F 077/FI 263 - prova 2

Unicamp, 03 de outubro de 2012

nome assinatura RA

1ª questão: Para campos gravitacionais fracos e esfericamente simétricos temos a seguinte métrica:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{M}{r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

onde M é o raio da Terra. Para pequenas trajetórias na superfície da Terra tal métrica pode ser aproximada por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{R+z}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{M}{R+z}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

onde R é o raio da Terra e z é a altura a partir de sua superfície em um determinado ponto.

a) Realize mais uma aproximação nesta métrica no caso de $z << R$.

b) Com esta aproximação, encontre as equações do movimento a partir da equação de Lagrange.

c) A partir do ítem acima, escreva todos os símbolos de Christoffell não nulos $\Gamma^3_{\beta\gamma}$ a partir da equação da geodésica.

d) Confira o resultado do ítem anterior a partir da expressão completa para cálculo dos símbolos de Christoffell a partir da métrica.

e) (FI-263) No limite não relativístico, seu resultado confere com as previsões da Mecânica Clássica?

2ª questão:
A geometria de Schwarschild tem a seguinte forma para seu elemento de linha:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

a) Quais os vetores de Killing associados às simetrias temporal e angular? Associe quantidades conservadas a essas simetrias.
b) Através da normalização da quadri-velocidade, obtem-se a seguinte expressão:

$$\frac{e^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau^2}\right) - \frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3}$$

Encontre que condições os parâmetros l, M e e devem satisfazer de forma a que o movimento de uma partícula vindo do infinito tenha um ponto de retorno.
c) Dado que o ponto de retorno ocorre para $r = R_*$, calcule a velocidade com que a partícula passa pelo ponto de retorno para um observador em repouso neste ponto.

3$^{\underline{a}}$ questão:
Na métrica de FRW do modelo cosmológica padrão

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dr^2 + r^2 d\Omega^2)$$

temos que a equação de Friedman que governa a evolução do fator de escala em um universo plano é escrita da forma:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}$$

a) Utilizando o dado experimental $H_0 = 72$ km/s/Mpc, onde H_0 é a constante de Hubble, que mede a expansão atual do universo hoje, calcule a densidade crítica de energia do universo.
b) Calcule a idade do universo caso ele seja composto inteiramente de matéria ou inteiramente de radiação.
c) (FI-263) Calcule, em um universo composto de matéria e radiação nas proporções 99.9% e 0.1%, em que momento as densidades de energia destas duas quantidades é idêntica. Suponha que sempre podemos tomar o universo como predominantemente matéria OU radiação, calcule aproximadamente a idade deste universo.

4ª questão:
Descreva qualitativamente o efeito de lente gravitacional, abordando em sua resposta os seguintes pontos: i) o efeito de uma lente gravitacional depende do comprimento de onda da luz emitida? ii) quantas imagens de um mesmo objeto podem ser formadas por uma lente pontual para diferentes geometrias? iii) como um objeto se distorce pelos efeitos da lente gravitacional? iv) dê um exemplo de um experimento realístico que utiliza efeitos de lentes gravitacionais.

fórmulas úteis:

Equações de Euler:

$$d\tau = \sqrt{-ds^2} \quad ; \quad \tau = \int d\tau = \int d\lambda \, L$$

onde $L = d\tau/d\lambda$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial(dx^\mu/d\lambda)}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}$$

equação da Geodésica:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

Cálculo dos símbolos de Christoffell a partir da métrica:

$$g_{\alpha\delta}\Gamma^\delta_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}\right)$$

outras relações:

$$E = -p.u_{obs}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2} \quad ; \quad 1\,pc \sim 3 \times 10^{19}\,\mathrm{m}$$