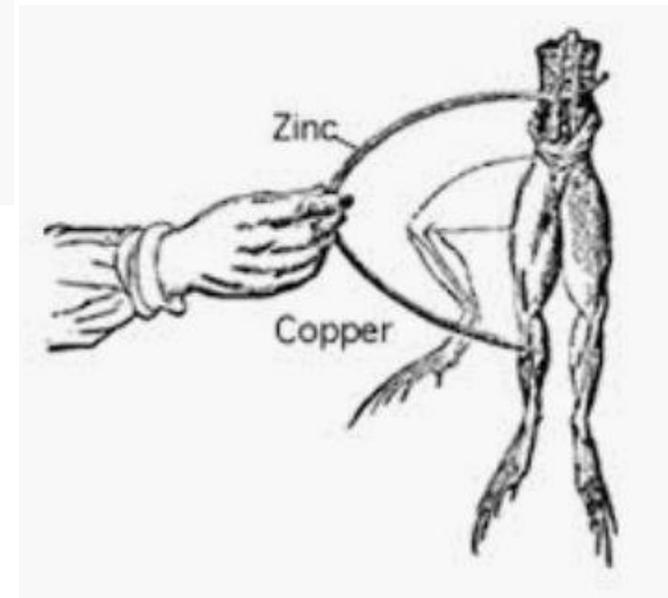
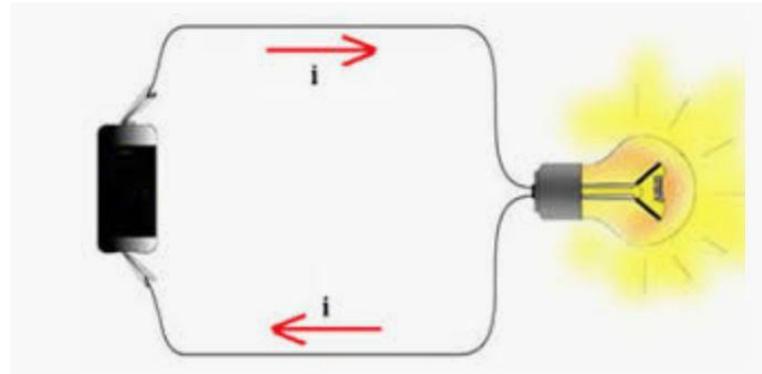
Forças na natureza

Força Gravitacional: A atração mútua entre corpos em razão de suas massas é denominada força gravitacional.



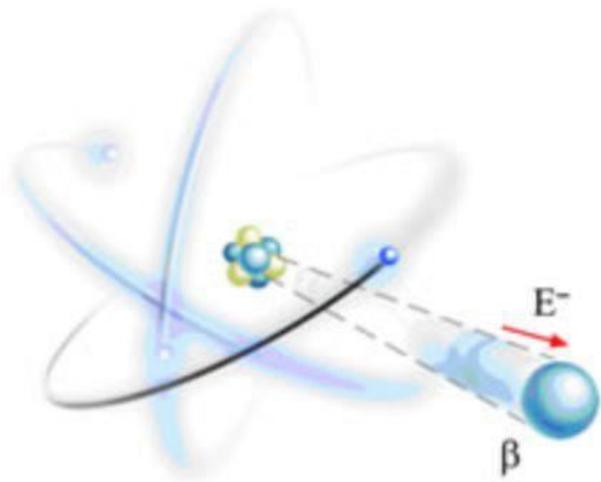
Forças na natureza

Força Eletromagnética: A atração ou repulsão entre corpos em razão de suas cargas elétricas e/ou sua magnetização é denominada força eletromagnética .



Forças na natureza

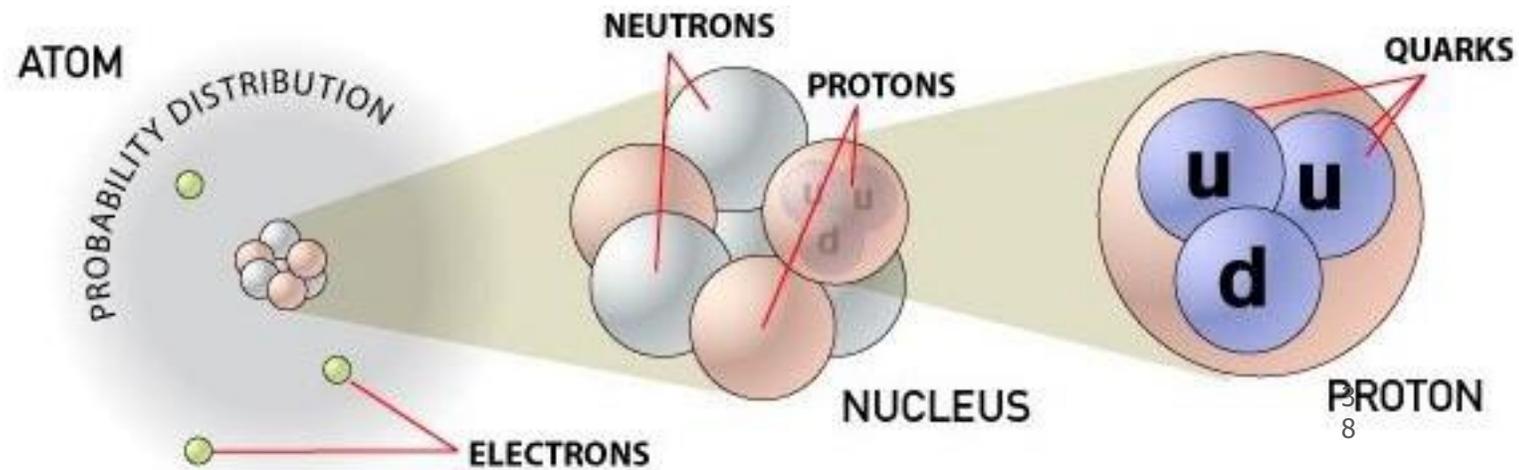
Força Nuclear Fraca: Força desenvolvida entre os léptons e os hadrons é denominada força nuclear fraca. No decaimento beta, a força nuclear fraca é responsável pela emissão de elétrons em algumas substâncias radioativas. Essa é a manifestação mais clara dessa força, uma vez que ela atua de forma relevante apenas em dimensões sub-atômicas.



RADIOTERAPIA

Forças na natureza

Força Nuclear Forte: A força que mantém a coesão nuclear e a união entre quarks é denominada força nuclear forte. Os prótons possuem cargas positivas causando repulsão mútua entre eles, a força que os mantém coesos no núcleo atômico é chamada força nuclear forte



Dinâmica: forças \rightarrow movimento

As Leis de Newton

- É impossível, no entanto, **prever** movimentos usando somente a cinemática.
- **Forças** são as causas das modificações no movimento. Seu conhecimento permite prever o movimento subsequente de um objeto.
- O estudo das causas do movimento é **Dinâmica**.



~ 100 anos



Experimentação

Tycho Brahe (1546-1601)

Johanes Kepler (1571-1630)

Galileu Galilei (1564-1642)

Isaac Newton (1642-1727)

As Leis de Newton

1ª Lei – Um corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme se nenhuma força resultante atua sobre ele.



As Leis de Newton

2ª Lei – A taxa de variação do momento de uma partícula é a força resultante que atua sobre ela, isto é:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

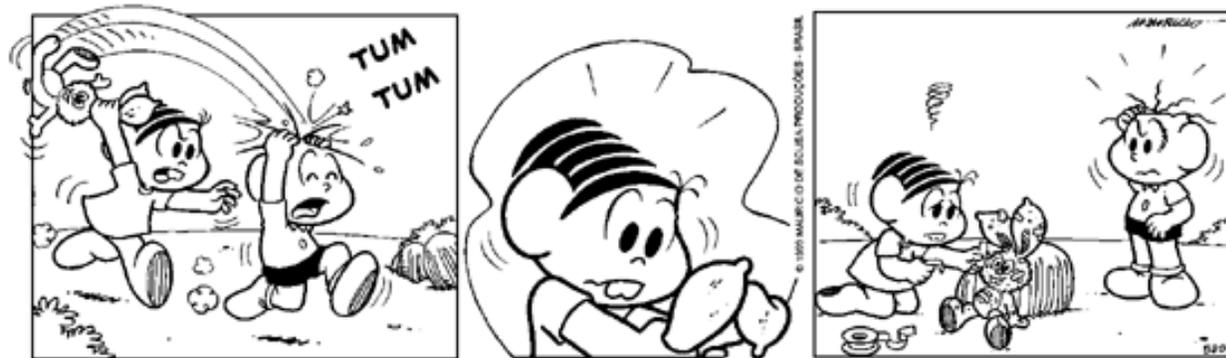
onde $\vec{p} = m\vec{v}$ é o momento da partícula

Se a massa é constante, então:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

As Leis de Newton

3ª Lei – À toda ação de um corpo A sobre um corpo B, corresponde uma reação igual e de sentido oposto do corpo B sobre A.



Copyright ©1999 Mauricio de Sousa Produções Ltda. Todos os direitos reservados.

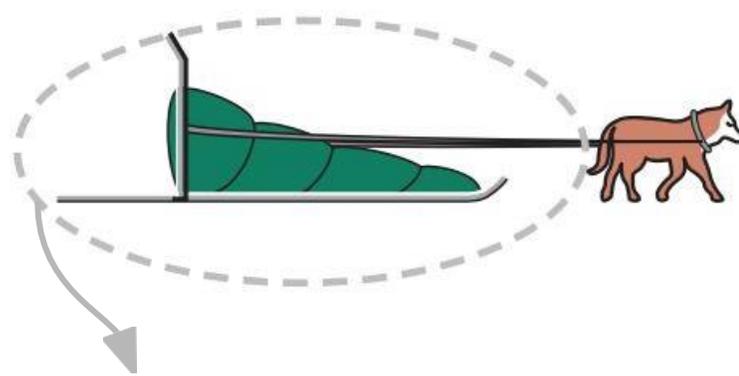
5206

Atenção: Ação e reação atuam em corpos diferentes

Leis de Newton: exemplo 1

Vamos analisar a dinâmica de um caso simples:
Um cão puxando um trenó.

- Qual a aceleração do trenó?
- Qual a intensidade da força normal?



Aplicando a segunda Lei de Newton:

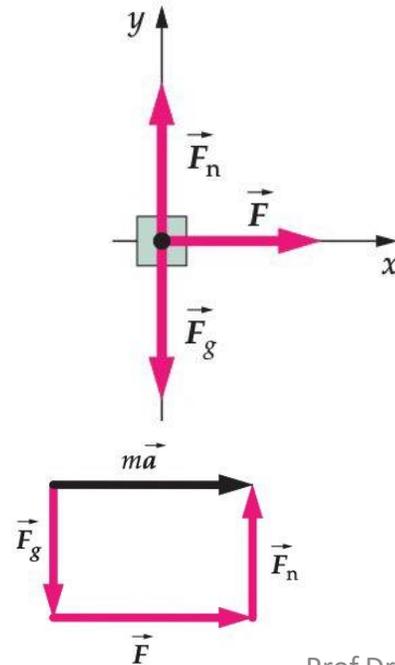
$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= F_{nx} + F_{gx} + F_x = ma_x \\ 0 + 0 + F &= ma_x\end{aligned}$$

$$a_x = \frac{F}{m}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= F_{ny} + F_{gy} + F_y = ma_y \\ F_n - F_g + 0 &= 0\end{aligned}$$

$$F_n = F_g$$

Diagrama de forças



Leis de Newton: exemplo 2

Um exemplo mais elaborado:

A força $\mathbf{F} = 150 \text{ N}$ que puxa o trenó de massa $m = 80 \text{ kg}$ faz um ângulo com a direção do movimento, $\theta = 25^\circ$

- Qual a aceleração do trenó?
- Qual a intensidade da força normal?

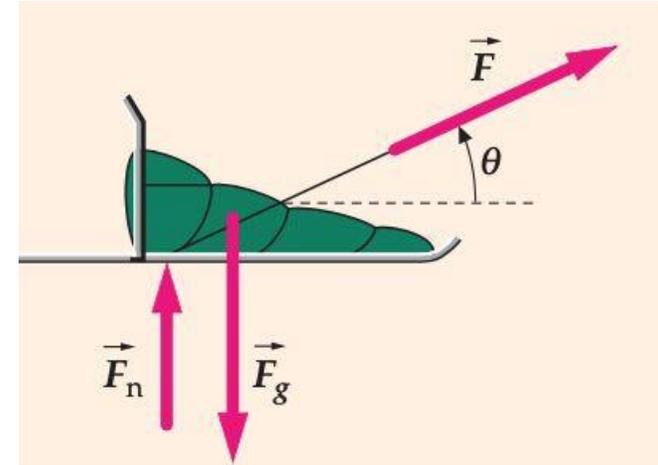
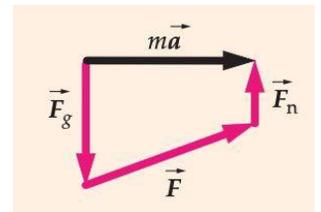
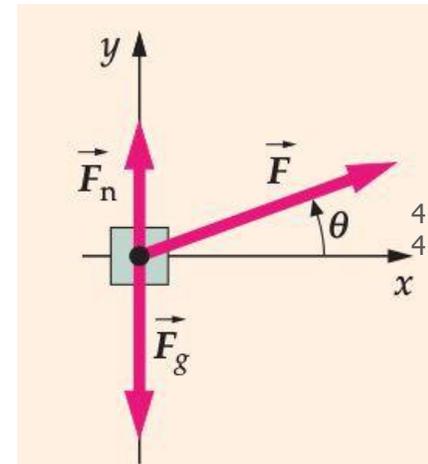
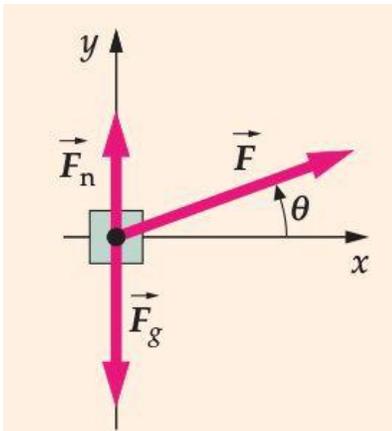


Diagrama de forças
(ou diagrama de corpo livre):



Leis de Newton: exemplo 2

Aplicando a segunda Lei de Newton:



$$\vec{F}_n + \vec{F}_g + \vec{F} = m\vec{a}$$

$$F_{nx} + F_{gx} + F_x = ma_x$$

$$F_{ny} + F_{gy} + F_y = ma_y$$

Na direção x

$$F_{nx} = 0, \quad F_{gx} = 0, \quad F_x = F \cos \theta$$

$$\sum \vec{F}_x = 0 + 0 + F \cos \theta = ma_x$$

$$a_x = \frac{F \cos \theta}{m} = \frac{(150 \text{ N}) \cos 25^\circ}{80 \text{ kg}} = \boxed{1.7 \text{ m/s}^2}$$

Na direção y

$$a_y = 0$$

$$F_{ny} = F_n, \quad F_{gy} = -mg$$

$$F_y = F \sin \theta$$

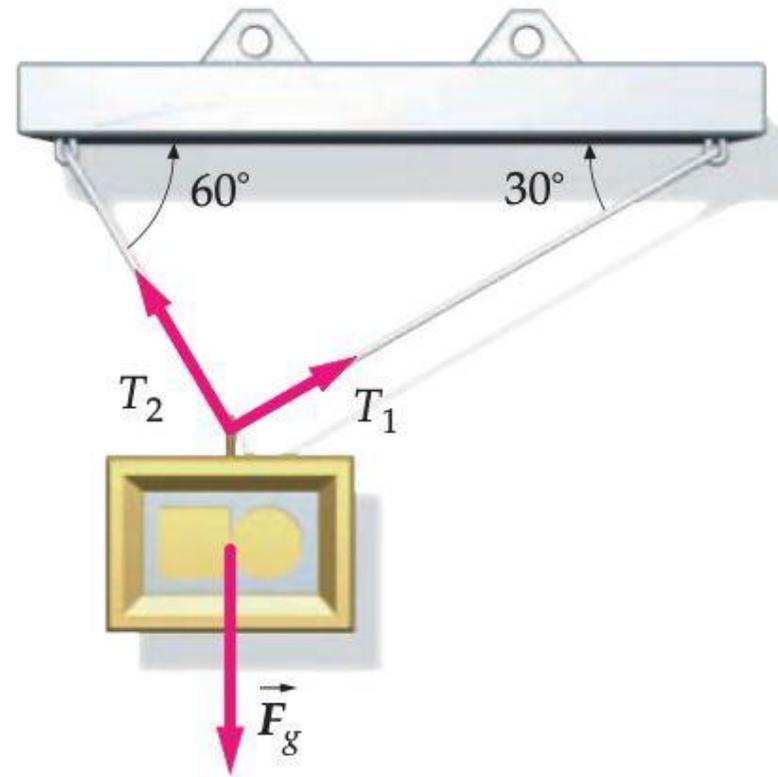
$$\sum F_y = F_n - mg + F \sin \theta = 0$$

$$F_n = mg - F \sin \theta$$

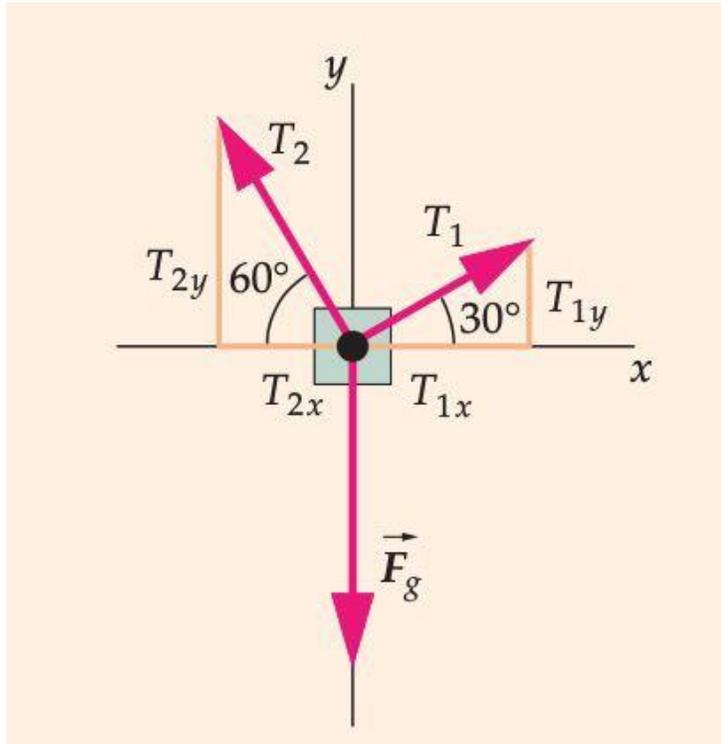
$$= (80 \text{ kg})(9.81 \text{ N/kg}) - (150 \text{ N}) \sin 25^\circ = \boxed{7.2 \times 10^2 \text{ N}}$$

Leis de Newton: exemplo 3

Um quadro pesando 8.0N é suportado por dois fios com as tensões T_1 e T_2 , como mostra abaixo. Encontre cada tensão.



Leis de Newton: exemplo 3



substituindo (c) em (b)

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_g = m\vec{a}$$

$$T_{1x} + T_{2x} + F_{gx} = 0$$

(a) $T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 60^\circ + 0 = 0$ and

$$T_{1y} + T_{2y} + F_{gy} = 0$$

(b) $T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 60^\circ - F_g = 0$

(c) $T_2 = T_1 \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ}$ ← isolando T_2 de (a)

$$T_1 \sin 30^\circ + \left(T_1 \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} \right) \sin 60^\circ - F_g = 0$$

$$T_1 = 0.50 F_g = \boxed{4.0 \text{ N}}$$

$$T_2 = T_1 \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = \boxed{6.9 \text{ N}}$$

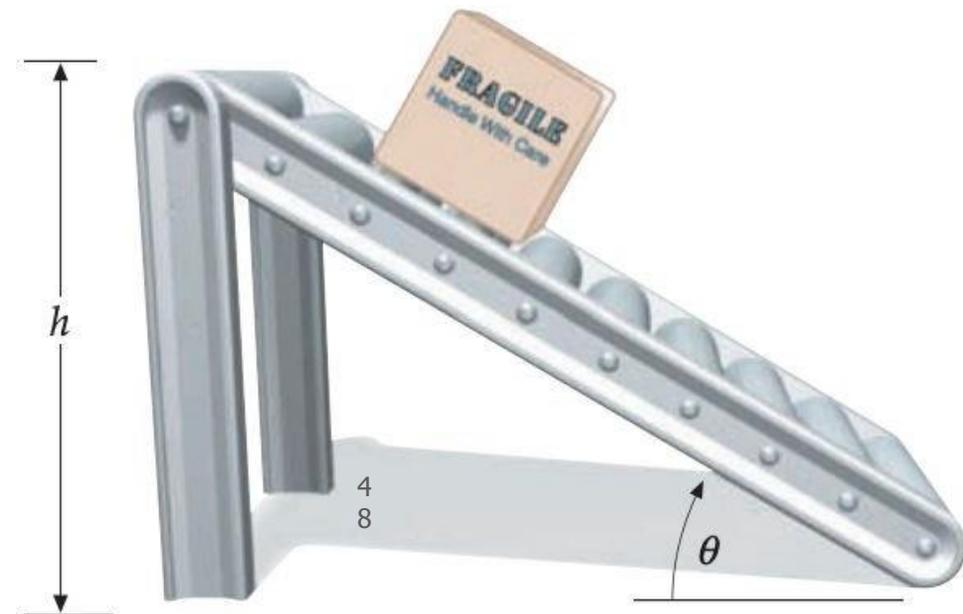
Leis de Newton: exemplo 4

Você está trabalhando para uma grande empresa de entrega e precisa descarregar uma embalagem grande e frágil do caminhão, usando uma rampa de entrega.

Se a componente descendente (vertical) da velocidade da embalagem quando atingir o fundo da rampa for superior a $2,50 \text{ m/s}$ (equivalente à velocidade que um objeto teria se caísse de uma altura de cerca de 30 cm), o pacote irá quebrar.

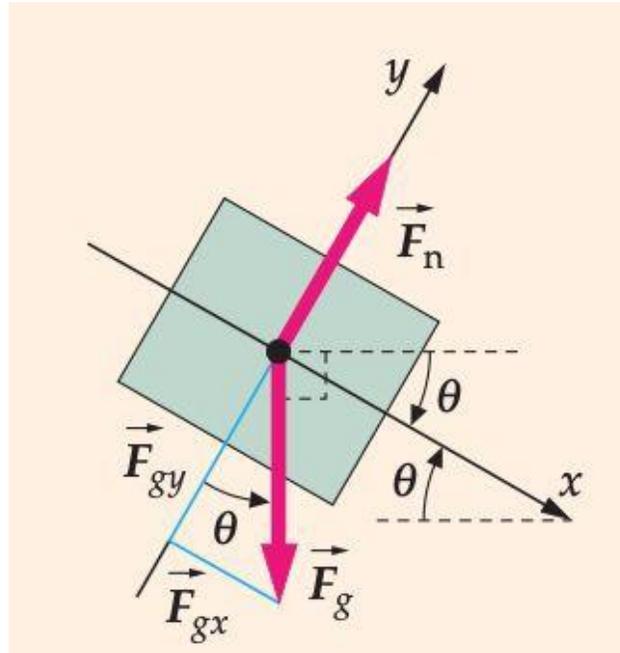
Qual é o maior ângulo em que você pode descarregar a embalagem com segurança?

A rampa tem $1,00 \text{ m}$ de altura, possui rolos (isto é, a rampa é aproximadamente sem atrito) e é inclinada em um ângulo θ em relação à horizontal.



Leis de Newton: exemplo 4

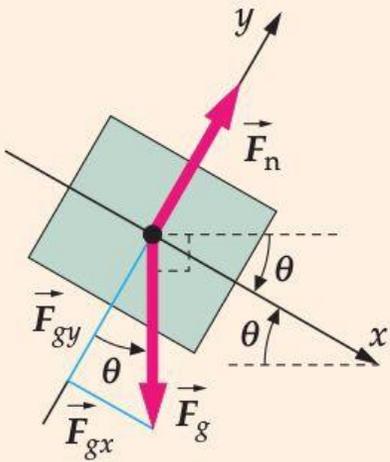
Diagrama de forças:



Note que temos liberdade de escolha de como posicionar o sistema de eixos em cada problema. É conveniente adotarmos um sistema de referência para diminuir a complexidade de cálculos.

Não necessariamente **x** esteja na horizontal e **y** esteja na vertical.
Mas **OBRIGATORIAMENTE** **x** e **y** devem ser perpendiculares

Leis de Newton: exemplo 4



$$F_{nx} + F_{gx} = ma_x$$

$$F_{nx} = 0 \quad F_{gx} = F_g \sin \theta = mg \sin \theta$$

$$0 + mg \sin \theta = ma_x \implies a_x = g \sin \theta$$

$$v_d = v_x \sin \theta \quad (a)$$

$$v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2a_x \Delta x \quad \leftarrow \text{F\u00f3rmula de Torricelli}$$

$$v_x^2 = 2g \sin \theta \Delta x \quad (b)$$

$$(c) \quad \Delta x \sin \theta = h$$

h \u00e9 a altura da rampa

vamos substituir (c) em (b), tirar a raiz quadrada, e depois usar o resultado em (a)

$$v_d = \sqrt{2gh \sin \theta} \quad v_d \text{ pode ser no m\u00e1ximo } 2.50 \text{ m/s}$$

$$2.50 \text{ m/s} = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(1.00 \text{ m})} \sin \theta_{\max}$$



$$\therefore \theta_{\max} = \boxed{34.4^\circ}$$

Forças de atrito

Se examinarmos a superfície de qualquer objeto, notamos que é irregular apresentando saliências e vales.

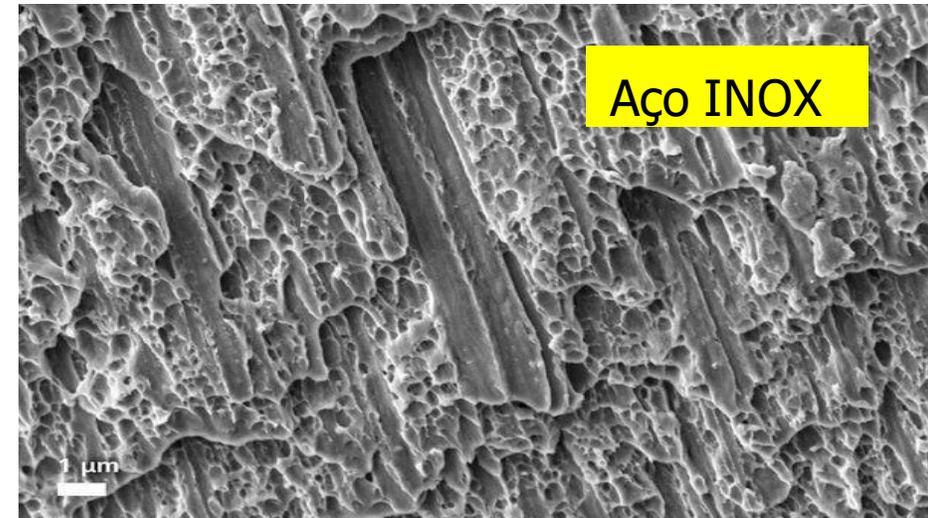
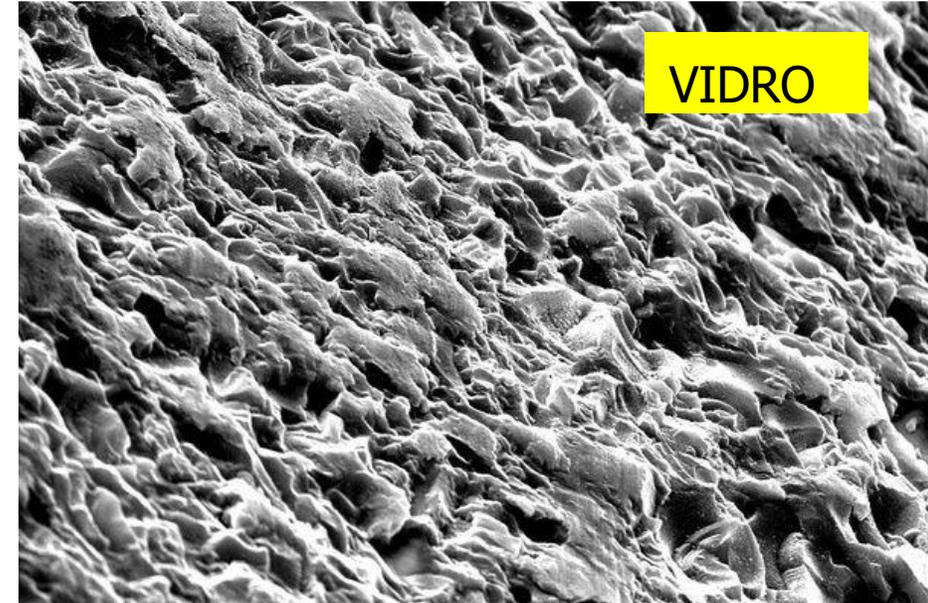
Mesmo superfícies que **parecem** suaves aos olhos mostram essas irregularidades sob exame microscópico.

Quando duas superfícies estão em contato, suas irregularidades se interpenetram

Resultado: há uma resistência ao deslizamento entre as superfícies.

Essa **resistência** é chamada de **atrito**.

Se superfícies em contato devem deslizar e serem movidas uma em relação a outra, uma **força deve ser aplicada para superar o atrito**.



Forças de atrito

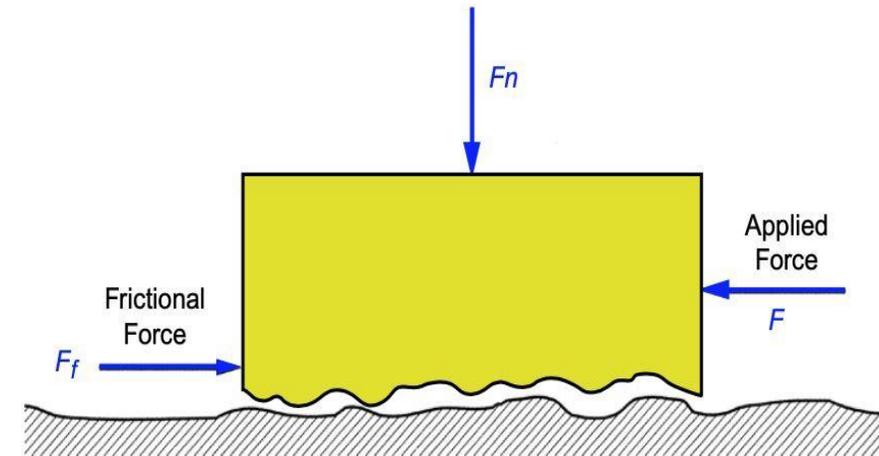
Considere um bloco apoiado em uma superfície, como mostra a Figura.

Se aplicarmos uma força F ao bloco, ele tenderá a se mover.

O contato entre as irregularidades das superfícies produz uma força de reação de atrito F_f : OPOSTA ao movimento.

Para ***mover o objeto*** ao longo da superfície

- ***a força aplicada deve superar a força de atrito.***



Forças de atrito

A **magnitude da força de atrito** F_f *depende da natureza das superfícies*

- quanto mais ásperas as superfícies, maior é a força de atrito.

A propriedade de atrito das superfícies:

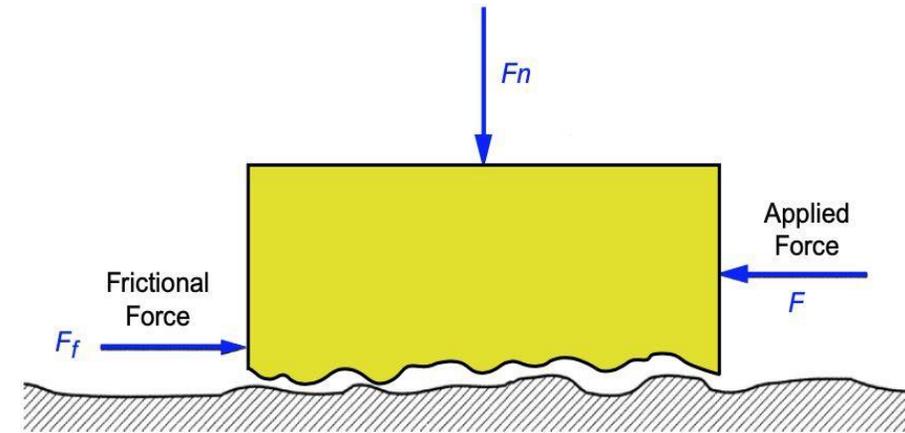
- representada pelo **coeficiente de atrito** μ .

A **magnitude da força de atrito** F_f *também depende da força normal* F_n

F_n é perpendicular às superfícies e pressiona uma contra a outra.

Na Figura, a força F_n depende do peso W do bloco ($W = mg$). Em casos mais gerais, é obtida pela resultante das forças perpendiculares à superfície de contato (respeitando a 3a. Lei de Newton).

- F_n *determina até que ponto as irregularidades são interpostas.*



Forças de atrito

A força de atrito F_f é dada por

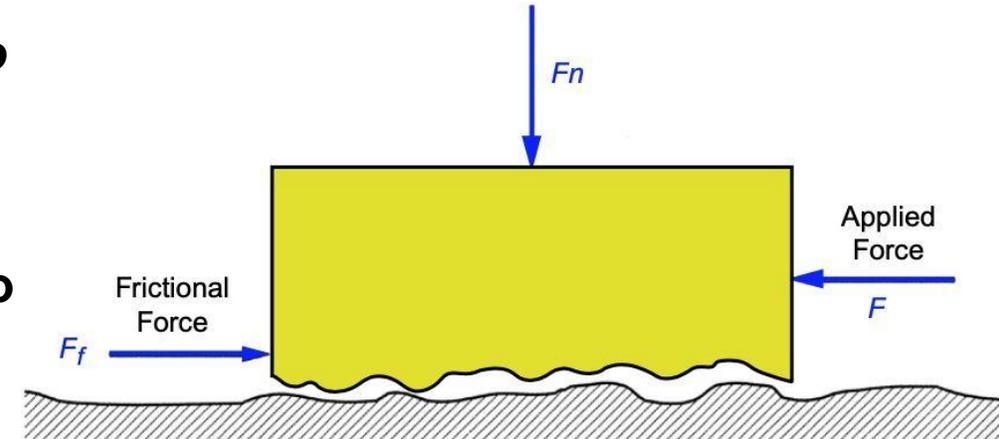
$$F_f = \mu F_n$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

- **A força de atrito é sempre paralela e atua no sentido contrário à força que provoca o deslizamento**

Existe uma distinção entre:

- a força de atrito que atua sobre o objeto em **movimento**
 - **força de atrito cinética**
- a força de atrito que atua sobre o objeto quando está **estacionário**.
 - **força de atrito estática**



A força de atrito cinética é: $F_f = \mu_k \cdot N$
 μ_k é coeficiente de atrito cinético

A força de atrito estática é: $F_f = \mu_s \cdot N$
 μ_s é coeficiente de atrito estático

Forças de atrito

Em geral, é necessária uma força maior para iniciar o movimento do objeto contra uma força de atrito (atrito estático) do que mantê-lo em movimento (atrito cinético).

Isso não é surpreendente, porque no caso estacionário as irregularidades das duas superfícies podem se emaranhar mais profundamente uma na outra.

OBSERVAÇÃO:

- A força que deve ser aplicada a um objeto para ***iniciar seu movimento*** é

$$\mathbf{F}_f = \mu_s \cdot \mathbf{N}$$

Esta é a magnitude da força de atrito estática máxima.

- A força que deve ser aplicada a um objeto para ***mantê-lo*** em movimento é

$$\mathbf{F}_f = \mu_k \cdot \mathbf{N}$$

- **Para pensar:** Na nossa discussão, uma vez colocado em movimento, posso retirar a força do objeto e ele permanecerá com velocidade constante?

Forças de atrito

A magnitude da força de atrito F_f **não depende** do tamanho **da área de contato**.

- Se a área de contato S da superfície for aumentada:
 - A força por unidade de área (pressão) diminui e isso reduz a interpenetração das irregularidades.
 - Ao mesmo tempo, o número de irregularidades cresce proporcionalmente a S .
 - Resultado: a **força de atrito total permanece inalterada**.

Os coeficientes de atrito estático e cinético entre algumas superfícies são mostrados na Tabela ao lado.

Coeficientes de atrito são adimensionais.

Fica claro que **o coeficiente de atrito estático** para duas superfícies dadas é um pouco **maior** que o **coeficiente de atrito cinético**.

Obs.: Na tabela os coeficientes estático e cinético estão com índices E e C respectivamente

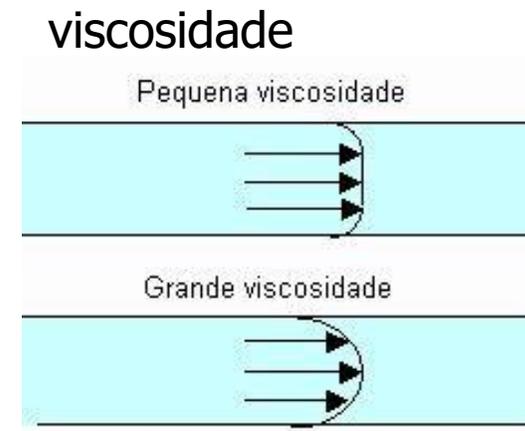
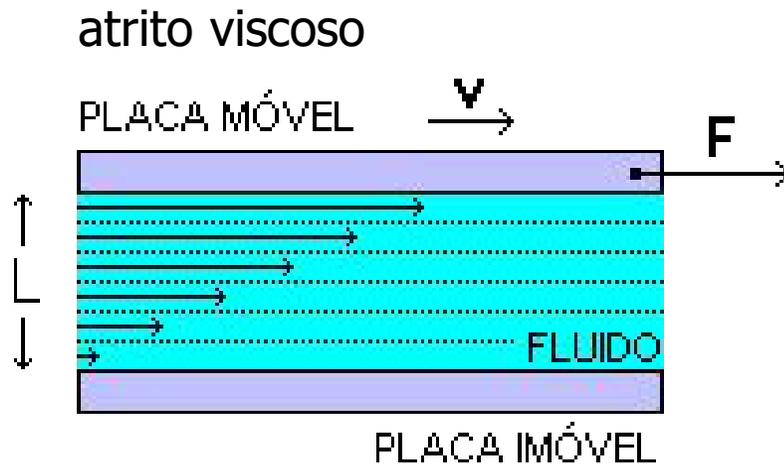
SUPERFÍCIE EM CONTATO	μ_E	μ_C
Borracha sobre concreto	1,0	0,8
Madeira sobre madeira	0,4	0,2
Articulações dos ossos humanos	0,01	0,003
Vidro sobre vidro	0,94	0,4

Forças de atrito

Discutimos até agora o *conceito de atrito entre superfícies*, deslizando umas sobre as outras.

- **Forças de atrito** são encontradas também nos fluxos **de fluidos**: *atrito viscoso* → *viscosidade*
 - O atrito viscoso desempenha um papel importante no fluxo de sangue e outros fluidos biológicos.

- **Atrito deslizante de superfícies: independe da velocidade**
- **Atrito em fluidos - atrito viscoso: forte dependência da velocidade.**



Forças de atrito

Aspectos qualitativos EXTREMAMENTE IMPORTANTES das forças de atrito:

O atrito está em toda parte ao nosso redor.

- É um incômodo: O atrito também produz desgaste indesejável e aquecimento destrutivo das superfícies de contato.

simultaneamente...

- um fator indispensável: sem ele nenhum animal se moveria.
 - i) Sem atrito, um objeto que é colocado em movimento continuaria a se mover para sempre (primeira lei de Newton). A menor força nos colocaria em movimento eterno.
 - ii) *É a força de atrito que dissipa energia* cinética em calor, interrompendo o movimento dos objetos.

A natureza (e os cientistas...) tentam **maximizar o atrito onde é necessário** e **minimizá-lo onde é destrutivo**.

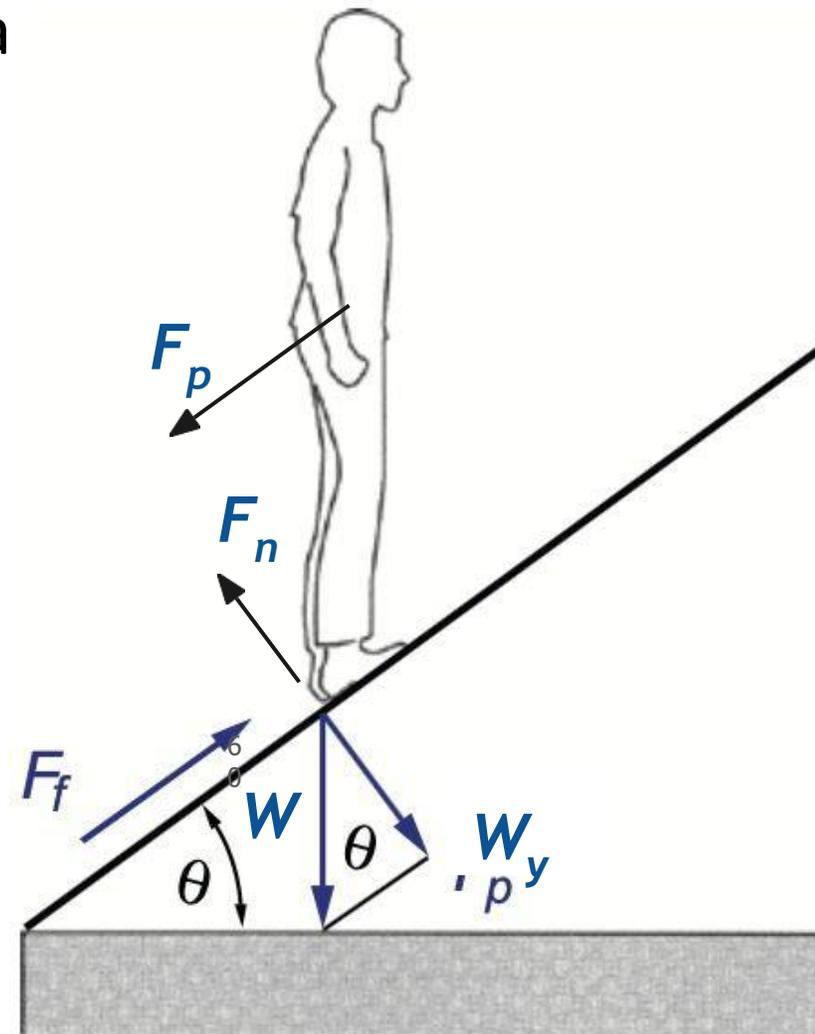
Forças de atrito: lubrificantes

- O atrito é bastante reduzido com a introdução de um fluido lubrificante (como óleo) na interface de duas superfícies.
 - O fluido preenche as irregularidades e, portanto, suaviza as superfícies.
- Um exemplo natural dessa lubrificação ocorre nas articulações dos animais, que são lubrificadas pelo fluido sinovial.
 - Este lubrificante reduz o coeficiente de atrito em cerca de um fator de 100. A natureza fornece uma *eficiente* lubrificação das juntas.

Exemplo: ângulo de deslizamento

- Veja a Figura. Vamos calcular **o ângulo máximo de inclinação θ** de uma tábua de madeira sobre a qual uma pessoa em pé ***sem deslizar para baixo***.

Suponha que a pessoa esteja usando sapatos com sola de couro e que ela esteja na posição vertical, como mostrado na figura. O coeficiente de atrito estático madeira-couro é $\mu_s = 0,6$



Exemplo: ângulo de deslizamento

A força F_n normal à superfície inclinada é

$$F_n = W \cos \theta$$

A força de atrito estática F_f é

$$F_f = \mu F_n = \mu_s W \cos \theta = 0.6 W \cos \theta$$

A força paralela à superfície F_p , que tende a causar o deslizamento da pessoa para baixo, é

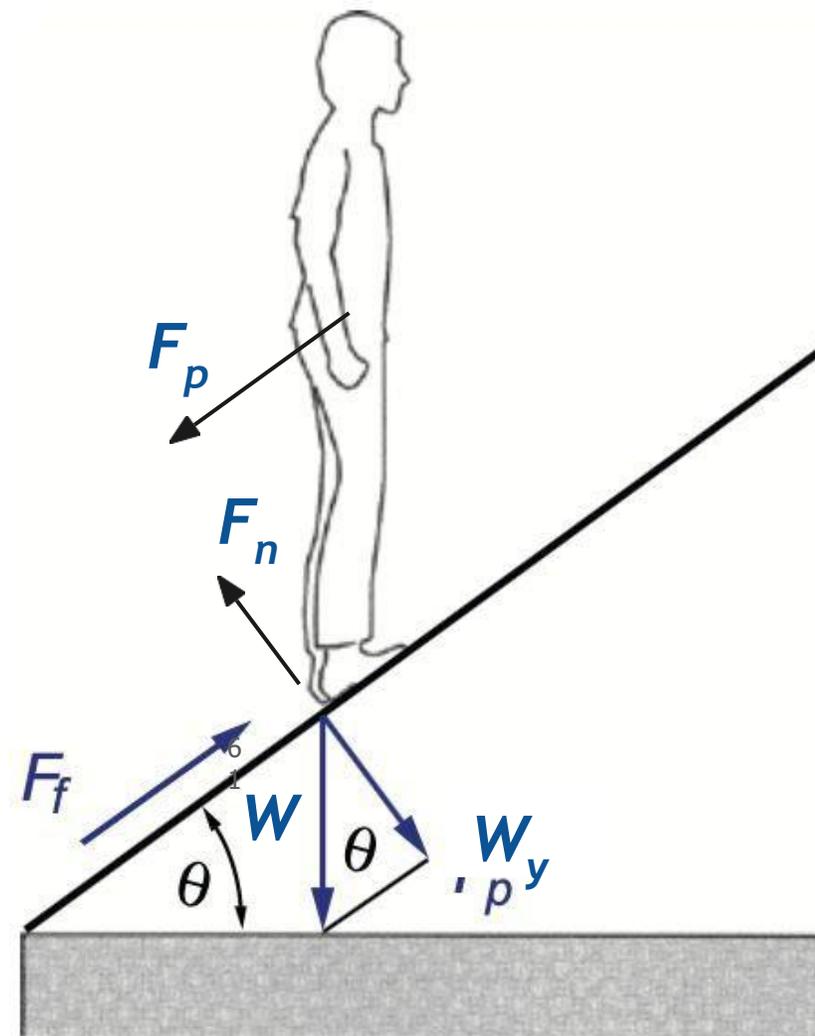
$$F_p = W \sin \theta$$

A pessoa deslizará quando $F_p > F_f$.

No *limiar* de deslizamento $F_f = F_p \Rightarrow 0.6 W \cos \theta = W \sin \theta$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = 0.6$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 31^\circ}$$



Exemplo: arrastando toras de madeira

Um menino deseja deslocar uma tora de madeira sobre o chão puxando uma corda amarrada a ela, como na figura abaixo. Sabendo-se que o coeficiente de atrito estático entre a madeira e a terra vale 0,3 e que a massa da tora é de 30 kg, com que força o menino deve puxar a corda para deslocar a tora se a direção da corda forma, em relação a horizontal, um ângulo de 45° ?



Prof.Dr. Edmilson J.T. Manganote

Movimento através do ar: força de arraste

- Em muitos casos, o efeito da resistência do ar no movimento de objetos não é um efeito desprezível.
- Quando um objeto se move através do ar, as moléculas do ar precisam ser "empurradas" para fora do caminho do objeto.
- A força de reação resultante empurra o objeto para trás e retarda seu movimento:
 - Essa é a fonte de atrito no ar.
- Algumas simples considerações sobre o atrito do ar:
Experimento: colocar a mão do lado de fora de um carro em movimento.
 - Quanto maior a velocidade em relação ao ar, maior é a força resistiva.
 - Ao girar a mão, observamos que a força é maior quando as palmas das mãos estão voltadas para a direção do movimento
⇒ Concluimos, portanto, que a força resistiva aumenta com a velocidade e a área da superfície na direção do movimento.

Movimento através do ar: força de arraste

Verifica-se que força **F_a** *devida à resistência do ar* pode ser escrita (aproximadamente) como:

$$F_a = C A v^2$$

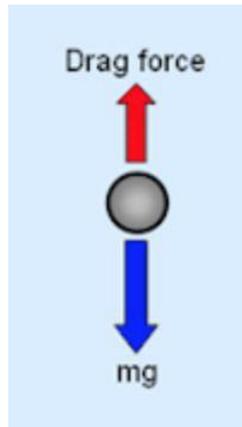
onde v é a velocidade do objeto em relação ao ar, A é a área voltada para a direção do movimento, e C é o coeficiente de atrito do ar.

- O coeficiente C , em geral, depende da forma do objeto.
 - Em nossos cálculos, usaremos o valor **$C = 0,88 \text{ kg / m}$** .

Por causa da resistência do ar, existem duas forças atuando em um corpo em queda:

- 1) a força descendente da gravidade W
- 2) e a força ascendente da resistência do ar (arraste).

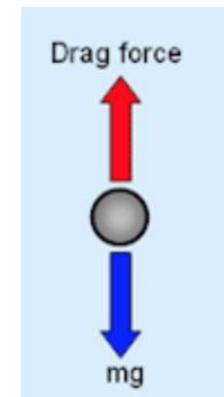
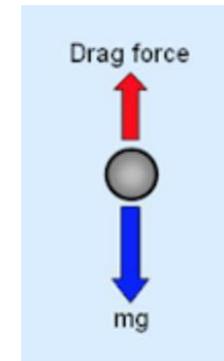
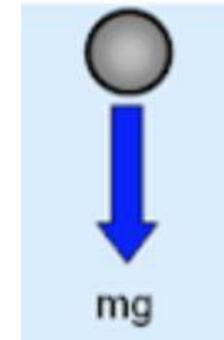
A partir da segunda lei de Newton: $W - F_a = ma$



Força de arraste: dependência com a velocidade

$$F_a = C A v^2$$

- Quando o corpo começa a cair, sua velocidade é zero.
 - única força que age sobre ele é o peso
- À medida que o corpo ganha velocidade, a força da resistência do ar aumenta (depende de v) e a força resultante diminui, e com ela, a aceleração.
- Se o corpo cai de uma altura suficientemente grande, a velocidade atinge uma magnitude tal que a força devida à resistência do ar é igual ao peso.
 - **Após esse ponto**, o corpo não é mais acelerado e continua a cair a uma **velocidade constante**: velocidade terminal v_t .



Força de arraste: dependência com a velocidade

A força \mathbf{F}_a no corpo não é constante (depende da velocidade!), a solução de problemas com esse tipo de força não pode ser obtida por técnicas algébricas simples.

No entanto, a velocidade terminal pode ser obtida:

- Na velocidade terminal, a força descendente da gravidade é cancelada pela força ascendente de arraste, e a aceleração do corpo é zero:

$$W - F_a = 0 \implies F_a = W$$

- Usando

$$F_a = CAv^2$$

- Finalmente temos:

$$v_t = \sqrt{\frac{W}{CA}}$$

Força de arraste: dependência com a velocidade

A partir desta equação, a velocidade terminal de uma pessoa em queda com massa de 70 kg e uma área efetiva de $A = 0,2 \text{ m}^2$ é:

$$v_t = \sqrt{\frac{W}{CA}} = \sqrt{\frac{70 \times 9.8}{0.88 \times 0.2}} = 62.4 \text{ m/sec}$$

Força de arraste: dependência com a velocidade

A velocidade terminal de objetos de tamanhos diferentes, com densidade e forma semelhantes, é proporcional à raiz quadrada do tamanho linear dos objetos \sqrt{L}

Argumento: O peso de um objeto é proporcional ao volume, que por sua vez é proporcional ao cubo da dimensão linear L do objeto: $W \propto L^3$

A área é proporcional a L^2 . Portanto, a velocidade terminal é $v_t \propto \sqrt{\frac{W}{A}} = \sqrt{\frac{L^3}{L^2}} = \sqrt{L}$

Este resultado tem implicações interessantes na capacidade dos animais sobreviverem a uma queda...

Força de arraste: dependência com a velocidade

Com o treinamento adequado, uma pessoa pode pular de uma altura de cerca de 10m sem sofrer ferimentos graves.

Saltando desta altura, a velocidade ao atingir o solo é:

$$v = \sqrt{2gs} = 14 \text{ m/s}$$

Hipótese: vamos admitir por hora que v , acima, é a velocidade com que qualquer animal pode atingir o chão sem ferimentos.

A essa velocidade, a força da resistência do ar em um animal do tamanho de um homem é desprezível em comparação com o peso.

No caso de pequenos animais, existe uma desaceleração considerável pelo atrito do ar nessa velocidade.

Ex.: Uma velocidade de 8,6 m/s é a velocidade terminal de um besouro de 1 cm. Uma criatura tão pequena pode cair de qualquer altura sem ferimentos.

Dinâmica: forças \rightarrow movimento

Até agora vimos: forças \rightarrow movimento

analisamos casos cujo tipo de movimento era o deslocamento em uma determinada direção:

TRANSLAÇÃO

Qual outro tipo de movimento que a resultante de um conjunto de forças pode provocar?

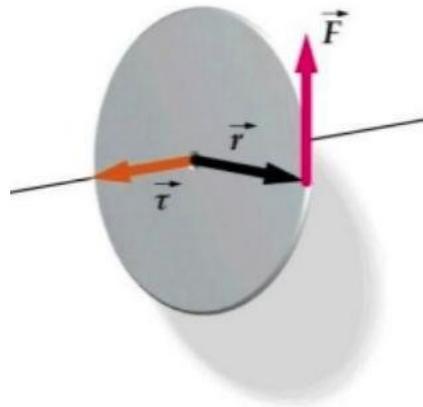
ROTAÇÃO

70

Rotações: torque

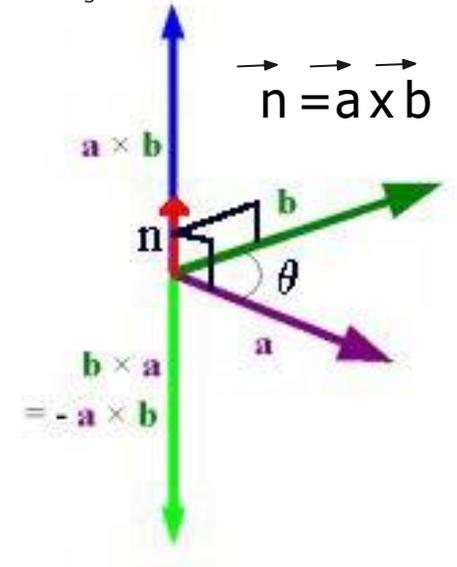
Torque, ou momento de uma força, é a tendência que uma força tem de rotacionar um corpo sobre o qual ela é aplicada. O torque é um vetor perpendicular ao plano formado pelos vetores raio de rotação e força.

O vetor torque pode ser calculado por meio do produto vetorial entre a distância e a força



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = r F \sin \theta$$

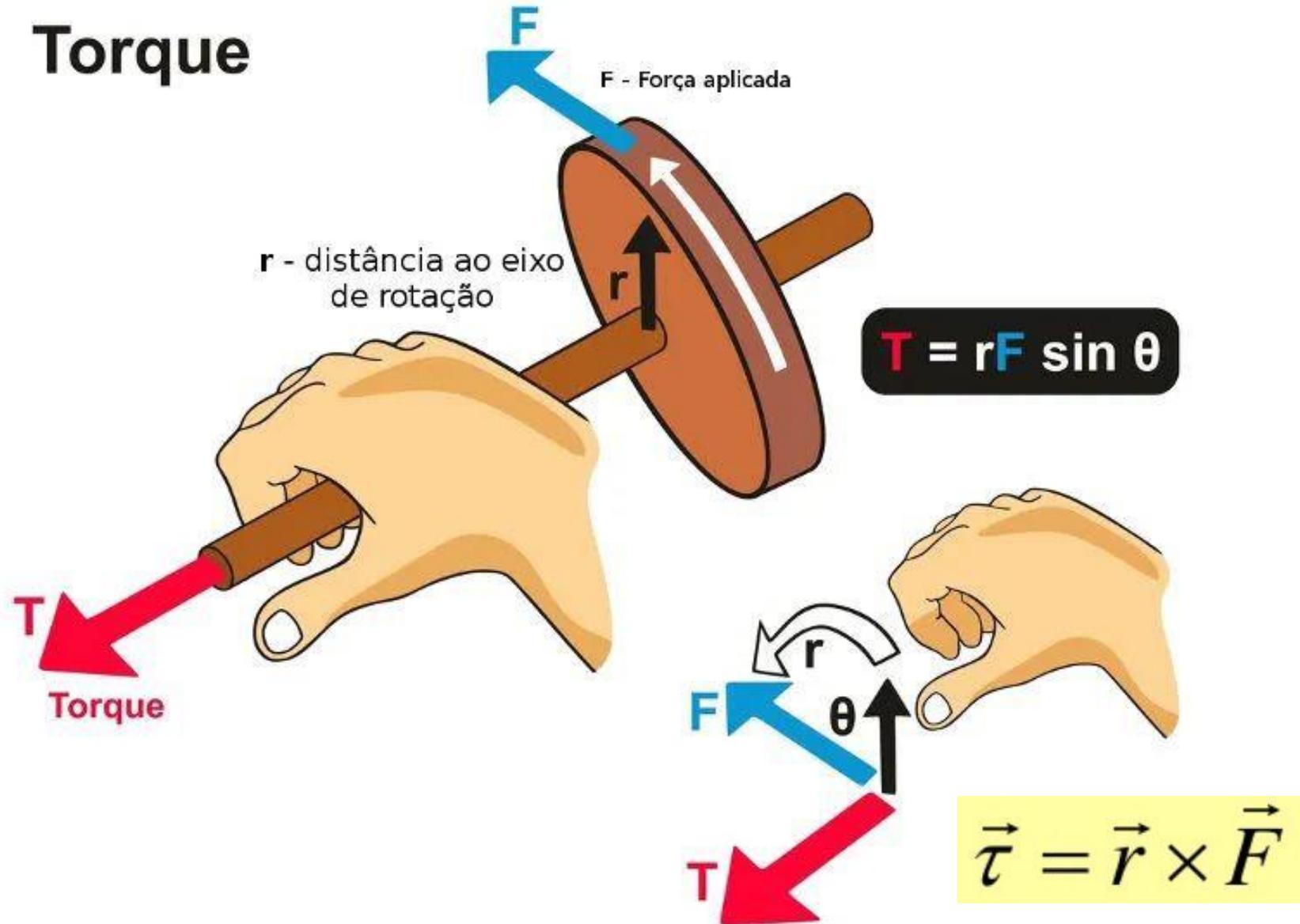


O torque pode ser entendido como o agente dinâmico das rotações. Dessa forma, ele está para os movimentos de rotação, assim como a força está para os movimentos de translação. Se quisermos fazer com que um corpo gire em torno de algum ponto, devemos aplicar um torque sobre ele.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:
"girar", pressupõe um ponto de referência em torno do qual o objeto gira.
Esse ponto é o **EIXO DE ROTAÇÃO**

VETOR Torque: resumo

Torque



Rotações: torque

A única contribuição efetiva de qualquer força para provocar rotações, ou seja, o torque τ , é a **componente perpendicular** com a linha que liga o ponto de aplicação da força e o eixo de rotação

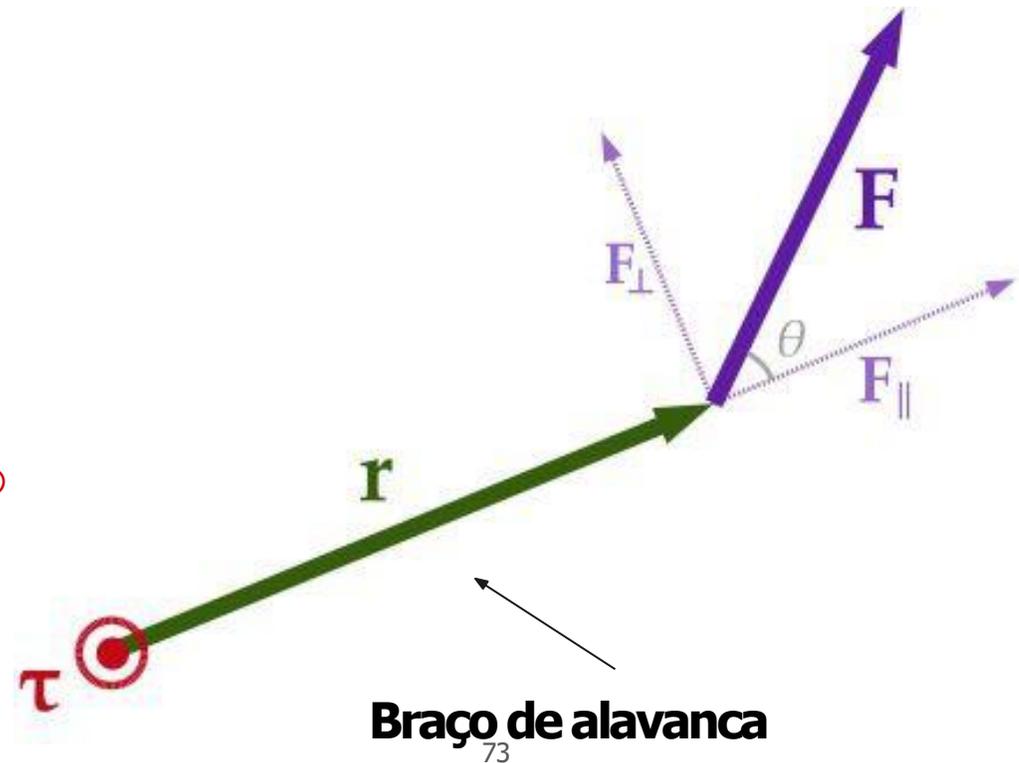
A distância r entre a força e o eixo de rotação se chama "**braço de alavanca**".

Qualquer força cuja linha de ação **passe pelo eixo de rotação** tem **torque NULO**.

Ou seja, se

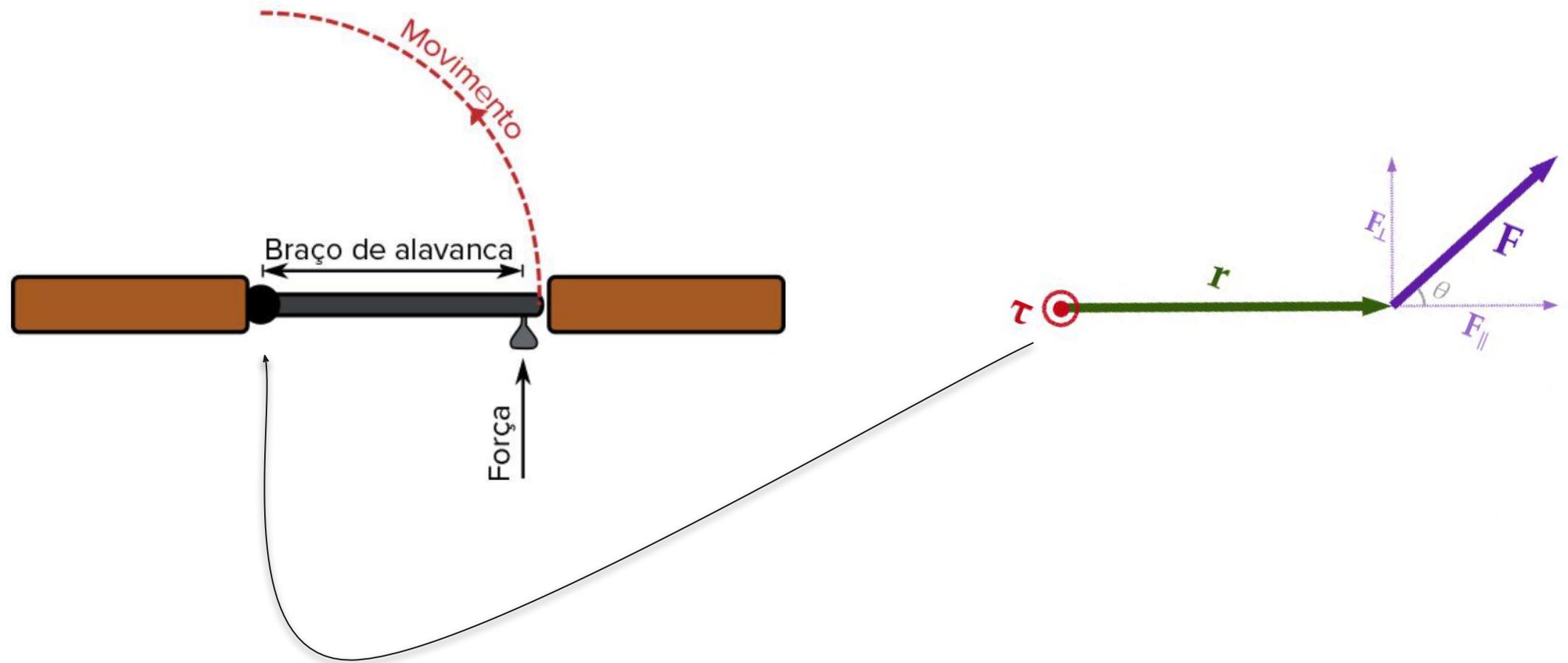
$$r = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

$$F_{\parallel} \Rightarrow \tau = 0$$



Rotações: torque

Exemplo bastante ilustrativo: uma PORTA



Rotações: condição de equilíbrio

Se a soma de todos os torques aplicados em um objeto for nula, o objeto não gira.

Condição de equilíbrio de rotação

$$\tau_{res} = \sum_{i=1}^n \tau_i = \mathbf{0}$$

Condição de equilíbrio estático generalizada

Para um objeto não se deslocar (translações): a soma resultante de todas as forças externas tem que ser nula (2a. Lei de Newton).

$$\sum_{l=1}^N \mathbf{f}_l^{(e)} = \mathbf{0}$$

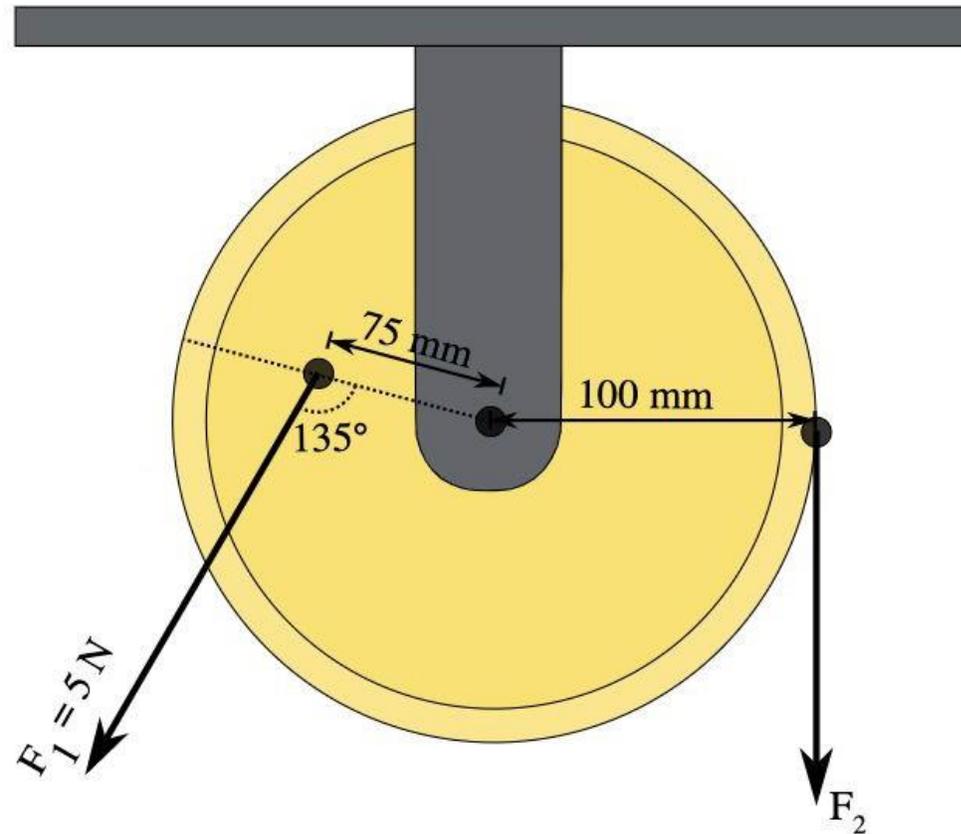
Para o objeto não girar (rotações): a soma de todos os torques aplicados em um objeto tem que ser nula.

Condição de equilíbrio de rotação

$$\tau_{res} = \sum_{i=1}^n \tau_i = \mathbf{0}$$

Rotações: exemplo

Considere a roda mostrada na Figura , onde duas forças atuam. Qual é a força F_2 necessária para que a roda esteja em equilíbrio rotacional?



Solução:

Começamos encontrando o torque τ_1 em função F_1 .

$$\begin{aligned}\tau_1 &= F r \sin(\theta) \\ &= (5 \text{ N}) \cdot (0,075 \text{ m}) \sin(135^\circ) \\ &\simeq +0,265 \text{ Nm}\end{aligned}$$

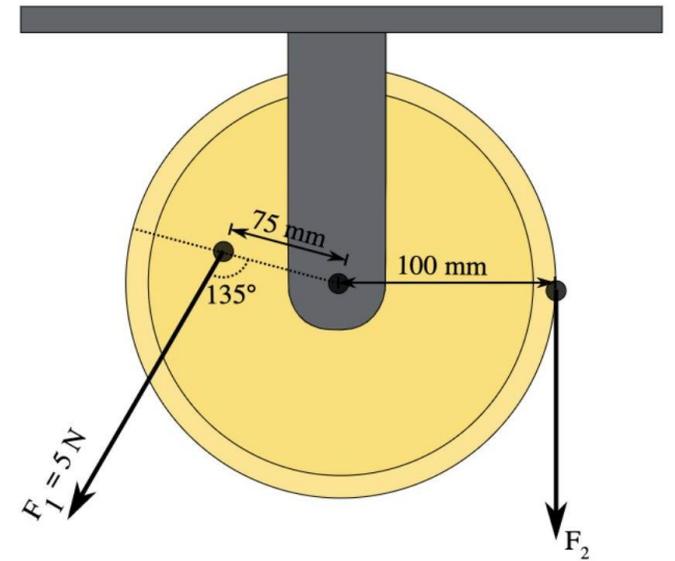
Note que aqui estamos definindo torque positivo no sentido fora da página. Sabemos que em equilíbrio rotacional

$$\tau_1 + \tau_2 = 0$$

então

$$\tau_2 = -F_2 \cdot 0,1 \text{ m} \cdot \sin(90^\circ) \text{ e portanto } F_2 \simeq 2,65 \text{ N}$$

REGRA DA MÃO
DIREITA

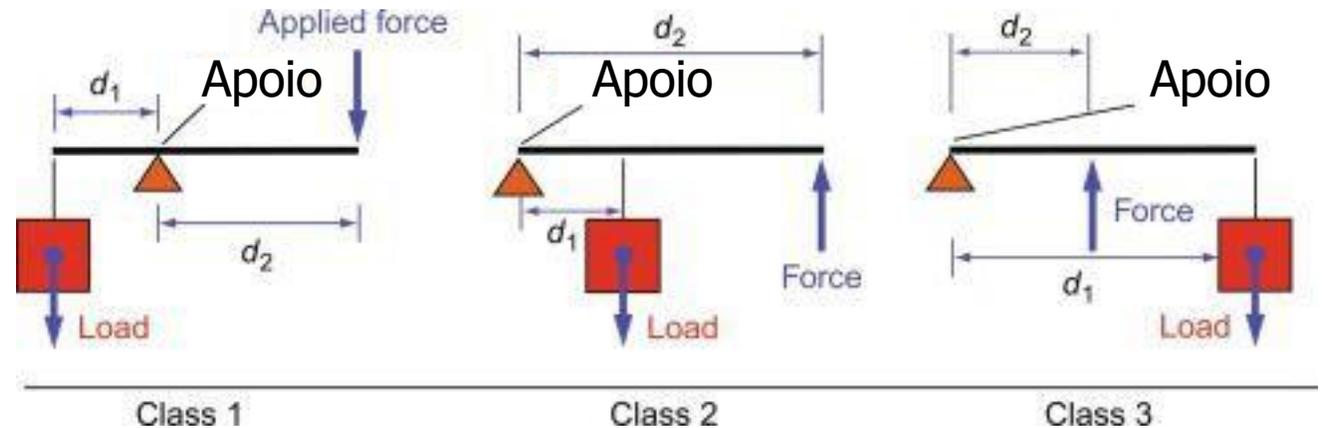


Alavancas

Uma alavanca é uma barra rígida livre para girar em torno de um ponto fixo chamado ponto de apoio.

A posição do ponto de apoio (fulcro) é fixa, de modo que não seja livre o movimento em relação à barra.

As alavancas são usadas para elevar cargas de uma maneira vantajosa e transferir movimentos de um ponto para outro.



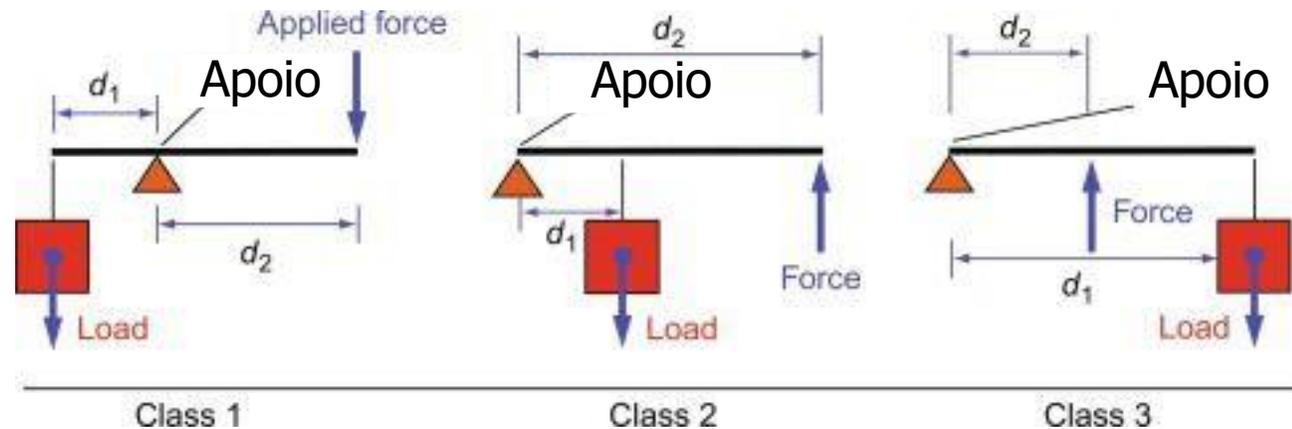
3 classes de alavancas:

Classe 1 (interfixa): o ponto de apoio está localizado entre a força aplicada e a carga. Ex.: pé de cabra

Classe 2 (inter-resistente): o ponto de apoio está em uma extremidade da barra; a força é aplicada na outra extremidade; e a carga está situada no meio. Ex.: carrinho de mão

Classe 3 (interpotente): o ponto de apoio em uma extremidade e a carga na outra. A força é aplicada entre as duas extremidades. Ex.: muitos dos movimentos dos membros dos animais são realizados por alavancas da Classe 3.

Alavancas



Pode ser demonstrado pelas condições de equilíbrio que, para todos os três tipos de alavancas, a força necessária para equilibrar uma carga de peso W é dada por

$$F = \frac{Wd_1}{d_2}$$

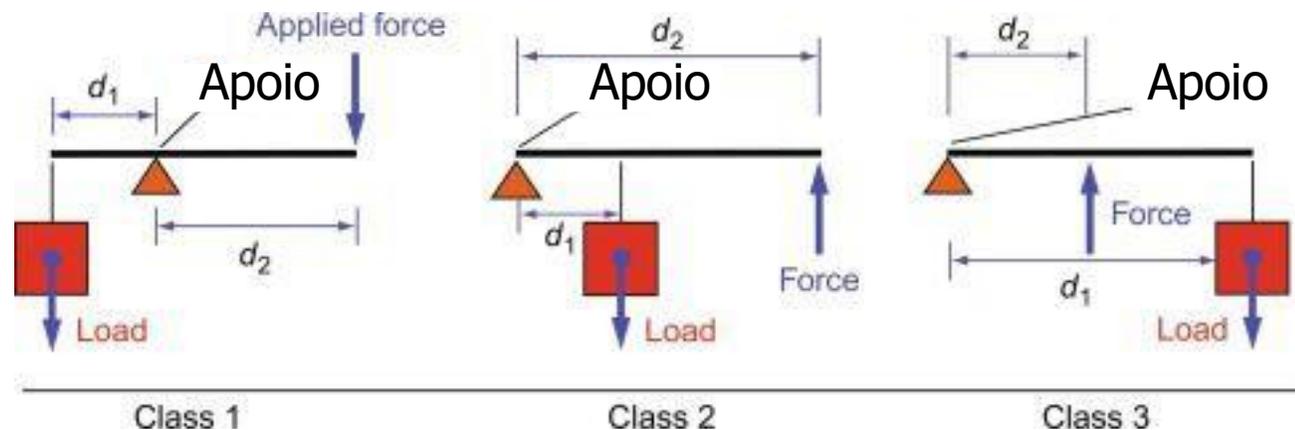
80

d1 : comprimento do braço de **alavanca da CARGA**

d2: comprimento do braço da **alavanca da FORÇA**, conforme mostrado na Figura.

Se **d1 < d2**, a força **F** necessária para equilibrar uma carga **W** é menor que a carga (**F < W**).

Alavancas



A vantagem mecânica M da alavanca é definida como
$$M = \frac{W}{F} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Dependendo das distâncias do ponto de apoio, a vantagem mecânica de uma alavanca de Classe 1 pode ser maior ou menor que 1 $\rightarrow 0 < M < 1$ ou $1 < M$. Colocando a carga próxima ao ponto de apoio, com d_1 muito menor que d_2 , uma grande vantagem mecânica pode ser obtida com uma alavanca de Classe 1.

Em uma alavanca de classe 2, d_1 é sempre menor que d_2 ; portanto, a vantagem mecânica de uma alavanca de classe 2 é sempre maior que 1 $\rightarrow M > 1$

A situação é oposta em uma alavanca de classe 3. Aqui d_1 é maior que d_2 ; portanto, a vantagem mecânica é sempre menor que 1 $\rightarrow M < 1$