Módulo 04

Física da Fala e da Audição

ONDAS ESTACIONÁRIAS

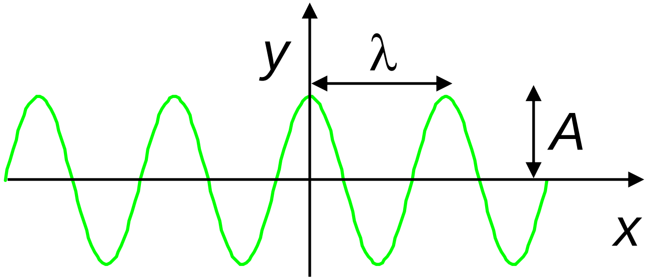
Prof. Edmilson Manganote
Instituto de Física Gleb Wataghin (IFGW)
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
mangano@ifi.unicamp.br

Superposição de ondas

- Resumo de ondas mecânicas
- Superposição de ondas
  - Exemplos
  - Representação matemática
- Interferência
- Batimento
- Ondas estacionárias.

Resumo: onda progressiva

A formula $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$ descreve uma onda harmônica de amplitude *A* se movendo na direção +*x*.



Cada ponto na onda oscila na direção *y* com movimento harmônico simples de frequência angular ω.

O comprimento de onda é: $$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

A velocidade da onda é: $$v = \frac{\omega}{k}$$

A quantidade *k* é chamada "número de onda".

A equação de onda

A equação de onda em 1D

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{k^2}{\omega^2}$$

De fato ela é válida para qualquer tipo de onda

Princípio da superposição

Suponhamos que duas ondas caminham em uma corda

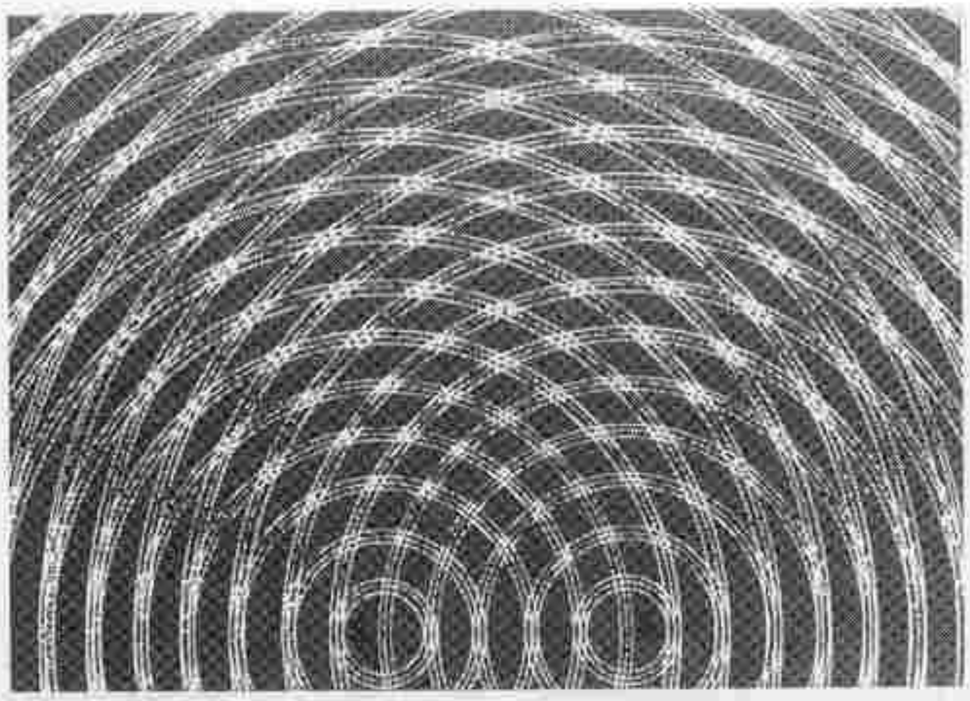
Se $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$

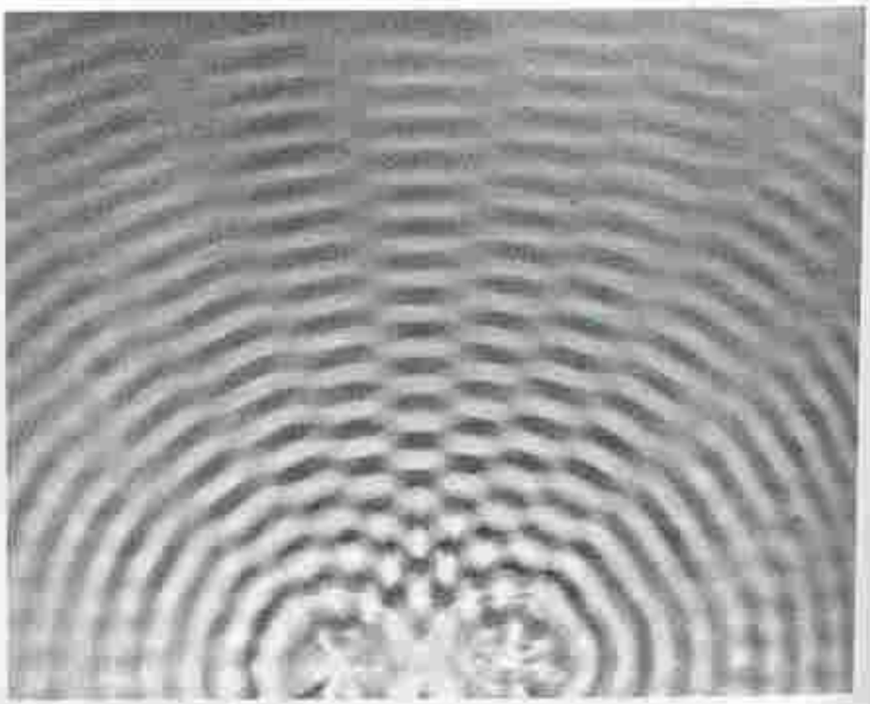
são as ondas que a corda poderia experimentar se cada uma estivesse só, quando as duas ondas atuam simultaneamente, a onda resultante é

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

Este é o princípio da superposição de ondas, consequência direta do fato que a Eq. de onda é uma equação diferencial linear

Interferência

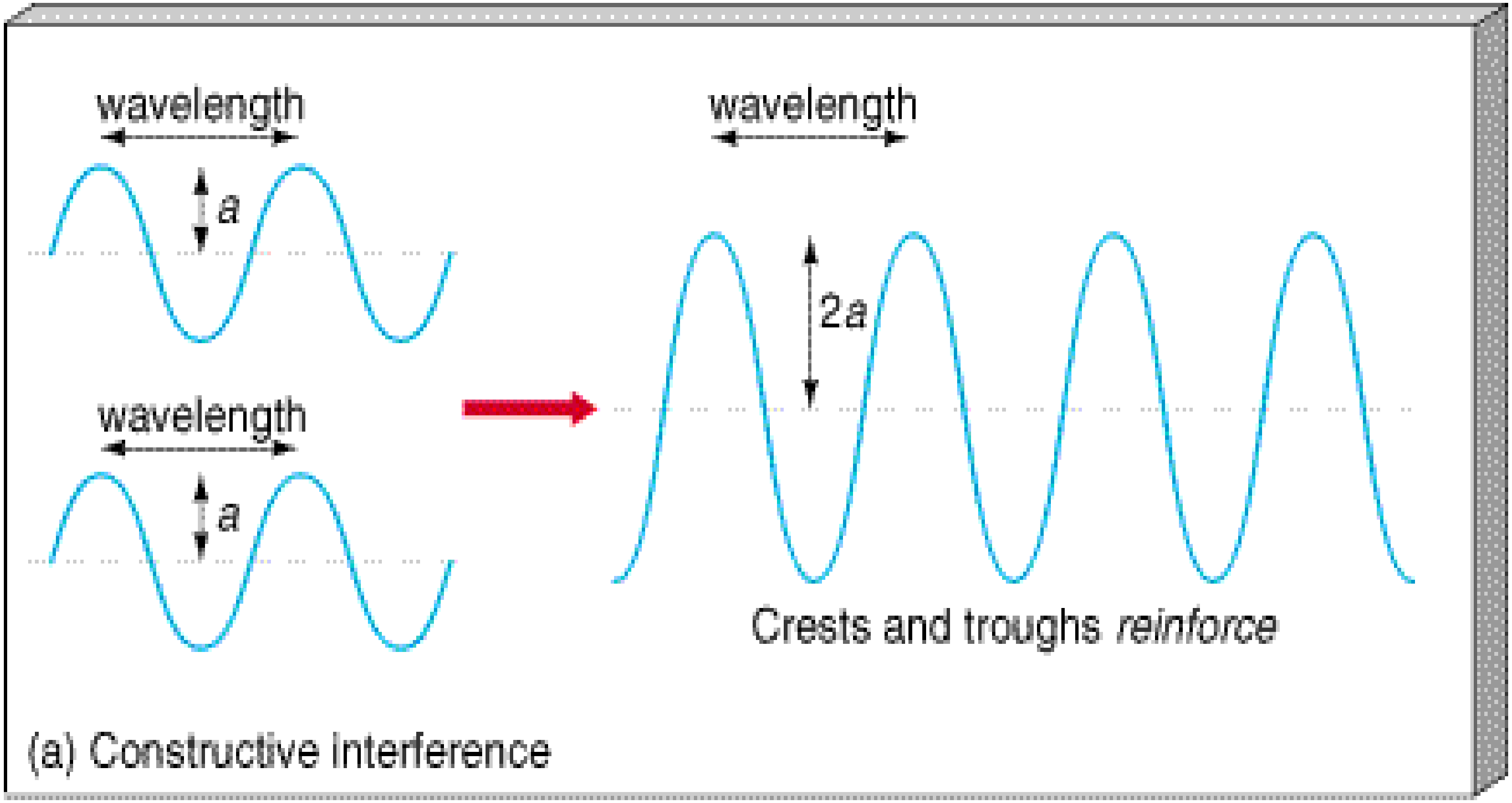




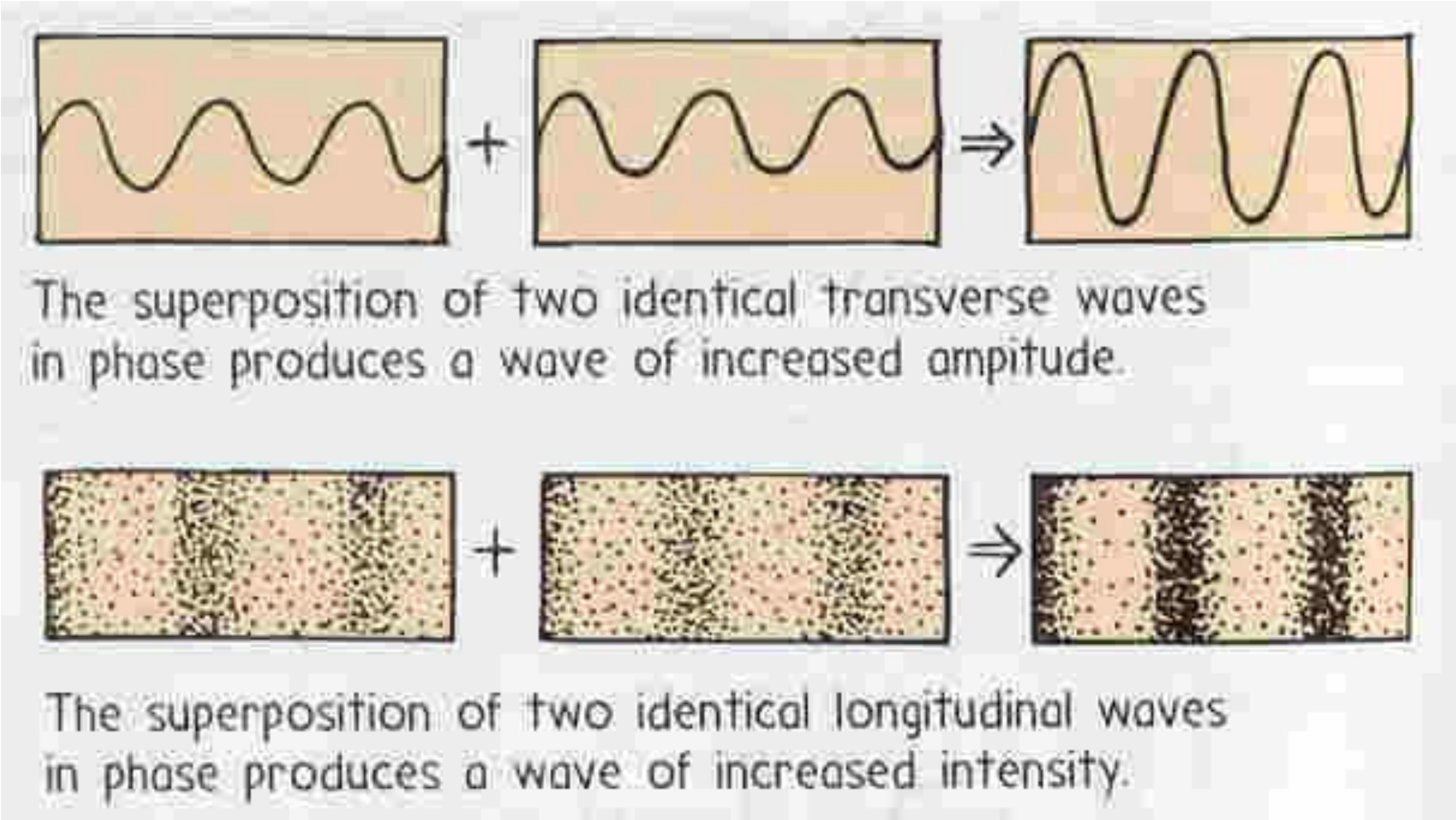
- Ondas de água de duas fontes

Interferência construtiva

- Ondas que se somam sem diferença de fase

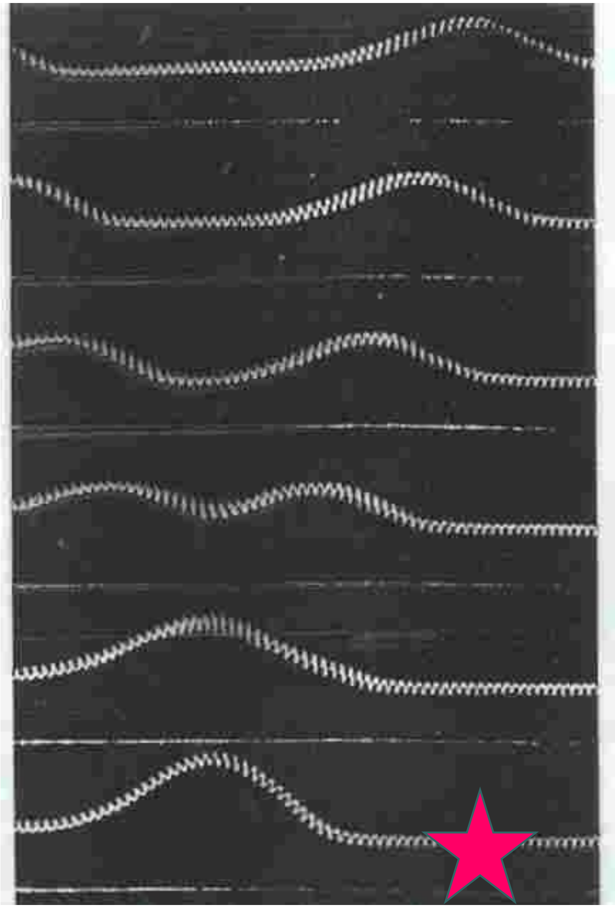


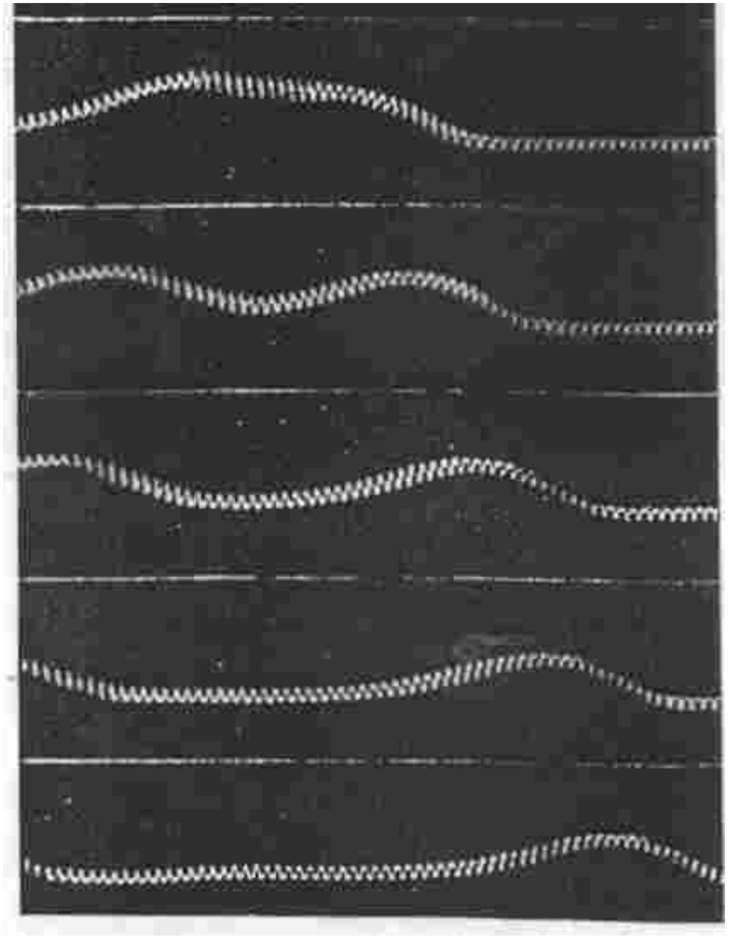
Interferência Construtiva



Interferência construtiva

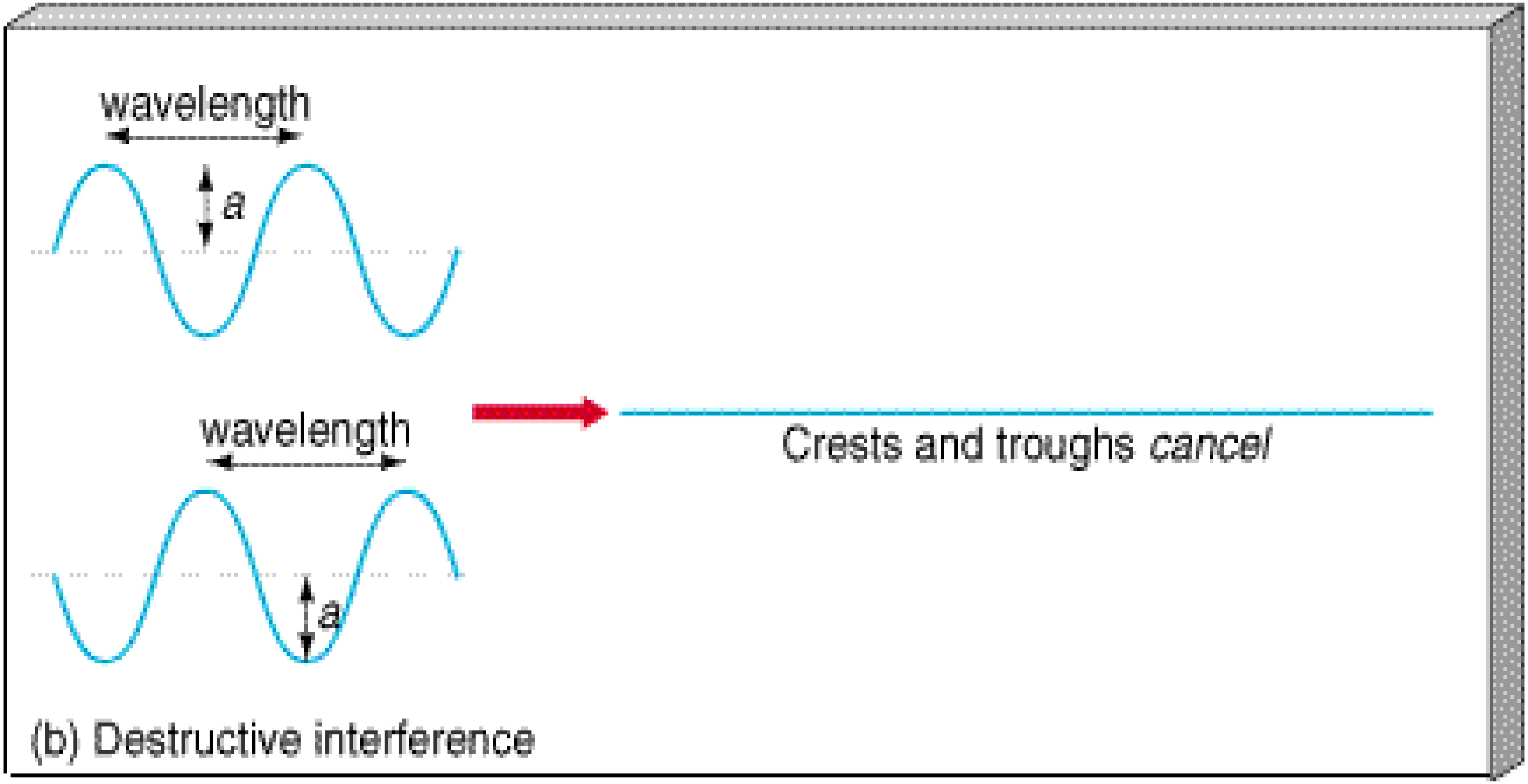
- Quando duas ondas iguais chegam ao mesmo ponto, elas se somam!



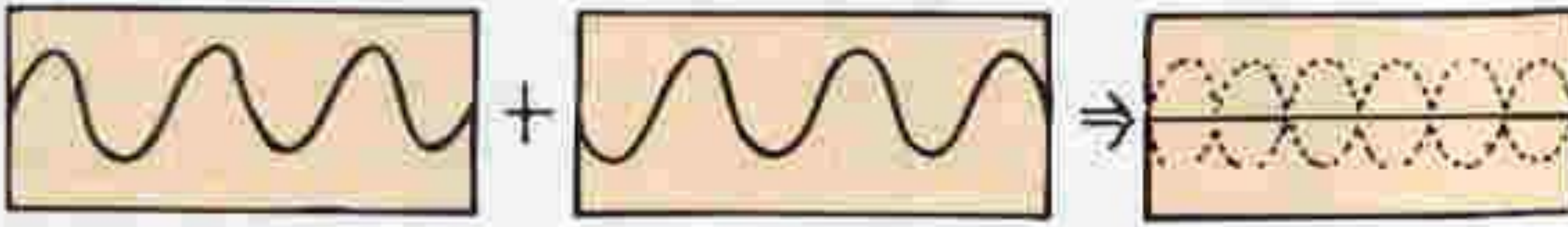


Interferência destrutiva

- Ondas combinantes com uma diferença de ½ comprimento de onda.



Subtração de ondas

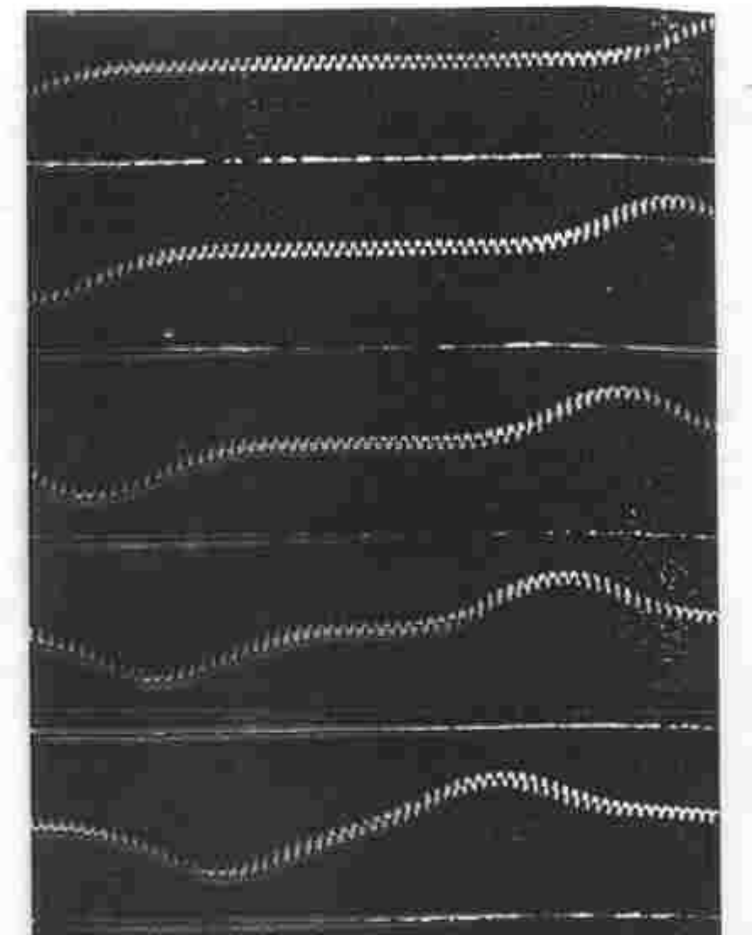


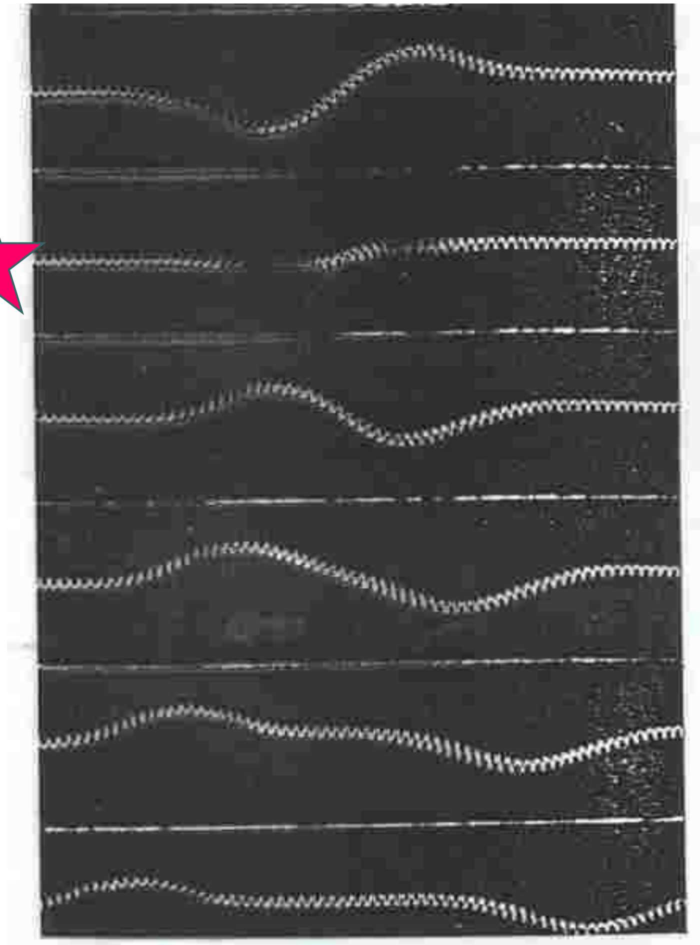
Two identical transverse waves that are out of phase destroy each otherwhen they are superimposed.

Two identical longitudinal waves that are out of phase destroy each other when they are superimposed.

Duas ondas

- Quando os máximos chegam ao mesmo ponto, se cancelam!





http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/viewtopic.php?t=34

Duas ondas

A interferência de duas ondas

$$y_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad y_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) =$$
$$A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx - \omega t + \phi)$$

Onde ϕ é a diferença de fase entre as ondas.

usando $\sin a + \sin b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Duas ondas

amplitude

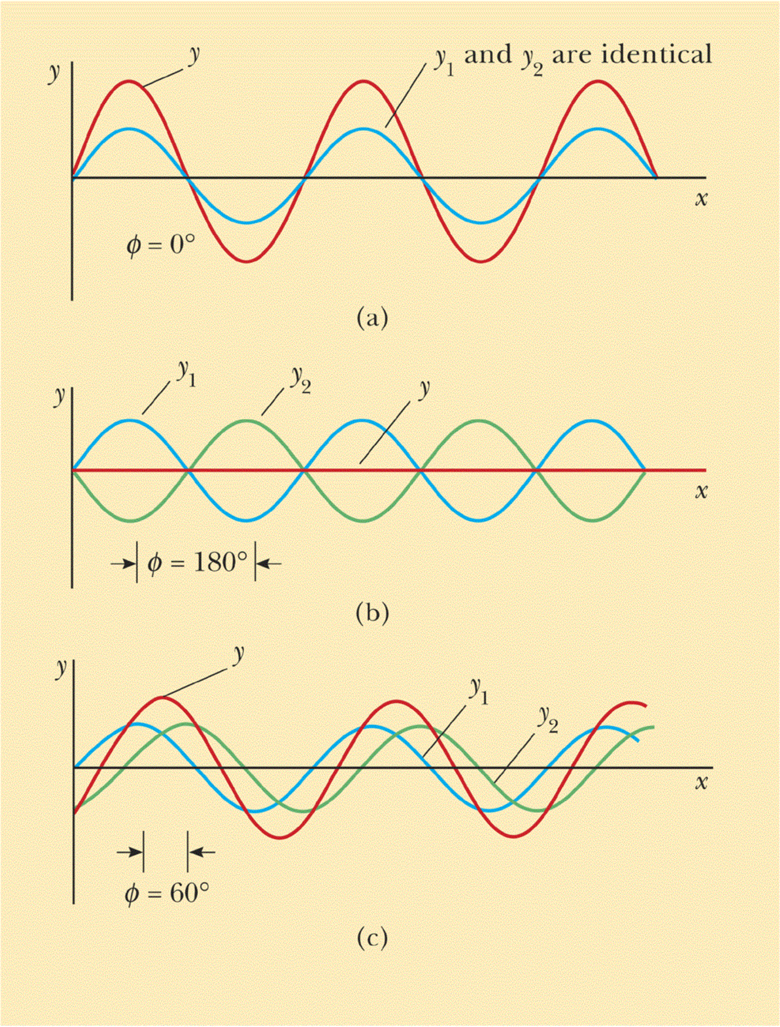
fase

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

Se ϕ = 0, cos 0 = 1 e a amplitude é 2A. **Interferência construtiva**

Se $\phi = \pi$, cos π/2 = 0 e a amplitude é 0. **Interferência destrutiva**

Interferência...

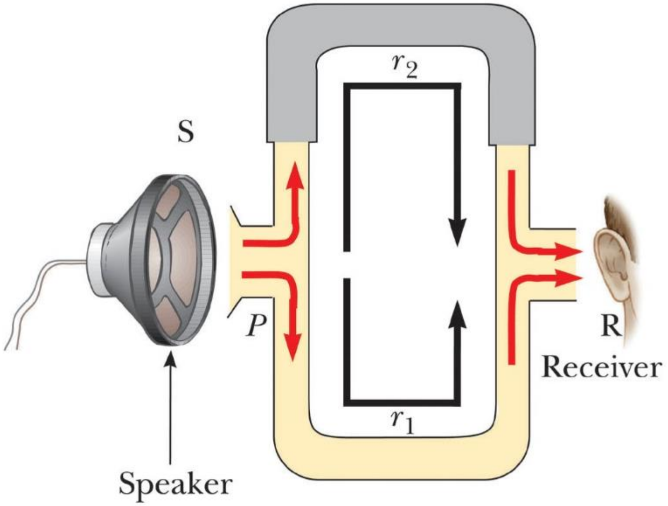


Duas ondas

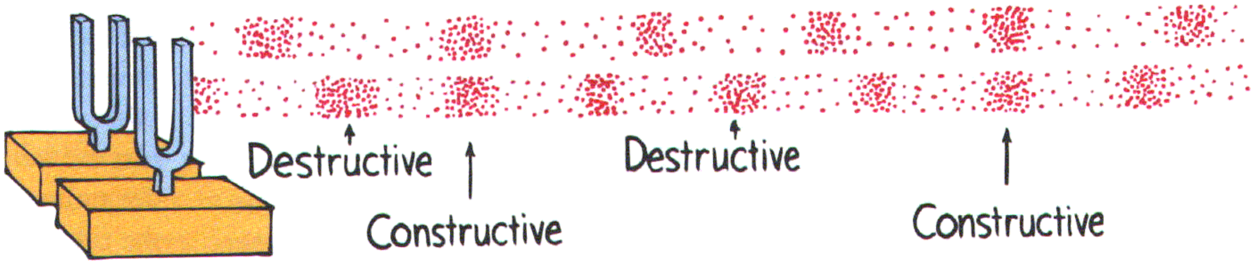
Interferência construtiva

Interferência destrutiva

Exemplo

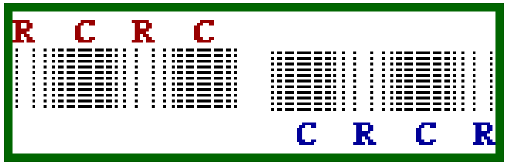


Interferência



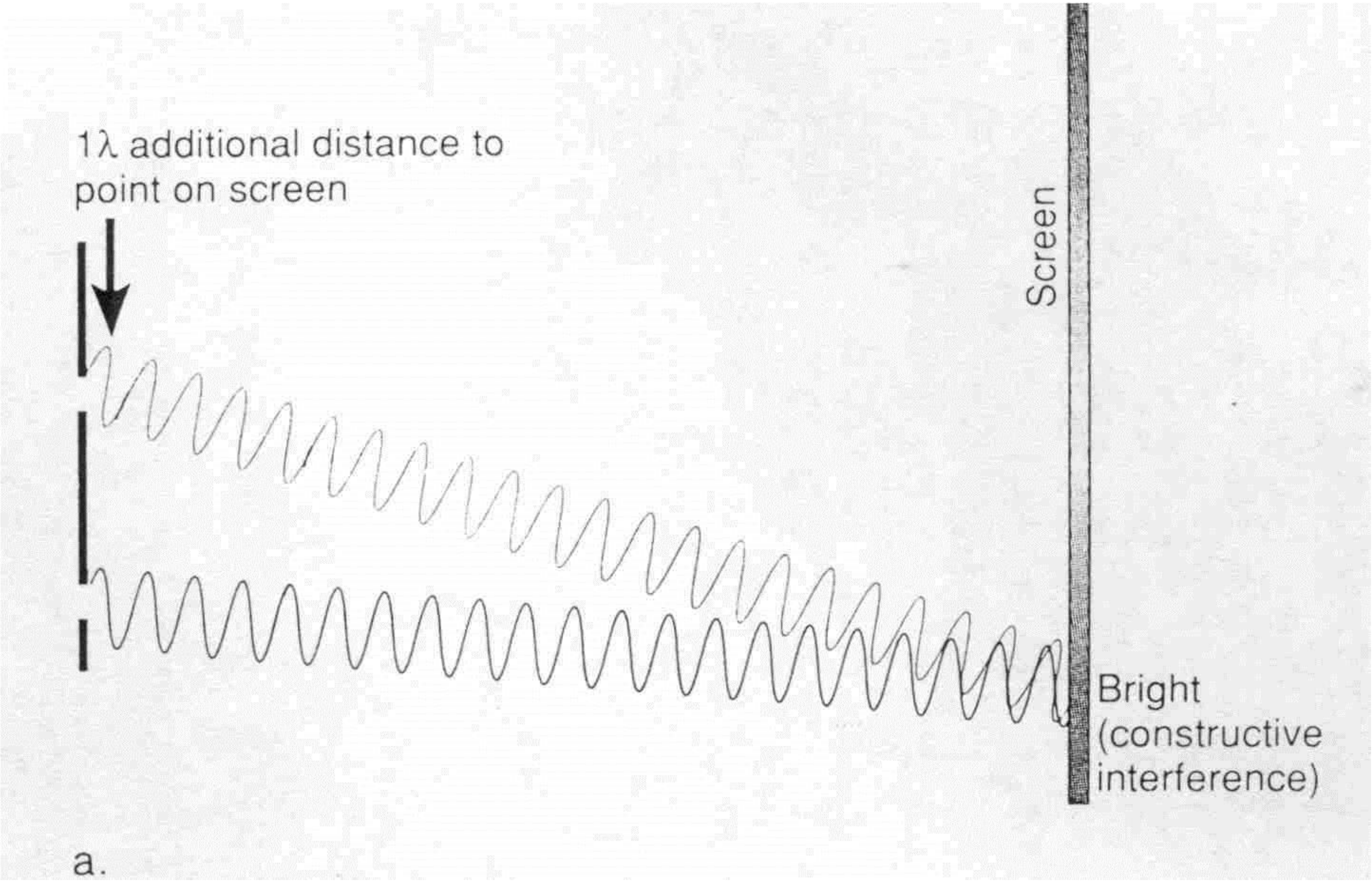
Interferência de compressões de uma onda sonora resultam em…
…interferência construtiva.
…um som mais forte.

Interferência de regiões de compressão e rarefação resultam em...
…interferência destrutiva.
…um som mais fraco.



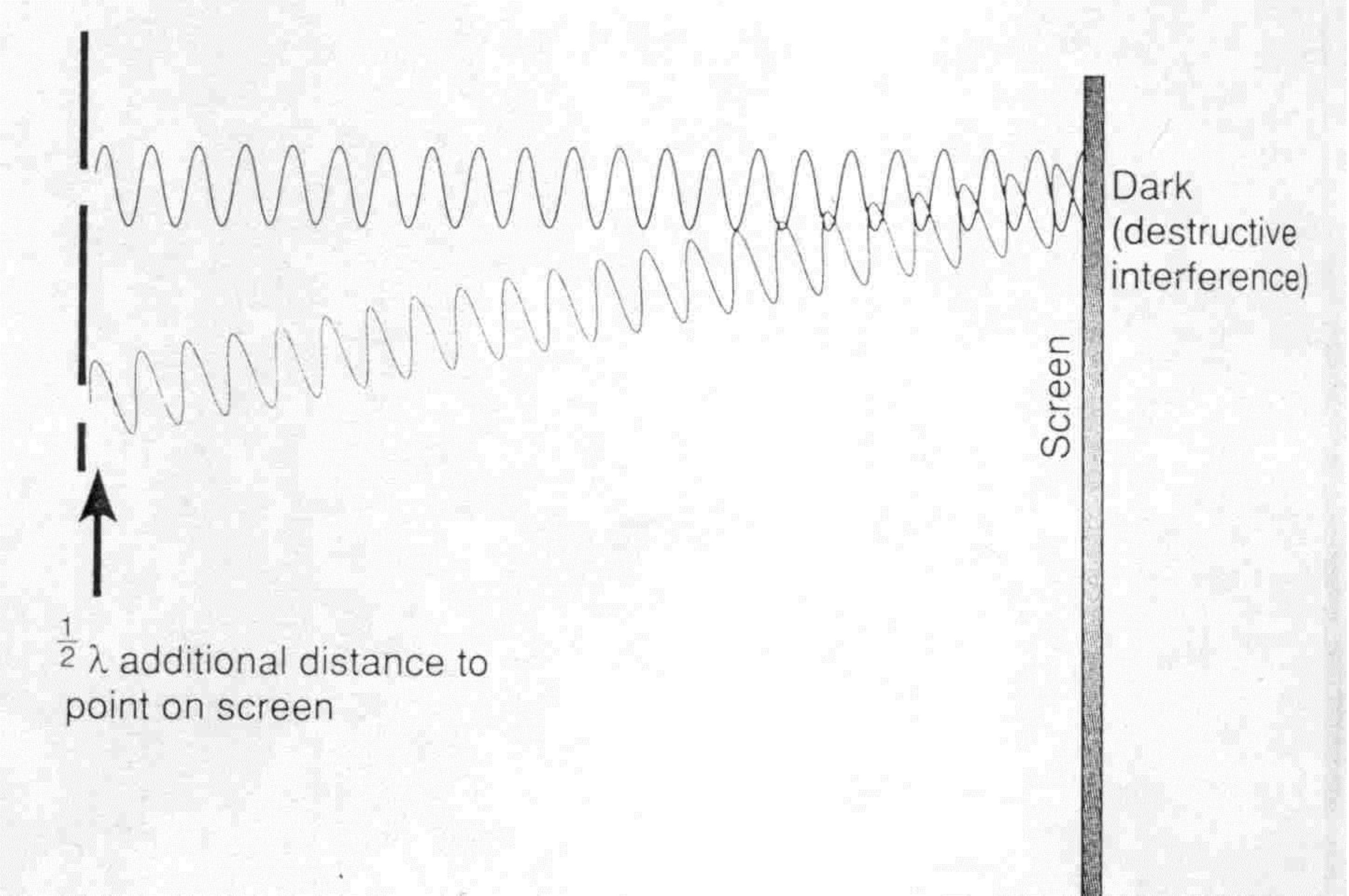
Interferência de duas fendas

- Construtiva: diferença no caminho = múltiplos de λ



Interferência de duas fendas

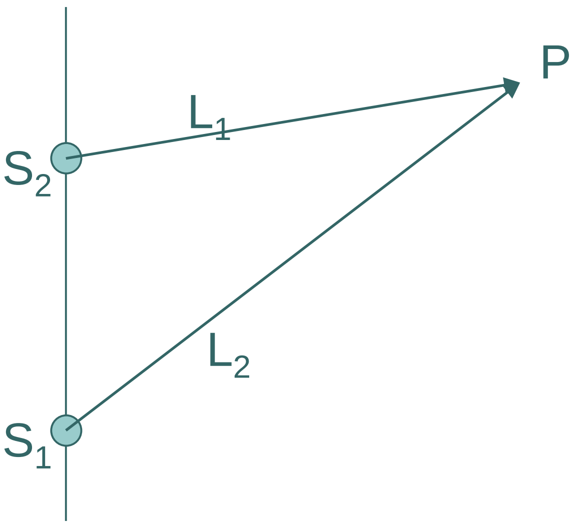
- Destrutiva: diferença no caminho = múltiplos de $\lambda/2$



Interferência: 2 fontes pontuais

$$\Delta L = \left| L_2 - L_1 \right|$$

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\Delta L}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \phi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi$$ Diferença de fase



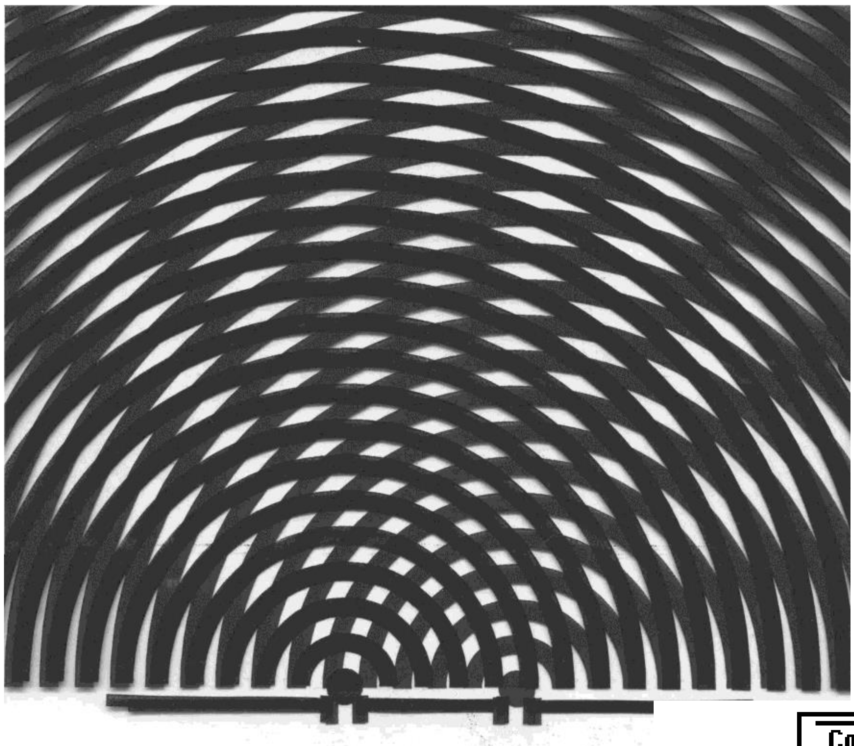
$$\phi = m\left(2\pi\right), \quad \text{para} \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

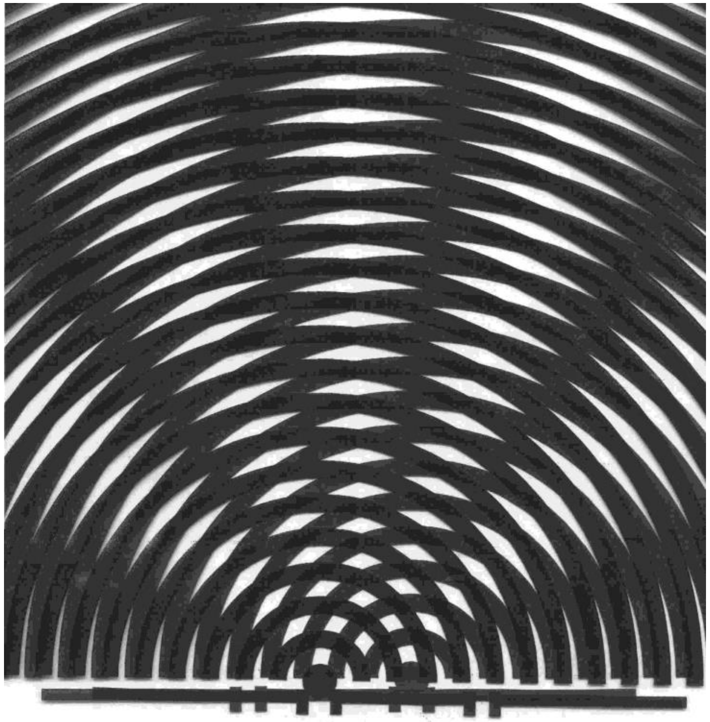
Interferência totalmente construtiva

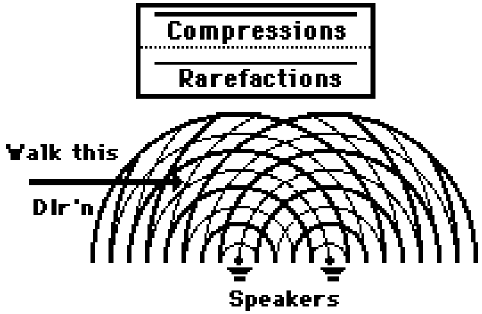
$$\phi = \left(2m+1\right)\pi, \quad \text{para} \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Interferência totalmente destrutiva

Interferência de duas fendas







http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/viewtopic.php?t=31

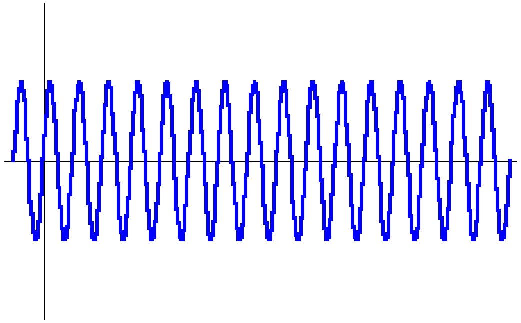
Batimento

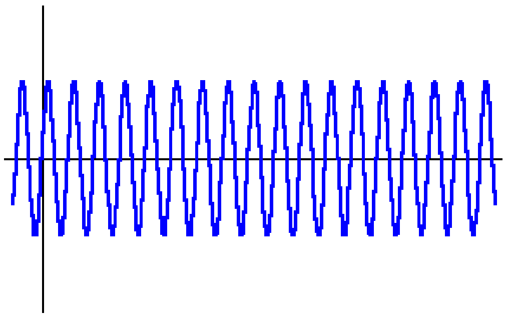
- <u>Batimentos</u> – variação periódica da intensidade de dois sons tocados juntos.

- A <u>frequência de batimento</u> é igual à diferença na frequência dos dois sons.

$y_1 = A\sin(2\pi f_1 t)$

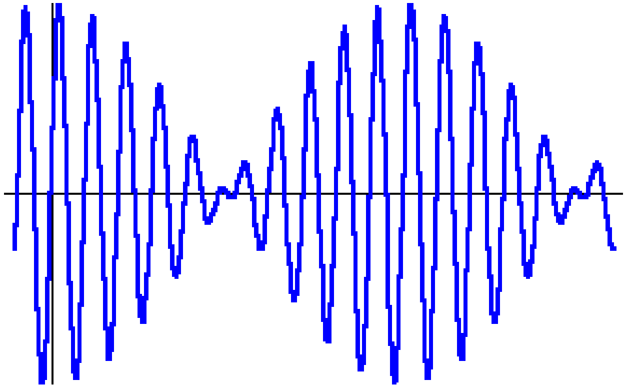
$y_2 = A\sin(2\pi f_2 t)$





Batimento

$$y = y_1 + y_2 = \left[2A\cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) t \right] \sin 2\pi \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right) t$$



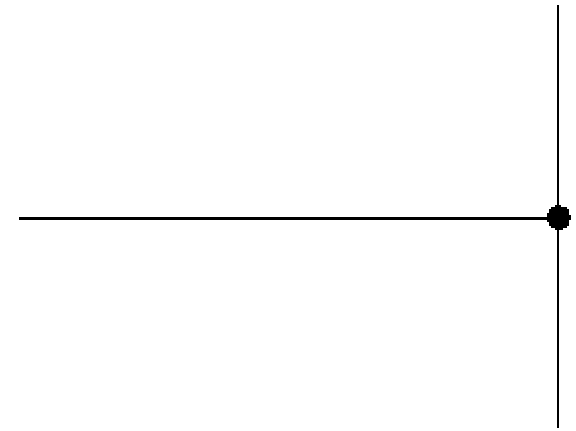
A onda resultante é uma onda de freqüencia $f_{med} = (f_1 + f_2)/2$, com um envelope com freqüência $f_b = |f_1 - f_2|$. A freqüência do envelope é chamada freqüência de batimento (nome óbvio ao ouvir os sons).

- 330 Hz senoidal (E na escala cromática igualmente temperada).
- 330 Hz + 331 Hz. (resulta em uma freqüencia de batimento de 1 Hz.)
- 330 Hz + 340 Hz. (resulta em uma freqüencia de batimento de 10 Hz.)

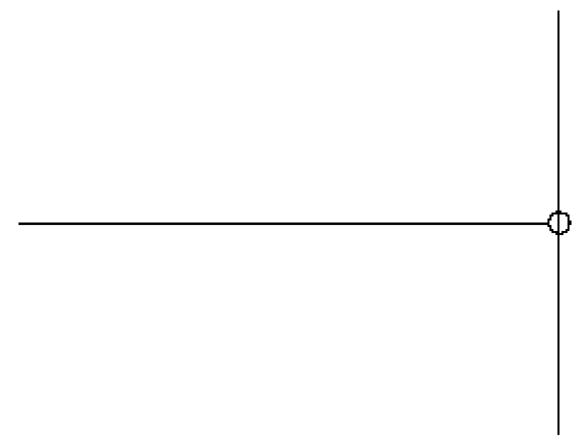
Batimentos são geralmente usados para afinar instrumentos. A freqüência desejada é comparada com a freqüência do instrumento.

Reflexão de ondas

- Cordas com uma extremidade fixa:
  - Pulso refletido retorna invertido com relação ao incidente



- Cordas com uma extremidade solta
  - Pulso refletido retorna igual ao incidente.



Reflexão de ondas

- Reflexão das ondas depende da diferença entre a impedância característica do meio em ambos lados de uma interface.
- Quanto maiores forem as diferenças na impedância, maior será a fração de energia refletida, e portanto menor a fração de energia transmitida

Reflexão em uma interface suave-dura

Reflexão em uma interface dura-suave

Ondas estacionárias

duas ondas idênticas se propagando em sentidos contrários

$$y_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad y_2(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$$

A superposição

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) =$$
$$A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t)$$

Usando de novo a relação

$$\sin a + \sin b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Ondas estacionárias

Amplitude depende de x

Variação temporal da amplitude

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$

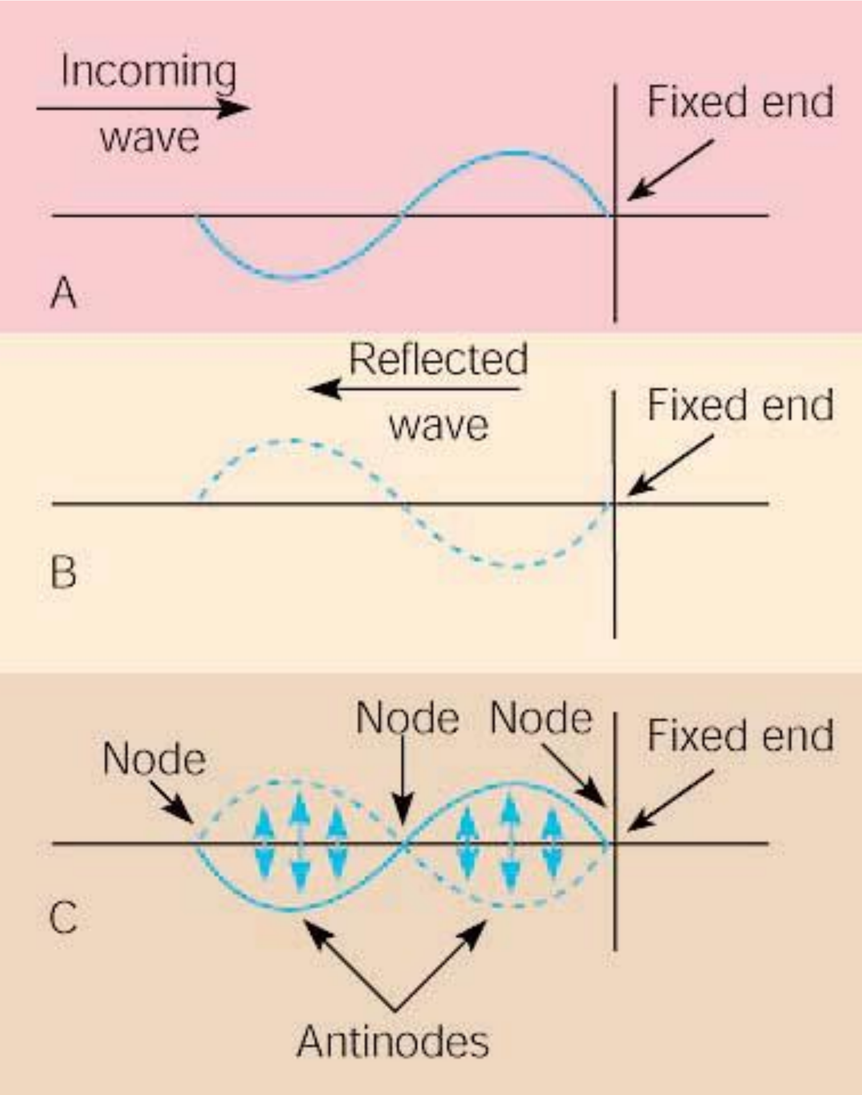
Esta não é uma onda progressiva, não tem o termo ($kx-\omega t$).
Isto é uma onda estacionária.

Existem pontos que são sempre nulos, onde $kx = 0,\ \pi,\ 2\pi,...$

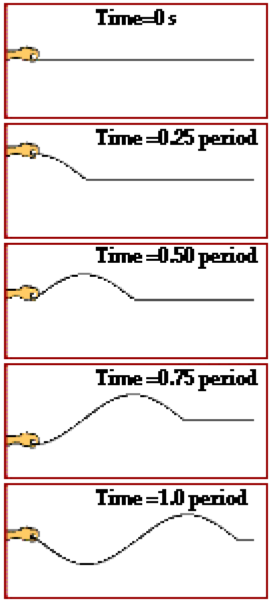
http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/viewtopic.php?t=35

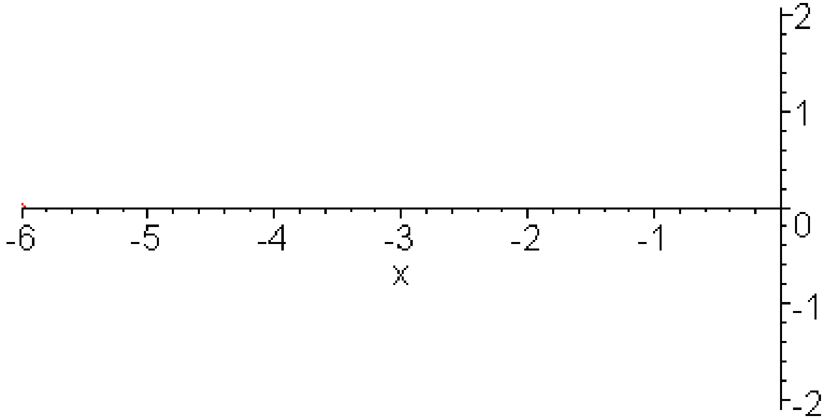
Formação de Ondas Estacionárias

- Uma onda incidente em uma corda com extremidade fixa (A) encontra uma onda refletida (B) com a mesma amplitude e frequência, gerando uma onda estacionária (C). Note que a onda estacionária de um comprimento de onda tem três nós e dois anti-nós.

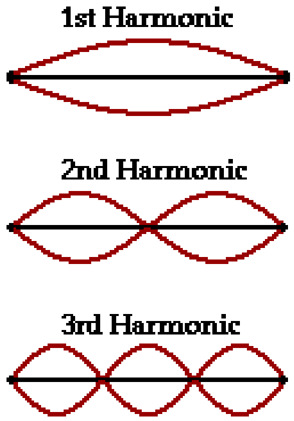


Formação de ondas estacionárias





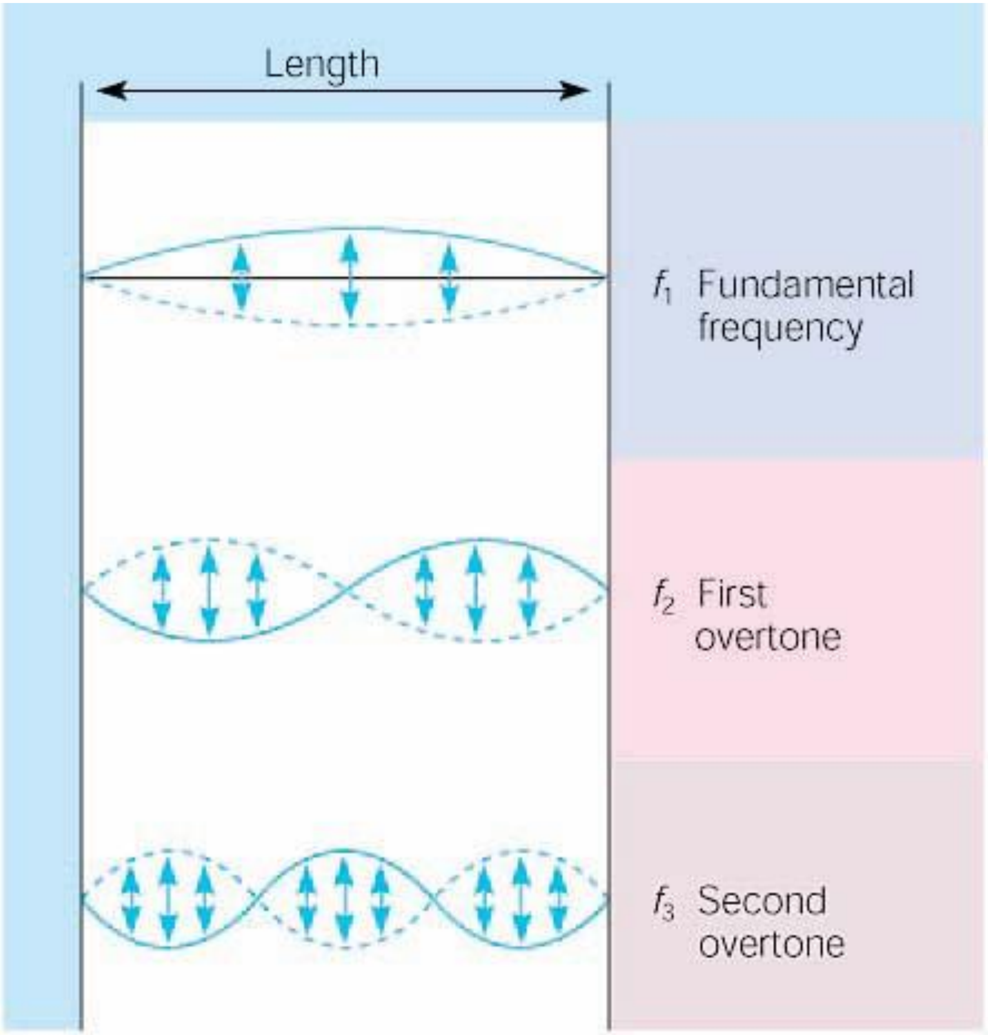
Cordas Vibrantes



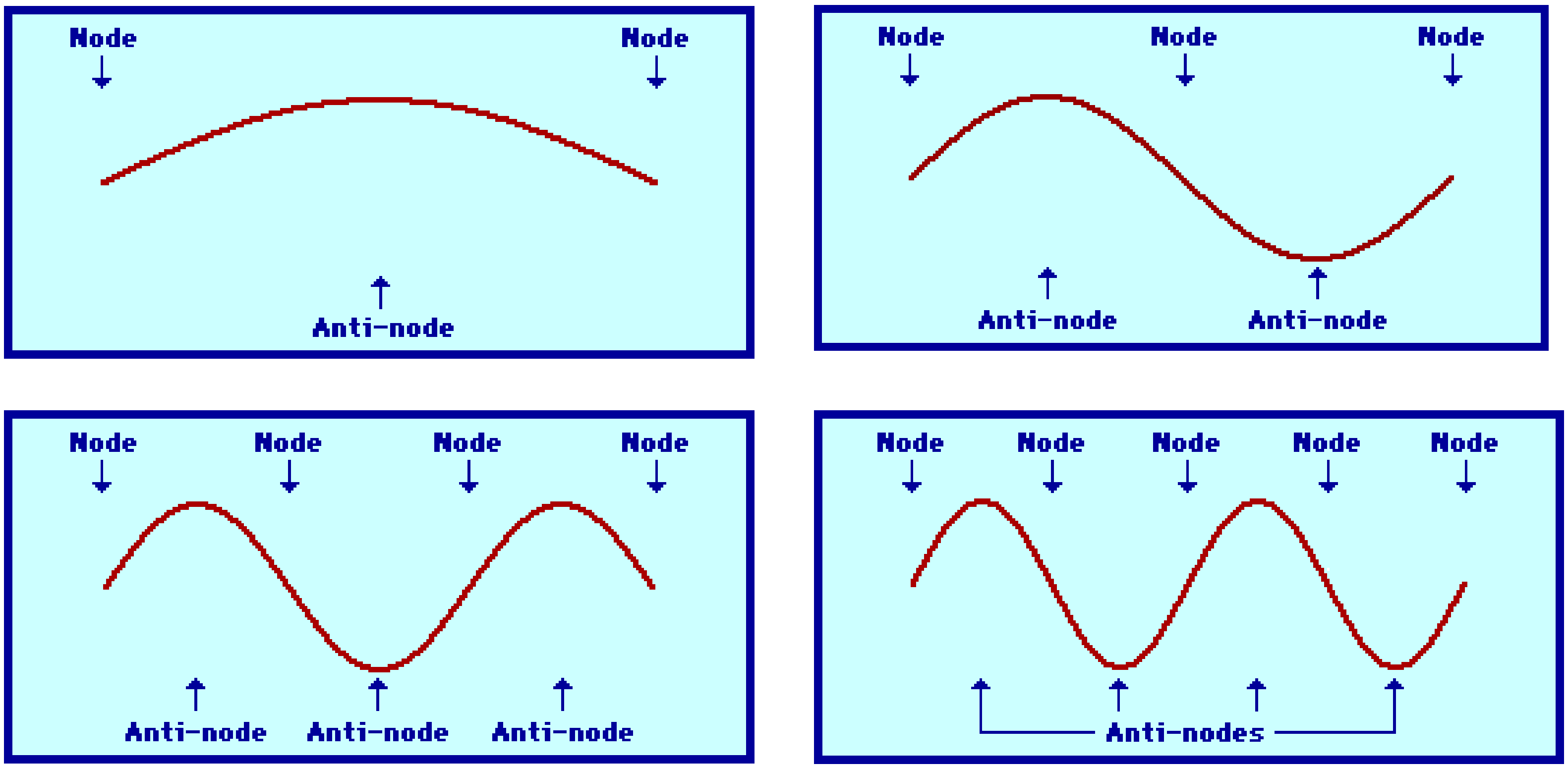
- **Ondas Estacionárias:**
  - Quando ondas refletidas se somam com ondas incidentes.
  - Criam uma forma de nós e anti-nós.
- **Nós:**
  - Lugares de amplitude nula (ondas se cancelam mutuamente).
- **Anti-Nós:**
  - Lugares onde as cristas e vales produzem distúrbios que rapidamente se alternam, para cima e para baixo.
- **Frequência Fundamental:**
  - O onda mais longa que pode formar uma onda estacionária em uma corda tem um comprimento de onda que é duas vezes maior que o comprimento da corda.
  - Esse comprimento de onda maior tem a menor frequência, e é chamado de frequência fundamental.
  - A frequencia fundamental determina a altura (pitch) do som, e é chamado também primeiro harmônico.

Freqüência Fundamental

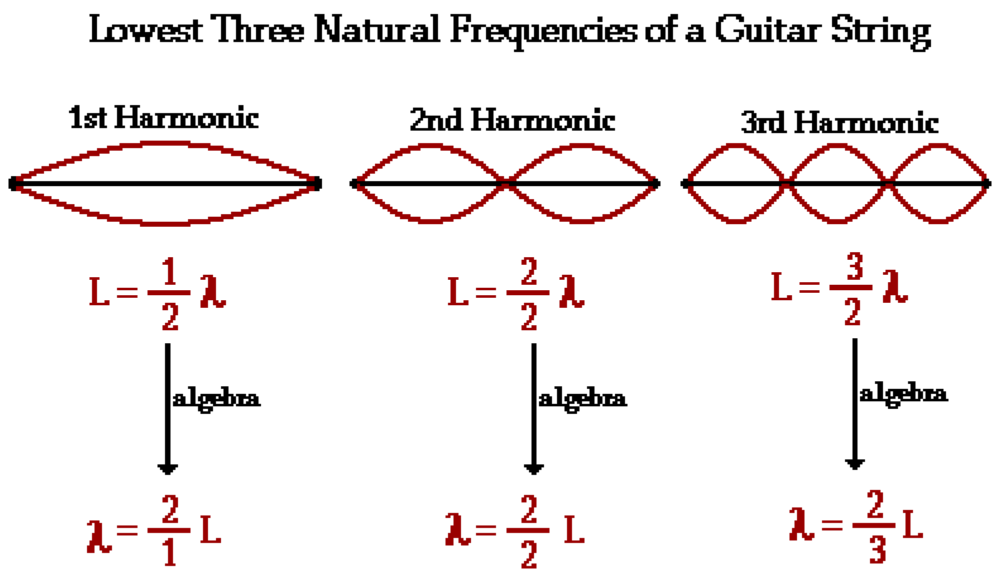
Uma corda esticada de um dado comprimento tem um número possível de frequências ressonantes. A frequência mais baixa é chamada fundamental, f_1; As demais frequências, ou sobretons, são conhecidas como frequências superiores (a fig. mostra f_2 e f_3).



Ondas estacionárias



Harmônicos em cordas



Nós nas extremidades!

No caso de instrumentos, o som é Amplificado pelas caixas acústicas desses instrumentos (violão, piano, etc...)

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L}$$

http://www.falstad.com/loadedstring/

Ondas estacionárias: Exemplos

- A tecla mais aguda de um piano corresponde a uma frequência 150 vezes maior que a corda mais grave. Se o comprimento da corda mais aguda é 5,0 cm, quanto teria que ter a corda mais grave, se elas tivessem a mesma densidade linear de massa e a mesma tensão?
- A velocidade seria a mesma para as duas cordas:

$$f = \frac{v}{2L} \qquad \frac{L_g}{L_a} = \frac{f_a}{f_g} \qquad L_g = L_a \frac{f_a}{f_g} = 5 \times 150 = 750 \text{ cm} = 7{,}5 \text{ m}$$

Portanto, na realidade as cordas graves são mais pesadas para evitar que sejam muito compridas...

Ondas estacionárias: Exemplos

- Uma corda de violino de 32cm está tocando a nota A, acima da nota C na escala bem temperada (correspondente a 440 Hz). (a) Qual é o comprimento de onda do harmônico fundamental? (b) Quais são as frequências e comprimento de onda da onda sonora produzida? (c) Por que há diferença?

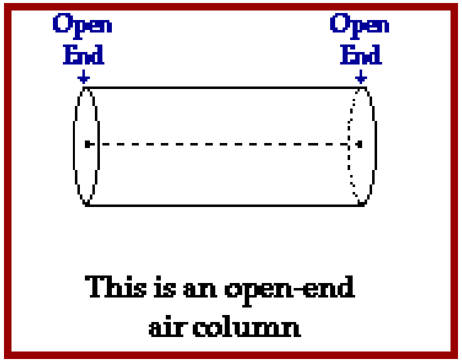
(a) comprimento de onda da onda estacionária na corda:

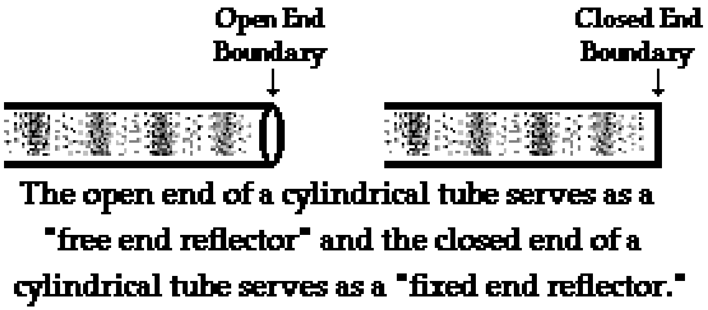
$$\lambda = 2L = 0.64\text{m} = 64 \text{ cm}$$

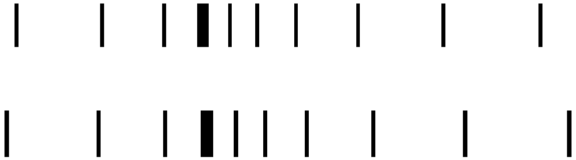
(b) A onda sonora tem a mesma frequência, *f* = 440 Hz.

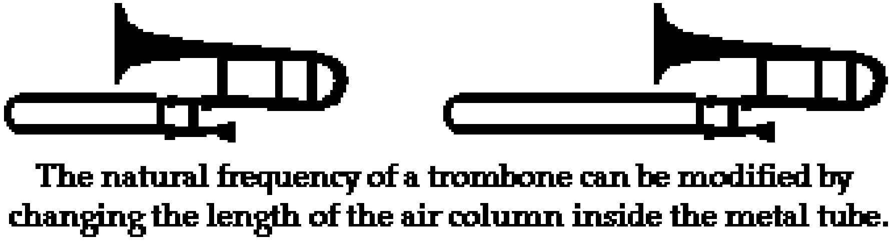
$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343 \text{ m/s}}{440 \text{ Hz}} = 0,78 \text{ m}$$

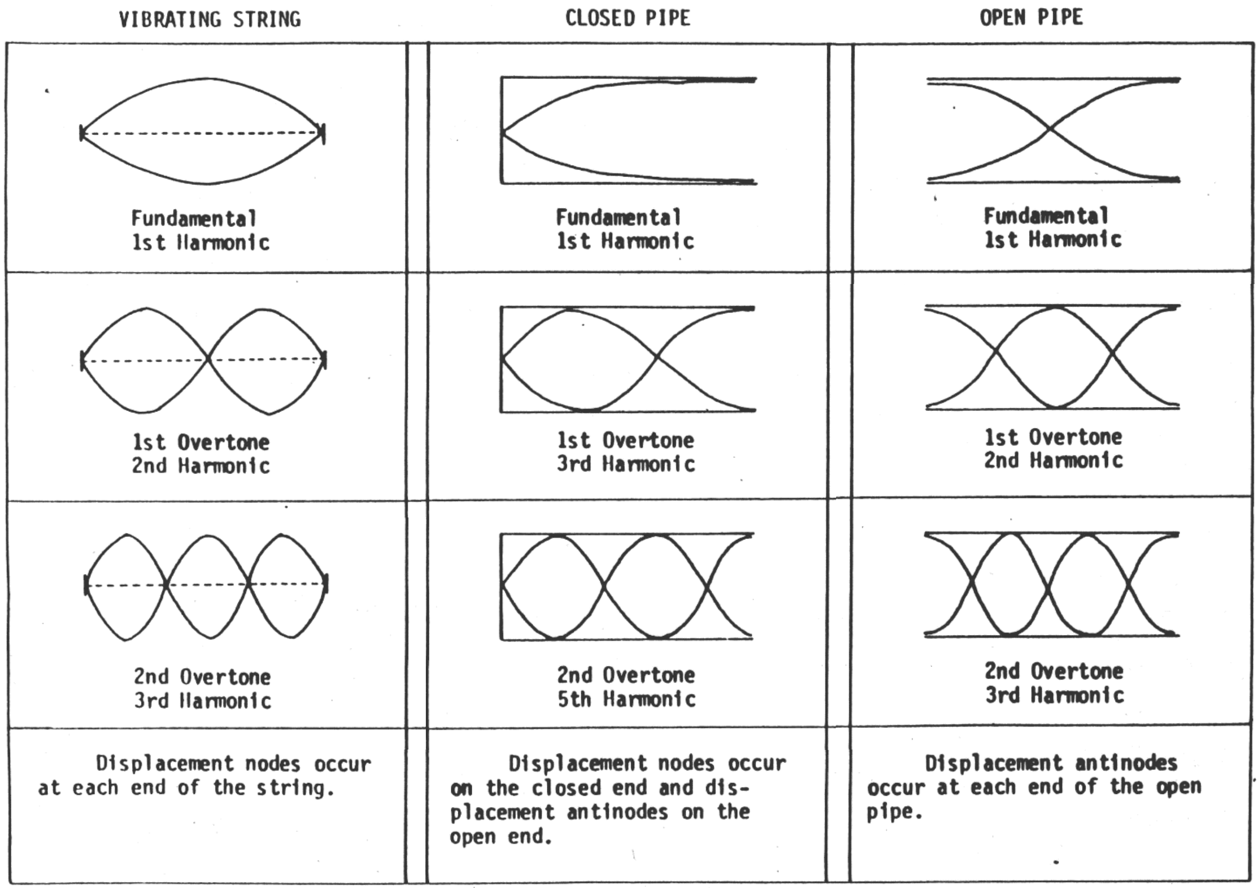
Ondas estacionárias: tubos









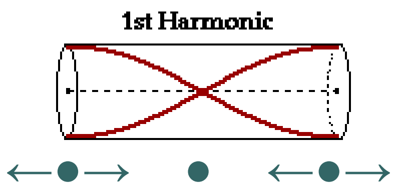


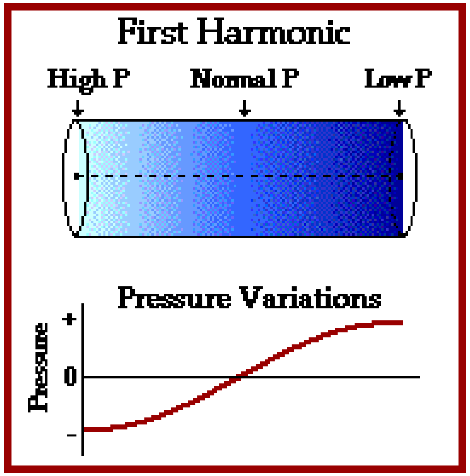
Descrição em termos de deslocamento do ar

Ondas estacionárias: tubos abertos

$$L = \frac{\lambda_1}{2}$$

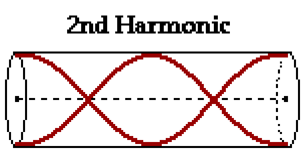
$$f_1 = \frac{v}{2L}$$





$$L = \lambda_2$$

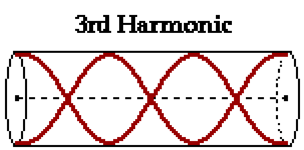
$$f_2 = \frac{v}{L} = 2\,f_1$$

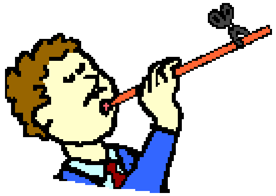


(esta descrição está sendo feita em termos dos deslocamentos de ar. A pressão tem o comportamento oposto)

$$L = \frac{3}{2}\lambda_3$$

$$f_2 = \frac{3v}{2L} = 3\,f_1$$



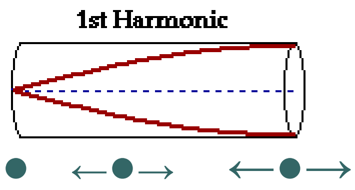


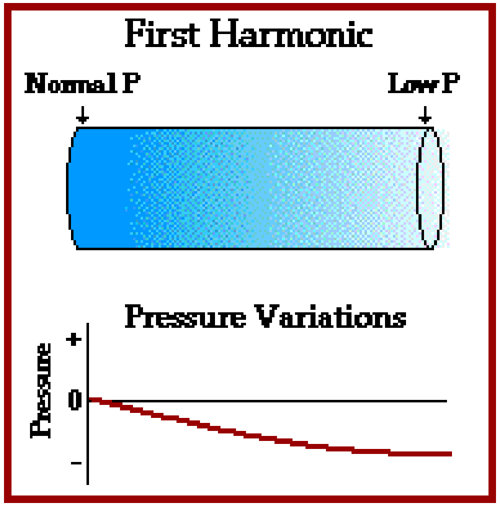
Plastic Straw Instrument

Ondas estacionárias em tubos com uma extremidade fechada

$$L = \frac{\lambda_1}{4}$$

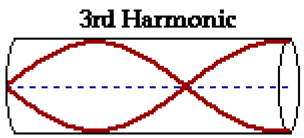
$$f_1 = \frac{v}{4L}$$





$$L = \frac{3}{4}\lambda_3$$

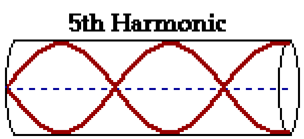
$$f_3 = \frac{3v}{4L} = 3\,f_1$$



(esta descrição está sendo feita em termos dos deslocamentos de ar. A pressão tem o comportamento oposto)

$$L = \frac{5}{4}\lambda_5$$

$$f_5 = \frac{5v}{4L} = 5\,f_1$$



Ondas estacionárias: som

- Ondas estacionárias nesses tubos abertos têm **anti-nós** de deslocamento na extremidade aberta, onde o ar é livre para vibrar.

Ondas estacionárias: órgãos

- Tubos de órgão abertos e fechados: Qual é a freqüência fundamental e os três primeiros parciais de um tubo de órgão de 26 cm de comprimento a 20ºC, se ele for (a) aberto ou (b) fechado?

(a) Harmônico fundamental:

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{343\ \text{m/s}}{2 \times (0,26\text{m})} = 660\ \text{Hz}$$

Os parciais, que incluem todos os harmônicos, são 1320 Hz, 1980 Hz, 2640 Hz, e assim por diante

(b) Harmônico fundamental:

$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{343\ \text{m/s}}{4 \times (0,26\text{m})} = 330\ \text{Hz}$$

Os parciais, que incluem apenas os harmônicos ímpares, são então 990 Hz, 1650 Hz, 23100 Hz, e assim por diante

Ondas estacionárias: Flauta

- Uma flauta é desenhada para tocar no na nota dó central (262 Hz) como freqüência fundamental quando todos os buracos estão tampados. Qual deve ser a distância entre o bocal e o fim da flauta (obs: essa é apenas uma distância aproximada)? Assuma a temperatura de 20ºC.

$$f = \frac{v}{2L}$$

$$L = \frac{v}{2f} = \frac{343\ \mathrm{m/s}}{2 \times 262\ \mathrm{s}^{-1}} = 0,655\ \mathrm{m}$$

Ondas estacionárias: Flauta

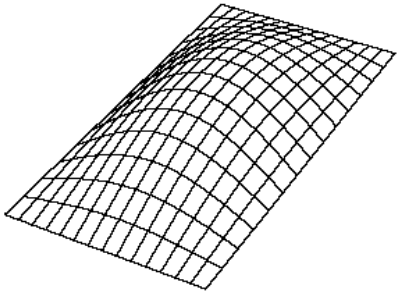
Dado que a velocidade do som no ar depende da temperatura como v = 331 + 0.6 T (ºC) . Qual seria a frequência da nota tocada do mesmo modo que no problema anterior se a temperatura fosse apenas 10ºC ?

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{337\ \text{m/s}}{2 \times 0{,}655\ \text{m}} = 257\ \text{Hz}$$

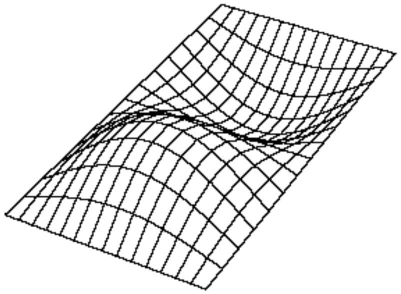
Este exemplo ilustra porque os músicos “aquecem” os instrumentos para afiná-los...

Modos vibracionais: membranas

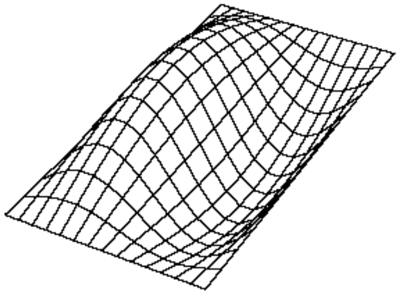
- Membrana retangular



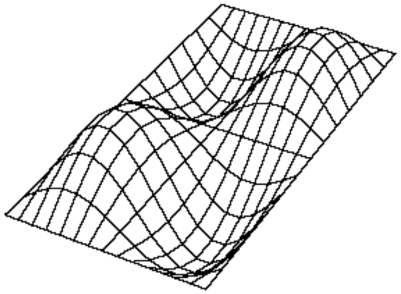
Modo (1,1)



Modo (1,2)



Modo (2,1)

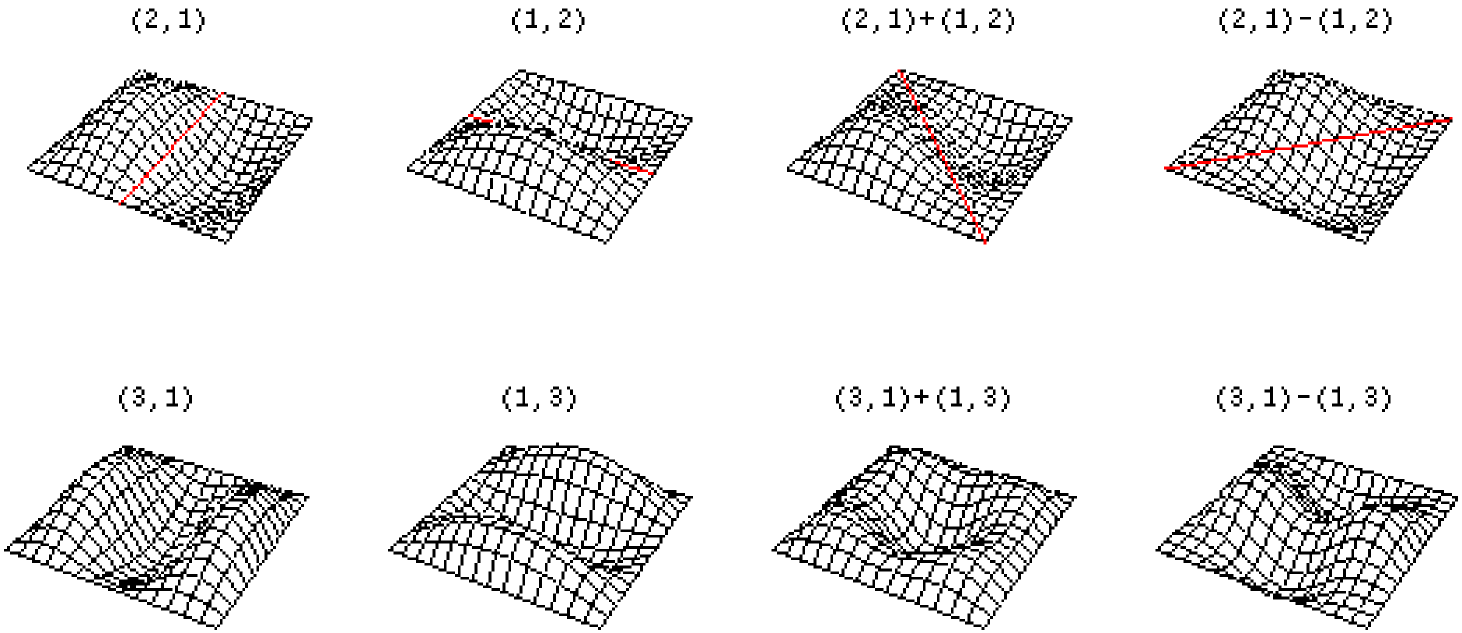


Modo (2,2)

http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/MembraneSquare/Square.html

Modos vibracionais: membranas

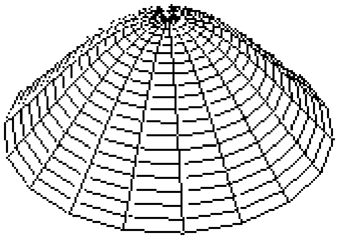
- Membranas quadradas



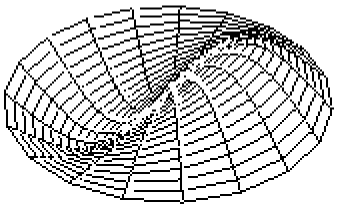
http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/MembraneSquare/Square.html

Modos vibracionais: membranas

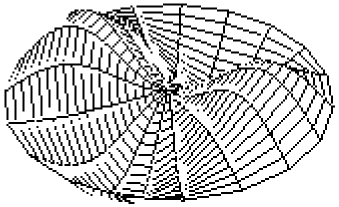
- Membrana circular - tambores



Modo (0,1)



Modo (1,1)

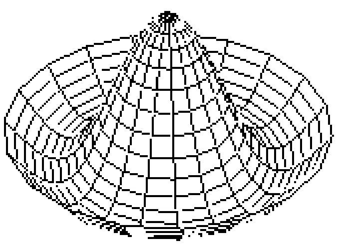


Modo (2,1)

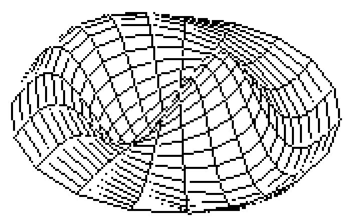
http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/MembraneCircle/Circle.html

Modos vibracionais: membranas

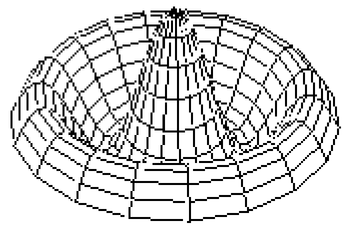
- Membrana circular - tambores



Modo (0,2)



Modo (1,2)



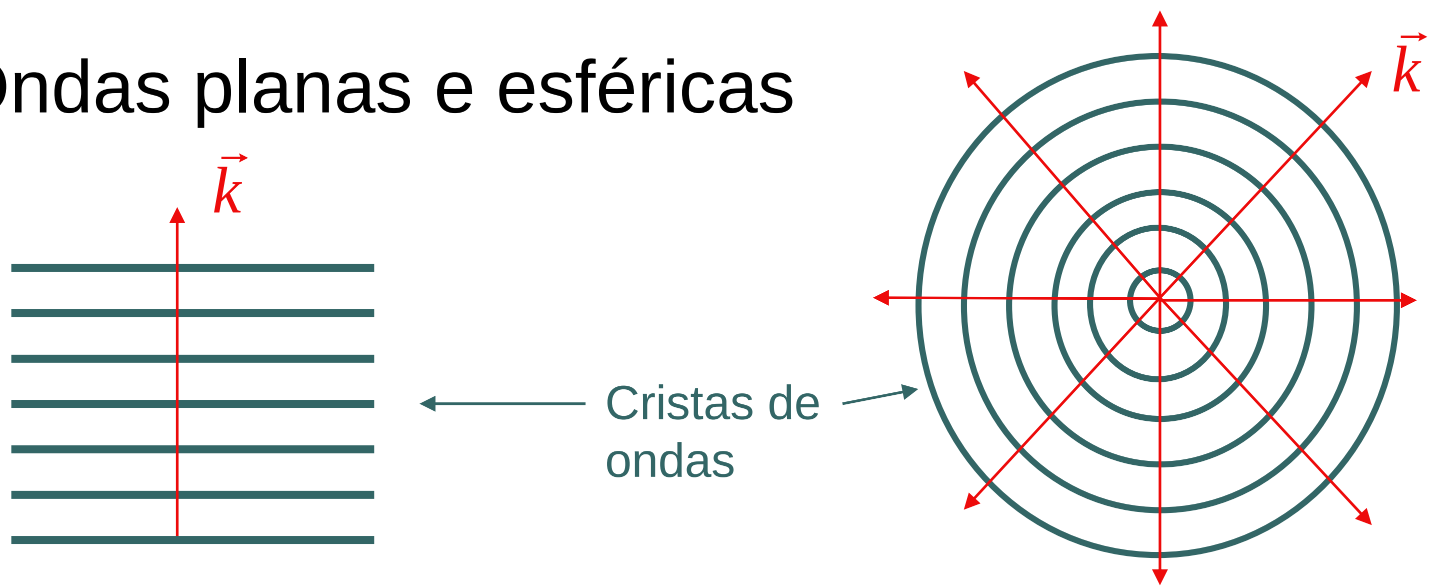
Modo (0,3)

http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/MembraneCircle/Circle.html

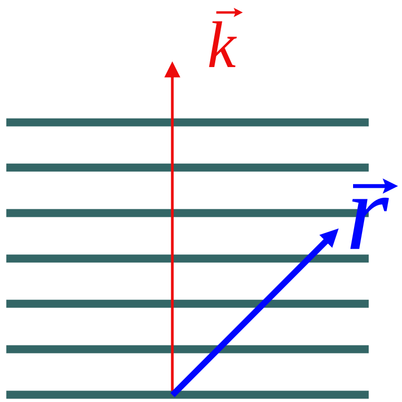
Ondas bi e tridimensionais

- Para ondas bi e tridimensionais estaremos preocupados com frentes de onda, ou seja, a largura completa da crista da onda. O raio é uma linha desenhada na direção do movimento, perpendicular à frente de onda.

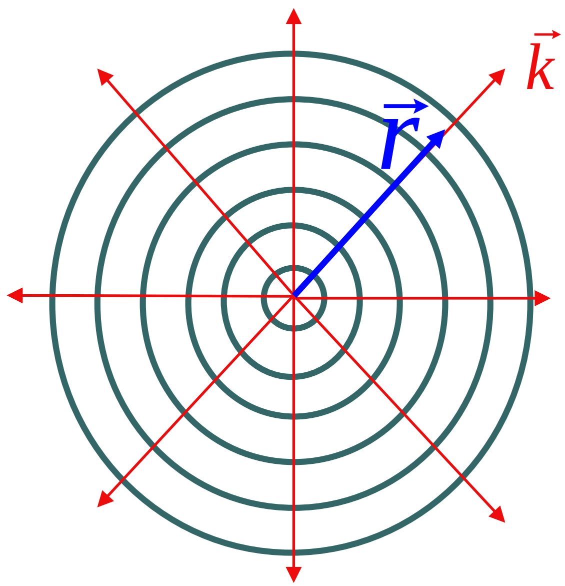
- Ondas planas e esféricas



Ondas bi e tridimensionais



$$\varphi(\vec{r},t)=A\cos(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)$$

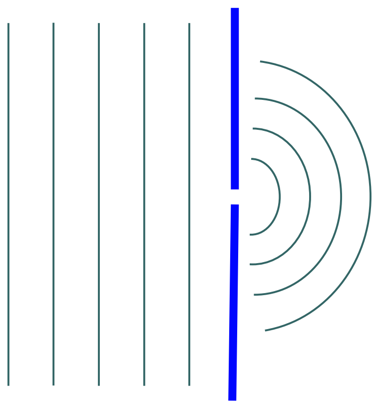


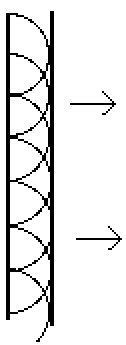
$$\varphi(\vec{r},t)=\varphi(r,t)=$$

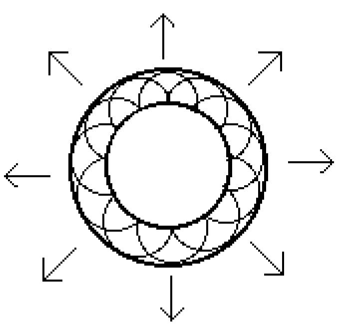
$$\frac{A}{r}\cos(kr-\omega t)$$

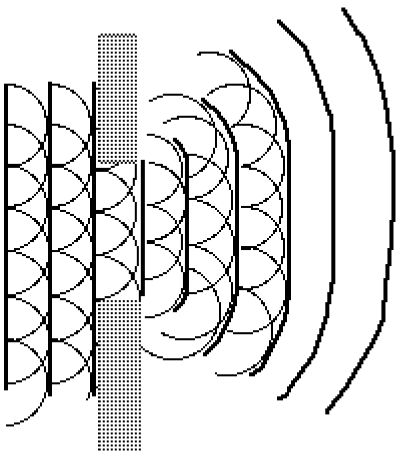
Princípio de Huygens

Cada ponto do espaço age como uma nova fonte pontual de emissão quando atingida por uma frente de onda. A envoltória das novas frentes (frentes secundárias) são as frentes de onda ulteriores.



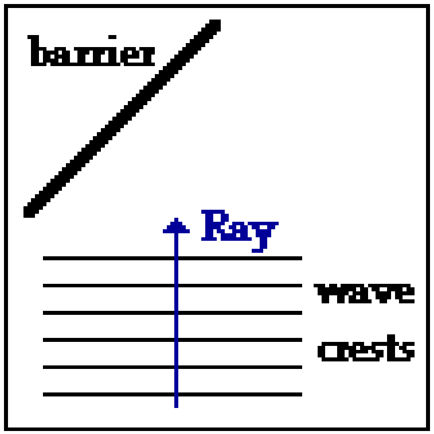


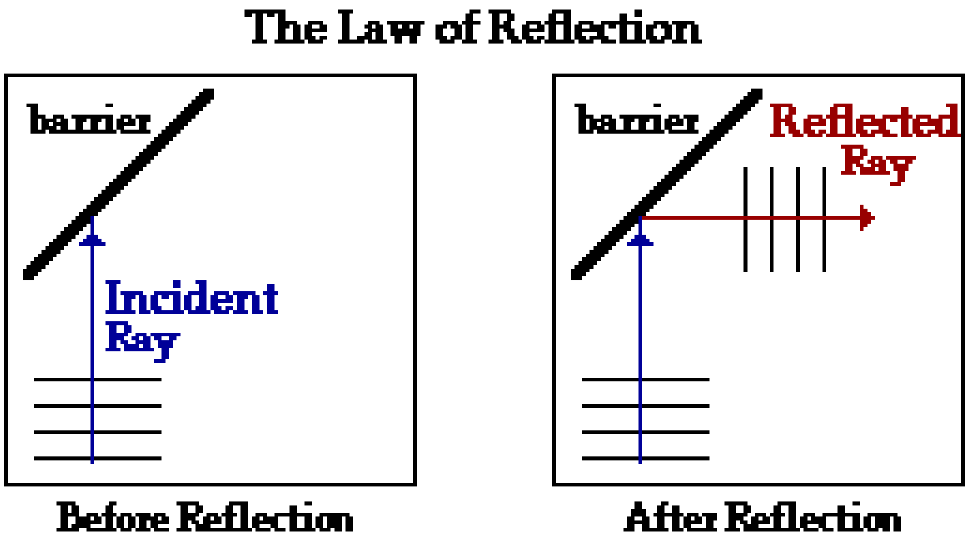




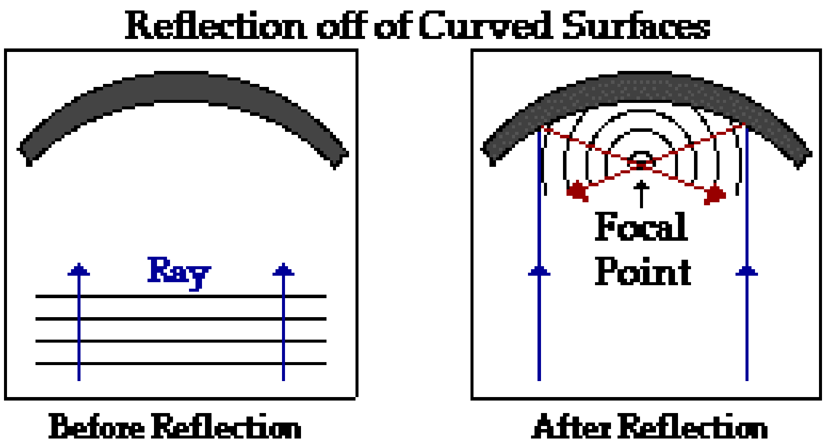
Reflexão de ondas

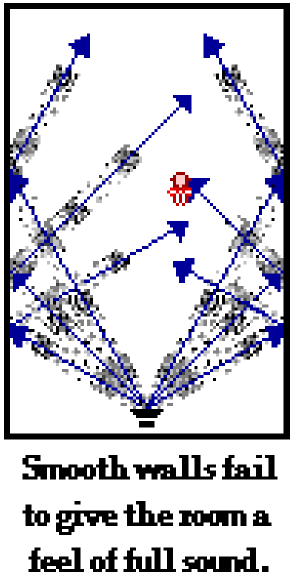
- Lei da reflexão: o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência

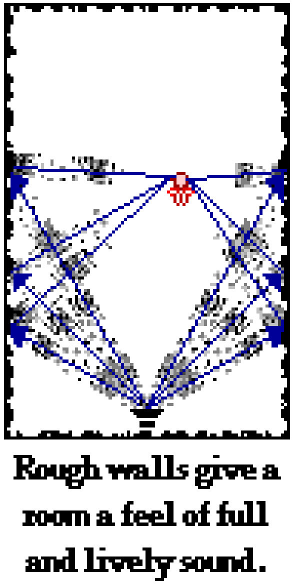




Reflexão de ondas







Parede lisa

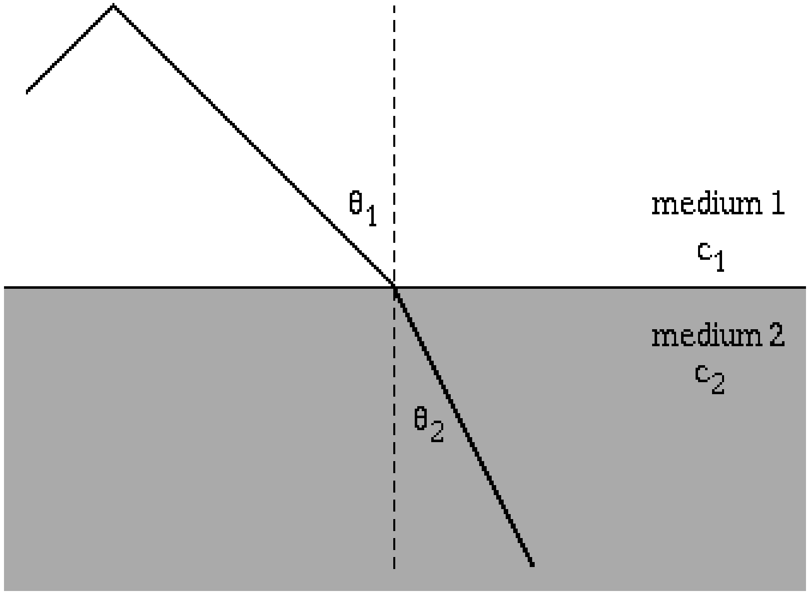
Parede rugosa

Refração de ondas

- Causada pela variação da velocidade da onda quando cruza dois meios com características diferentes.

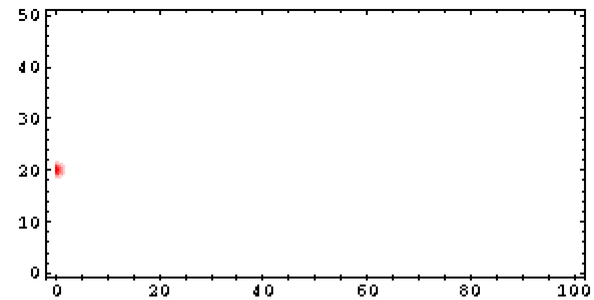
- Lei de Snell:

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

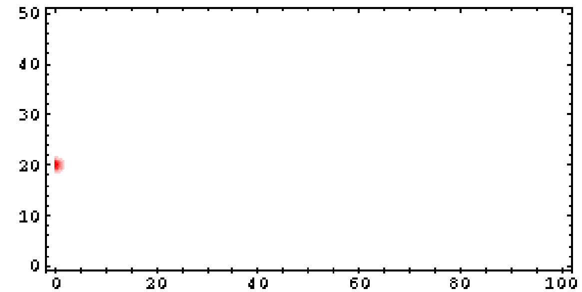


http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/viewtopic.php?t=32

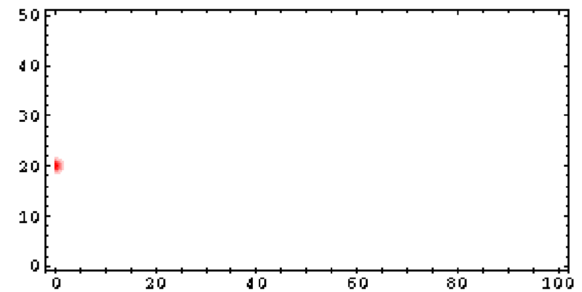
Gradientes de Temperatura



- Um gradiente de temperatura voltado para cima (temperaturas do solo menores) produzem uma deflexão para baixo.



- Um gradiente de temperatura voltado para baixo (temperaturas do solo maiores) produzem uma deflexão para cima.

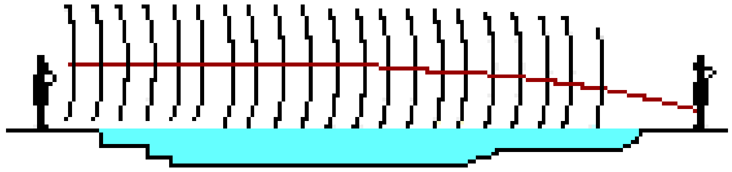


Efeitos de temperatura

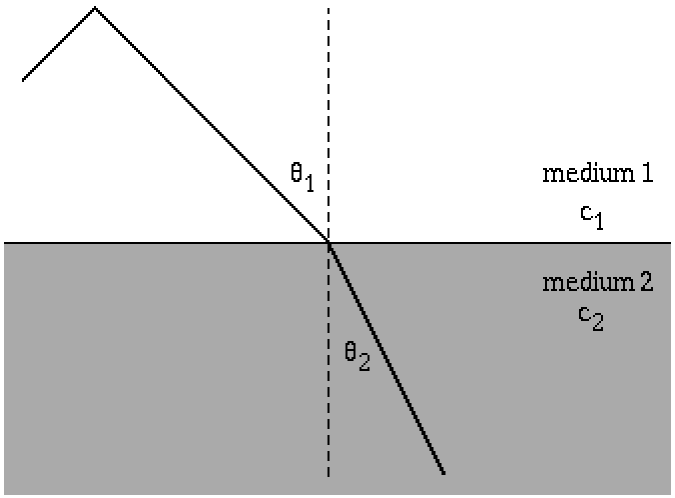
- A velocidade do som depende da temperatura:

  $v = 331 + 0.6\,T$ (ºC) no ar.

  Então, gradientes de temperatura implicam em variações de velocidade... (lei de Snell)



Refraction of Sound Waves



Difração de ondas

- Objetos interagem com a onda sonora das seguintes maneiras:
- Objetos que são menores que 1/6 do comprimento de onda são ’transparentes’ ao som.
- Objetos com tamanhos comparáveis ao comprimento de onda espalham ou difratam a onda sonora
- Objetos com tamanhos de mais de 5-10 comprimentos de onda refletem a onda sonora

Difração de ondas

- Como conseguimos às vezes escutar atrás de um muro?