F 077/FI 263 - prova 3

Unicamp, 07 de novembro de 2012

nome assinatura RA

1ª questão: Em um buraco negro esfericamente simétrico, o elemento de linha nas coordenadas de Eddington-Finkelstein é dado por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dv\, dr + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)$$

onde

$$t = v - r - 2M\, ln\left|\frac{r}{2M} - 1\right|$$

a) Encontre as trajetórias de tipo luz radiais, destacando se são trajetórias com r crescente ou decrescente, para valores de r maiores e menores que $r = 2M$.
b) esboce alguns cones de luz em um gráfico de $v \times r$ (ou $\tilde{t} \times r$ onde $\tilde{t} = v - r$).
c) Dado que a trajetória de uma partícula que cai radialmente em um buraco negro pode ser dada por:

$$\frac{v(r)}{2M} = \frac{r}{2M} - \frac{2}{3}\left(\frac{r}{2M}\right)^{2/3} - 2\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} + 2\, ln\left[1 + \left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2}\right]$$

verifique que tal trajetória está sempre dentro dos cones de luz determinados no ítem anterior.

2ª questão: Descreva sucintamente o mecanismo por trás da radiação Hawking, abordando tópicos como conservação de energia-momento, quadrivetores tipo espaço ou tipo tempo e evaporação de buracos negros.

3ª questão: Considere um giroscópio girando em uma órbita circular em torno de um objeto esfericamente simétrico (assuma $\theta = \pi/2$, fixo).
a) Determine a componente s^t em função das demais componentes de s^α a partir da condição $s.u = 0$ (utilize o fato de que em uma órbita circular estável $u = u^t(1, 0, 0, \sqrt{M/R^3})$
b) Dada a equação do giroscópio:

$$\frac{ds^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} s^\beta u^\gamma = 0$$

demonstre que um giroscópio precessiona no mesmo sentido que sua órbita.

4ª questão: Dado o potencial efetivo de uma partícula teste sob influência de um buraco negro de Kerr:
a) Interprete fisicamente as integrais de movimento l e e (ver sumário de fórmulas) através do comportamento da partícula em $r \to \infty$. Justifique sua resposta.
b) Descreva qualitativamente a trajetória de uma partícula que parte do repouso em $r \to \infty$ com $l = 0$, até cair no buraco negro, ou seja, ultrapassar o horizonte de eventos.
c) Calcule a velocidade angular da partícula do índice anterior vista por alguém externo em $r \to \infty$ (ou seja, $d\phi/dt$). Interprete seu resultado no limite em que a partícula se aproxima do horizonte de eventos, comparando com a frequência de rotação do espaço-tempo no horizonte, $\Omega_H = a/(2Mr_+)$.

sumário de fórmulas

alguns símbolos de Christoffel na métrica de Schwarschild:

$$\begin{aligned}
\Lambda^r_{rr} &= -\left(\frac{M}{r^2}\right)\frac{1}{1-2M/r} \\
\Lambda^r_{\theta\theta} &= -(r-2M) \\
\Lambda^r_{\phi\phi} &= -(r-2M)sin^2\theta \\
\Lambda^\phi_{r\phi} &= \frac{1}{r} \\
\Lambda^\phi_{\theta\phi} &= cot\theta
\end{aligned}$$

buraco negro de Kerr:

$$\frac{e^2-r}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{eff}(r,e,l)$$

$$V_{eff}(r,e,l) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2(e^2-1)}{2r^2} - \frac{M(l-ae)^2}{r^3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{d\tau} &= \frac{1}{\Delta}\left[\left(r^2+a^2+\frac{2Ma^2}{r}\right)e - \frac{2Ma}{r}l\right] \\
\frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{1}{\Delta}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)l + \frac{2Ma}{r}e\right]
\end{aligned}$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad ; \quad a = \frac{J}{M}$$