Oficina de Fractais

XX Simpósio Nacional de Ensino de Física

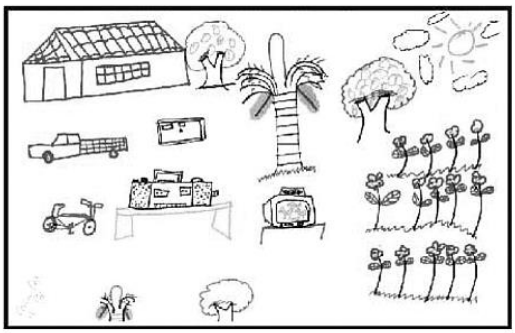
Prof. Dr. Maurício U. Kleinke - kleinke@ifi.unicamp.br;
Profa. Dra. Maria J. F. Gebara - mgebara@utfpr.edu.br
São Paulo, janeiro de 2012

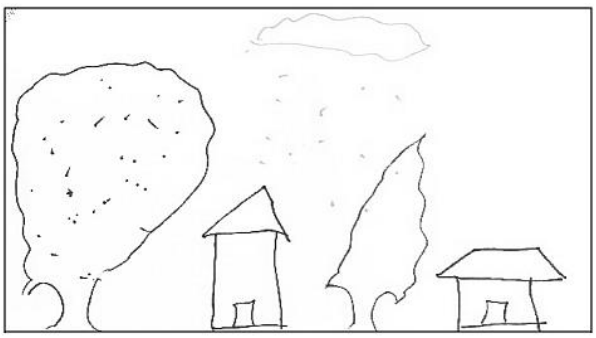
Maurício Urban Kleinke – kleinke@ifi.unicamp.br

Introdução

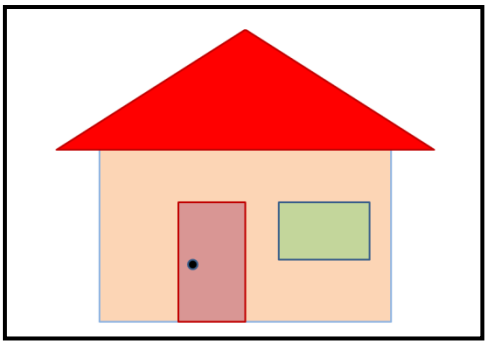
Por que estudamos? Por que ciência? Para podermos compreender melhor o mundo e viver melhor, com menos canseira e com mais coisas boas para serem feitas e apreciadas. Então um dos primeiros pontos para começar a entender ciência é entender o que está mais em volta da gente, desde muito pequeno.

O que é que está muito perto da gente desde que a gente é pequena? A nossa casa. Temos abaixo dois desenhos de casas, um desenhado por crianças guaranis e outro desenhado por crianças da cidade (Grubits, 2003)



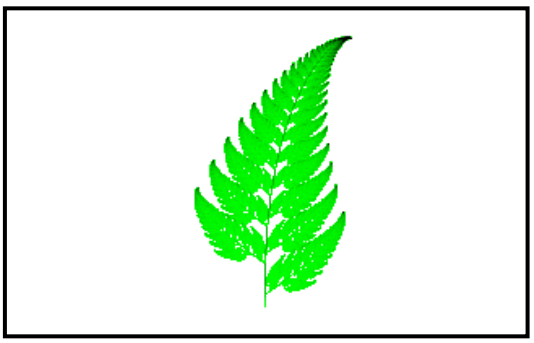


Primeiro, é fácil ver qual é o desenho da criança da cidade, não? Vamos agora observar o que os desenhos tem em comum, que são as casas, as árvores e as nuvens. As casas são desenhadas como? "retinhas" em geral, com figuras geométricas. A casa poderia ser desenhada no computador



Tudo bem, até fica parecida com as casas, mas e as árvores? É tão fácil assim desenhar uma árvore ou uma nuvem no computador?

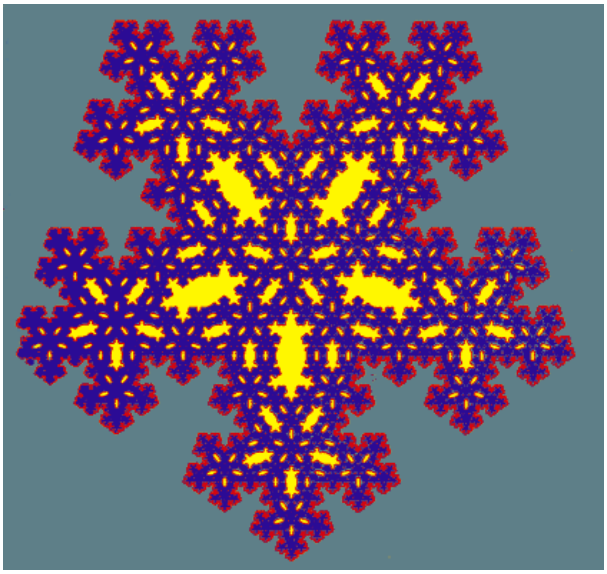
A nuvem ainda pode ser, é fazer um monte de redondos, mas e as árvores, com as ramificações, galhos e folhas? Essas estruturas mais complexas na natureza apresentam um pouco de características fractais, podem ser desenhadas utilizando técnicas fractais (thinkquest.org).



Bem, vocês devem estar se perguntando o que vem a ser fractais, já que eu iniciei falando em técnicas fractais sem dizer o que eram... Mas se vocês observarem as duas imagens anteriores, temos uma grande diferença entre elas, a casa é formada por formas geométricas, a samambaia fractal não! Nós observamos o mundo muito a partir de conhecimentos que foram desenvolvidos pelos gregos, onde uma de suas contribuições mais geniais são as figuras geométricas, a geometria Euclidiana. Essa geometria é o que descreve triângulos, quadrados, e uma série de outras configurações geométricas que balizam nosso universo. O tamanho da folha de papel onde vocês estão lendo esse texto ou a tela do computador apresenta relações geométricas que vem nos acompanhando desde que temos uma cultura de formas e observações.

Fractais

Ainda sem uma definição mais precisa de fractais, vamos observar um trabalho muito curioso de meio milênio atrás, onde o pintor Albrecht Dürer (que também era um bom matemático!) discutia interações repetitivas em um pentágono. De um pentágono inicial, eram retirados cinco triângulos, formando outros seis pentágonos menores, e repetindo a operação sucessivamente em cada um dos novos pentágonos formados (Havlin, 1995)



Seu estudo sobre pentágonos gerou o primeiro ou um dos primeiros fractais determinísticos da história!! Há controvérsias sobre quem teria desenvolvido esta estrutura, se teria sido mesmo Dürer ou teria sido outra pessoa. Enfim, o pintor holandês foi o primeiro a apresentá-lo para um público mais amplo!!

Mas, o que são os fractais? A palavra "fractal" foi proposta por Benoit Mandelbrot, na década de 1960, a partir da palavra latina "fractus" (quebrado), para caracterizar objetos/formas com natureza fragmentada e irregular. Vamos começar dizendo o que não são fractais, as figuras geradas por formas Euclidianas não são fractais. Uma forma de pensar é que em geral, os fractais parecem ser "ásperos", enquanto as formas Euclidianas parecem "lisas", assim como as árvores parecem ásperas quando comparadas com as casas. Outra característica importante é o fato de que os fractais são similares e apresentam escalas. O que quer dizer isso? Você já olhou para nuvens isoladas no céu, não? E já ficou imaginando bichos, mas não é isso o que nos interessa. Se você olhar uma nuvem separada no céu, você não vai saber se ela é grande ou pequena, não? Pois isso é o fato de que elas apresentam similaridade, que é outra característica dos fractais. Agora se você separar um pedacinho pequeno da nuvem e olhar para ele, você vai enxergar algo muito parecido com a mesma nuvem, não concorda?

Compreender um fractal fica mais fácil com esses conceitos fundamentais : recursividade, escala e similaridade. Antes de conversar sobre esses conceitos, mas pensando nas palavras, vamos ver uma Receita de Fractal a seguir. Leia a receita na página seguinte e depois volte para continuar a conversa.

Como você observou, foi aplicada a mesma estrutura várias vezes, em cada pedaço da reta. Isso permitiu criar a seqüência de passos até gerar (após infinitos passos) uma estrutura fractal. Todos os fractais apresentam as características listadas abaixo:

Recursividade - Os fractais, quando os definimos de modo exato, são estruturas matemáticas, elas não existem na natureza. E quais as características dessas estruturas matemáticas? A primeira é que a forma de gerar essas figuras é distinta do formalismo tradicional, a partir de uma função ou de um modelo bem estabelecido, em geral fácil de desenhar, elas são geradas em processos que se repetem infinitas vezes. Existe uma estrutura geométrica chamada de *iniciador* e outra chamada de *gerador*. O gerador é aplicado sobre o iniciador infinitas vezes, até obtermos o fractal. Como vocês viram na Receita de Fractal, é óbvio que não é possível repetir algo infinitas vezes, então, são desenvolvidas técnicas matemáticas para estimar o que aconteceria caso o processo fosse repetido infinitas vezes. Outro aspecto é que essa repetição é iterativa, isso é,a próxima repetição depende da repetição anterior.

Escala - Se você pegar um pedaço pequeno do fractal da receita e ampliar, ele irá repetir o fractal anterior, esse é outro conceito importante, se você ampliar a escala de um fractal, sempre terá o mesmo fractal. Se você projetar um fractal em uma tela de cinema, numa tela de computador ou olhar com um microscópio um detalhe do fractal, irá observar a mesma coisa sempre!

Similaridade – A curva de Koch acima apresenta estruturas idênticas quando observada em diferentes escalas ou estágios de desenvolvimento. Já as nuvens e as árvores, por exemplo, apresentam estruturas similares quando observadas em escalas diversas, e esta é uma das mais importantes características fractais, sua capacidade de cada pedaço da estrutura ser similar ao todo.

Receita de Fractal:
Curva de Koch

separe um segmento de reta

corte esse segmento em três partes

acrescente um quarto segmento de reta

pegue o pedaço extra e forme uma "ponta"

agora, temos quatro segmentos de reta
repita a operação em cada um deles

e continue repetindo o procedimento

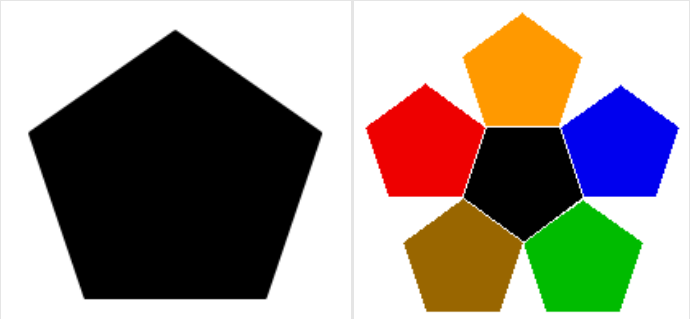
outra vez

e mais uma

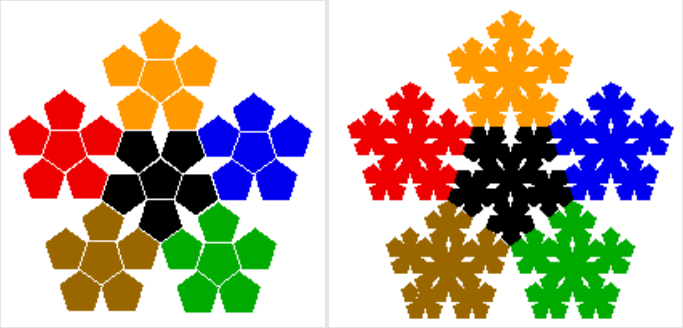
após infinitos passos, temos
nosso primeiro fractal:
a curva de Koch

Receita de Fractal:
Pentágono de Dürer

separe um pentágono
recorte os cantos gerando novos pentágonos



agora,temos 6 pentágonos menores
recorte, então, cada um dos pentágonos menores



continue separando os pentágonos
em infinitas iterações

Medidas Grandes e Pequenas

Vimos que os fractais podem ser observados em escalas muito grandes ou muito pequenas. Medir coisas grandes ou pequenas é uma complicação, porque em geral associamos coisas grandes ou pequenas a nosso tamanho, o que é maior que nós é "grande", e o que é menor que nós é "pequeno". Por isso pequeno e grande são palavras muito ruins para serem usadas em ciência, elas dependeriam, por exemplo, do tamanho de quem fala.

Para conseguirmos minimizar isso, usamos unidades de comprimento. Você mede perto de 1,70 m de altura, essa sala apresenta 4,5 m de altura, a folha de papel tem mais ou menos 0,3 m de altura, e a sua unha tem um tamanho de 0,015 m. Do alojamento para aqui vocês se deslocaram mais ou menos uns 16000 m, e se moram em um prédio alto ele pode ter perto de 100 m de altura, sem contar que um fio de cabelo de vocês apresenta um tamanho de 0,00005 m. Quantos números, não? Vamos colocar todos os valores desse parágrafo em uma tabela:

O que medimos	Tamanho, distância, comprimento, altura, etc
Alojamento/USP	16.000 m
Prédio	100 m
Anfiteatro	4,5 m
Estudante	1,70 m
Unha	0,015 m
Fio de cabelo	0,00005 m

Como os profissionais de diferentes áreas e os cientistas necessitam trabalhar com variações de números até maiores que essas, desenvolveram uma técnica para facilitar essas medidas, eles contam quantas vezes temos que multiplicar por dez ou dividir por dez os números. Preencha os números faltantes, de acordo com o exemplo

O que medimos	Tamanho, etc	L(m)	L(m)
Alojamento/USP	16.000 m	1,6 x 10 x 10 x 10 x 10	$1,6 \times 10^4$
Prédio	100 m		
Anfiteatro	4,5 m		
Estudante	1,70 m		
Unha	0,015 m	1,5/10/10	$1,5 \times 10^{-2}$
Fio de cabelo	0,00005 m		

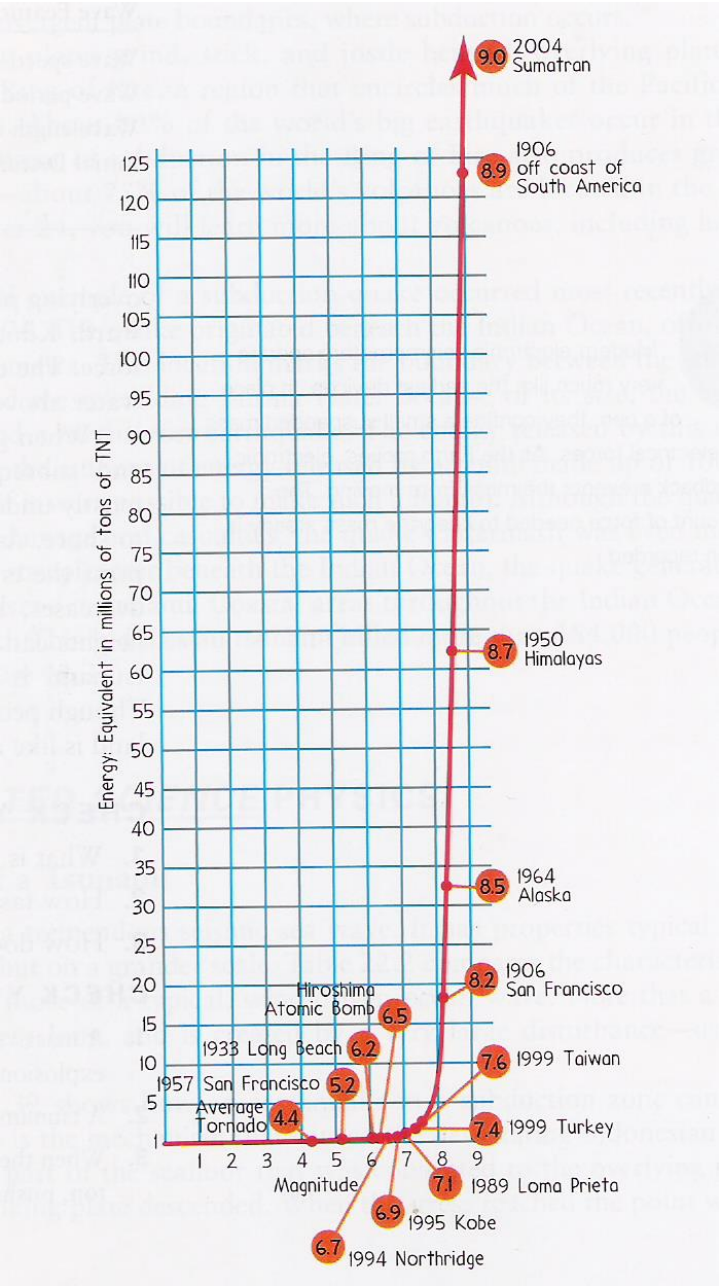
E o número de vezes que se multiplica por dez aparece como positivo no expoente de 10 e quando se divide por dez, como valor negativo no expoente. É habito dizer dez elevado à dois, ou dez elevado à menos cinco para definir esses valores. Por definição, qualquer número elevado a zero é igual a um. Outra vantagem é que quando dividimos por dez e multiplicamos por dez temos o mesmo número, ou seja, podemos somente somar os números dos expoentes, o que simplifica enormemente algumas outras contas!

Vejam uma coisa impressionante, precisamos de um bilhão de fios de cabelo lado a lado para obtermos mais ou menos a distância do alojamento até aqui! Em vez de escreveremos 1.000.000.000 de fios de cabelo podemos escrever simplesmente 10^9 fios de cabelo, muito mais econômico e elegante, não?

Números muito grandes e escalas logarítmicas

Todos nós já ouvimos falar da escala Richter para medir a intensidade de terremotos. O que pouca gente sabe é que essa escala é uma escala logarítmica, isto é, a quantidade de energia despendida em um terremoto com 9 pontos na escala Richter é dez vezes maior que um terremoto com 8 pontos na escala Richter. O gráfico ao lado apresenta alguns dos terremotos mais importantes. Observe que são muito mais potentes que a bomba nuclear lançada em Hiroshima (Paul G. Hewitt).

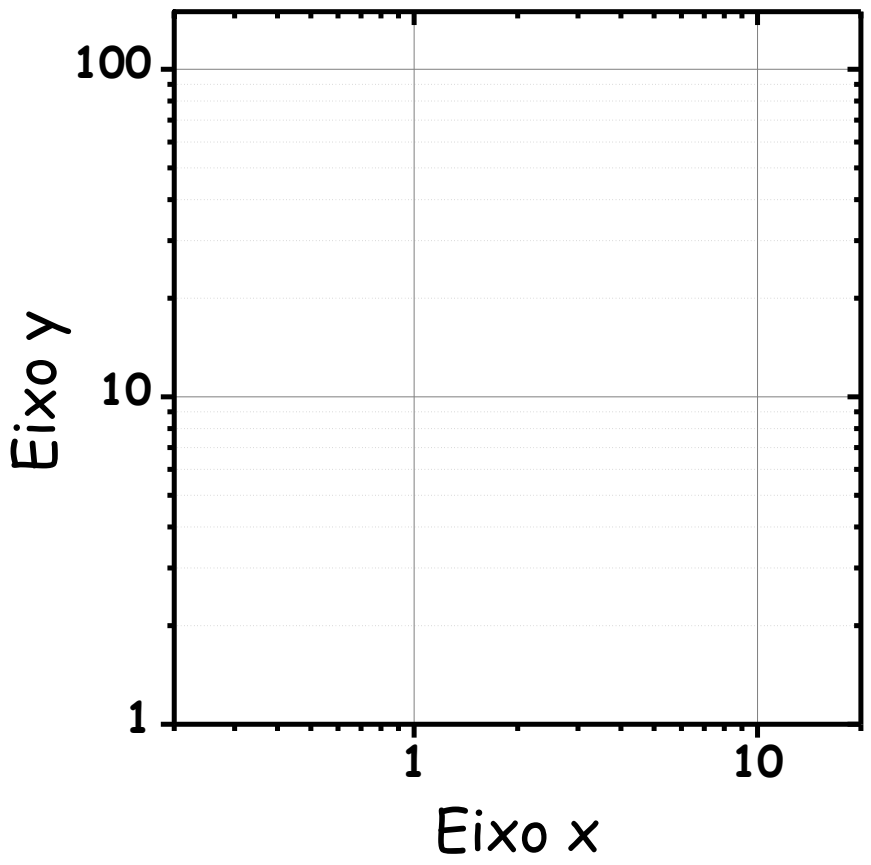
Mas, o que vem a ser uma escala logarítmica, um logaritmo? Textos babilônicos de aproximadamente 600 anos AC apresentavam a pergunta (traduzida para nossa matemática linguagem atual) *"A que potência deve ser elevado um certo número para fornecer um número dado?".* A resposta é a definição de logaritmo. A idéia dos logaritmos foi de extrema utilidade antes de surgirem as calculadoras eletrônicas e os computadores, pois permitia realizar cálculos complexos com maior facilidade e rapidez.



De uma maneira muito simplificada e já conduzindo a discussão para nossas necessidades com os objetos fractais, vamos definir como utilizar o logaritmo, o qual depende muito de um parâmetro de controle, que é a sua base. Em nosso caso, vamos utilizar uma base igual a dez. Quando falarmos em logaritmo, estaremos falando em logaritmo de base dez. Aplicar o logaritmo de base dez a um número significa obter o expoente a que devemos elevar 10 de forma a obter o mesmo número. Por exemplo, a altura do prédio de 100 m pode ser escrita como 10^2, então temos que $\log_{10}(10^2)=2$. A nossa tabela de distâncias pode agora ganhar mais uma coluna, o cálculo do Logaritmo do número.

O que medimos	Tamanho, etc	L(m)	L(m)	$Log_{10}(L)$
Alojamento/USP	16.000 m	1,6 x 10 x 10 x 10 x 10	$1,6 \times 10^4$	4,2
Prédio	100 m	1,0 x 10 x 10	$1,0 \times 10^2$	2,0
Anfiteatro	4,5 m	4,5	$4,5 \times 10^0$	0,65
Estudante	1,70 m	1,7	$1,7 \times 10^0$	0,23
Unha	0,015 m	1,5/10/10	$1,5 \times 10^{-2}$	-1,82
Fio de cabelo	0,00005 m	5,0/10/10/10/10/10	$5,0 \times 10^{-5}$	-4,3

Uma alternativa ao se calcular o logaritmo do número é utilizar um gráfico em escala logatítmica, o que ele faz é simplificar o nosso trabalho, fazendo as contas logarítmicas de maneira que possamos enxergar o resultado de forma mais simples. Veremos um exemplo abaixo, mas não se preocupe, quando necessitarmos dele, vamos compreender melhor.

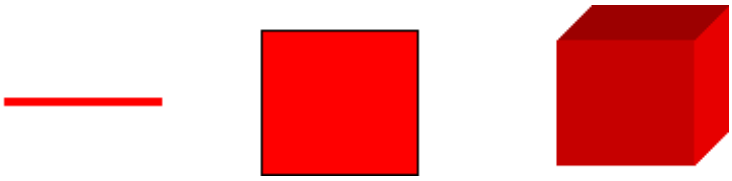


Observe que a distância de 1 até 10 é igual à distância de 10 até 100, pois a distância de $Log_{10}(1)$ até $Log_{10}(10)$ é a mesma que distância de $Log_{10}(10)$ até $Log_{10}(100)$, pois $Log_{10}(10^0)=0$, $Log_{10}(10^1)=1$ e $Log_{10}(10^2)=2$.

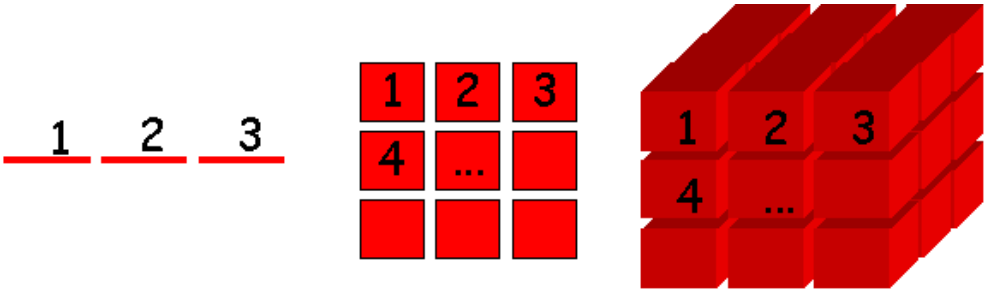
Dimensões Euclidianas

Veja, falamos sobre fractais, mas todos nós que já ouvimos falar em fractais ouvimos falar também em dimensão fractal. E na verdade, é necessária alguma maneira de caracterizar melhor os fractais, afinal, como vou saber se algo é fractal só porque é construído por um processo recursivo de repetições? Pode não ser fractal. Para compreender a dimensão fractal, vamos entender melhor a dimensão Euclidiana. O que é uma dimensão Euclidiana? É como um objeto Euclidiano ocupa o espaço: uma reta ocupa uma dimensão; já um círculo ou um triângulo necessita de um plano, logo, de duas dimensões e um cubo necessita de três dimensões para existir. Podemos imaginar, de forma muito aproximada, que um segmento de reta "cabe" em um lápis, um triângulo "cabe" em uma folha de papel e uma esfera "cabe" em uma caixa.

Mas como definimos exatamente a dimensão Euclidiana? Para isso vamos utilizar os elementos Euclidianos mais simples para cada dimensão, ou seja uma uma reta, um quadrado e um cubo



Podemos definir um comprimento inicial igual a um para cada um desses objetos. Depois cortamos o objeto em um novo comprimento, por exemplo, um terço do comprimento inicial.



Vamos contar os novos elementos formados:

- para a reta temos 3 novas retas;
- no caso do quadrado, temos 9 novos quadrados
- e para o cubo 27 novos cubos

E qual é a massa de cada elemento novo, em função do elemento inicial?

- as novas retas apresentam massa igual à 1/3 da inicial
- os novos quadrados tem massa igual a 1/9 do quadrado inicial
- e os cubinhos tem massa igual a 1/27 do cubo de origem.

Toda esta discussão estranha sobre comprimento e massa é para podermos definir dimensão: **dimensão** é a medida de como a massa de um objeto varia em função do seu comprimento.

Vamos escrever a expressão acima da seguinte forma:

$$M = L^{DE}$$

E agora podemos aplica a nova expressão que aprendemos, logaritmo na equação acima

$$Log_{10}(M) = Log_{10}(L^{DE}) = DLog_{10}(L)$$

Ou seja, você pode isolar a dimensão na expressão anterior e ter como valor para a dimensão

$$DE = \frac{Log_{10}(M)}{Log_{10}(L)}$$

Temos que, para retas, quadrados e cubos, a variação da massa e do comprimento pode ser escrita como

Objeto	Comprimento	Massa
Reta	1/n	1/n
Quadrado	1/n	$1/n^2$
Cubo	1/n	$1/n^3$

Aplicando a operação matemática, e utilizando algumas propriedades dos expoentes, onde 1/n pode ser escrito como n^{-1}, temos que as dimensões para retas, quadrados e cubos são dimensões iguais a um, dois e três, como esperávamos. Essas são as dimensões Euclidianas.

Dimensão Fractal

Vamos olhar novamente a curva de Koch, medindo o comprimento e a massa dos pedaços em relação ao fractal completo em cada etapa:

	n=0	L = 1	M = 1
	n=1	L= 1/3	M = ¼
	n=2	$L=(1/3)^2$	$M= (1/4)^2$
	n=3	$L=(1/3)^3$	$M= (1/4)^3$
	n=4	$L=(1/3)^4$	$M= (1/4)^4$
	n	$L=(1/3)^n$	$M= (1/4)^n$

Os fractais determinísticos são as figuras fractais mais fáceis de serem geradas, assim como de serem caracterizadas. Um dos exemplos mais clássicos de um fractal determinístico é a curva de Koch, da qual já vimos a receita anteriormente

Como podemos observar, quanto maior a iteração, mais complexo é o fractal, maior o seu perímetro!!!
Como caracterizar esta "curva monstruosa"? Vamos utilizar uma analogia com o cálculo da dimensão Euclidiana, onde $M = L^D$, de tal forma que poderíamos ter uma equação do tipo $M = L^{DF}$, para calcular agora a dimensão fractal.

Para o caso da curva de Koch, teríamos que

$$DF = \frac{\log_{10}(M)}{\log_{10}(L)} = \frac{\log_{10}\left(\left(1/4\right)^n\right)}{\log_{10}\left(\left(1/3\right)^n\right)} = \frac{\log_{10}(4^{-n})}{\log_{10}(3^{-n})} =$$

Não se assuste com a matemática, não será fortemente utilizada, precisamos só um pouco desses conceitos!!

Ainda operando com logarítmicos, temos

$$DF = \frac{\log_{10}(4^{-n})}{\log_{10}(3^{-n})} = \frac{-\mathrm{n}\log_{10}(4)}{-\mathrm{n}\log_{10}(3)} = \frac{\log_{10}(4)}{\log_{10}(3)} = \frac{0{,}60\ldots}{0{,}48\ldots} = 1{,}261\ldots$$

Veja que fantástico o valor da DF da curva de Koch, ela é entre um e dois, e é um número bem quebrado. Isso quer dizer que esse fractal "passa", "escapa" de uma reta (dimensão igual a um), porém não chega a "preencher uma folha", é menor que a dimensão Euclididana igual a dois.

Procure voltar agora a seu fractal desenhado e tente estimar o quanto seria a dimensão fractal do mesmo, defina os parâmetros de massa e comprimento.

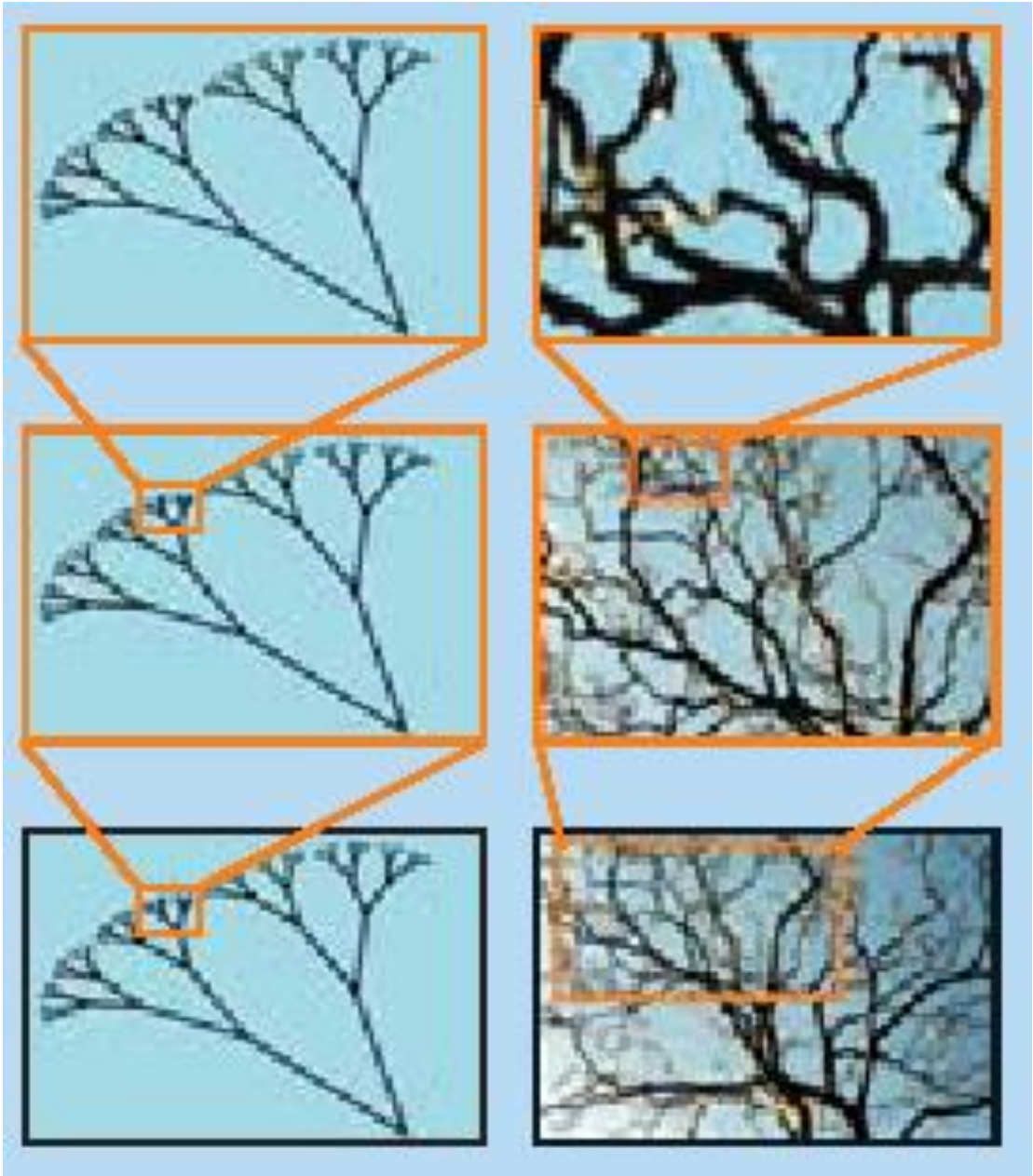
Utilize a tabela de $\log_{10}$ para auxiliar a medida.

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Log_{10}	0,00	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95	1,00

Praias e fractais

Os fractais são estruturas com similaridade exata (no caso matemático) ou estatística (no universo real que nos cerca). Uma pequena parte do fractal repete a mesma estrutura do todo. Esta repetição pode ser matemática ou natural, como no exemplo abaixo (Taylor). Temos uma árvore gerada matematicamente e uma árvore real, e podemos observar que quando trocamos de escala, os fractais matemáticos se repetem exatamente e os fractais naturais apresentam uma estrutura similar, parecida.

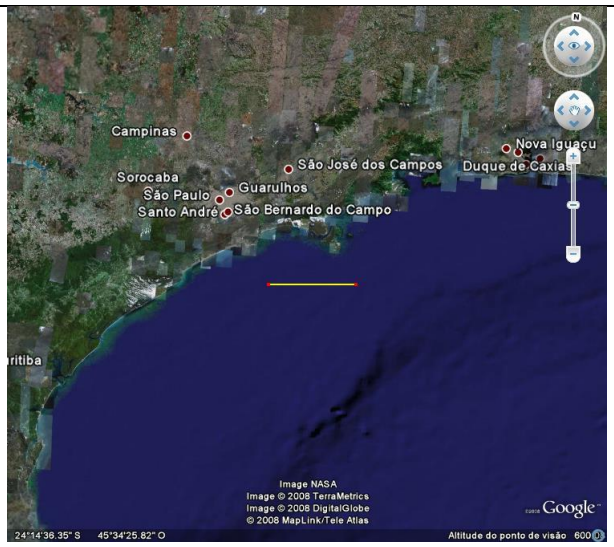
Fractais naturais presentes em nosso cotidiano poderiam ser nuvens, couves-flores ou samambaias. Estas estruturas fractais são absolutamente comuns na natureza, sendo observadas nas árvores, nas nuvens, no corpo humano, na distribuição de minerais, enfim, em todo o mundo que nos cerca, inclusive nós mesmos.

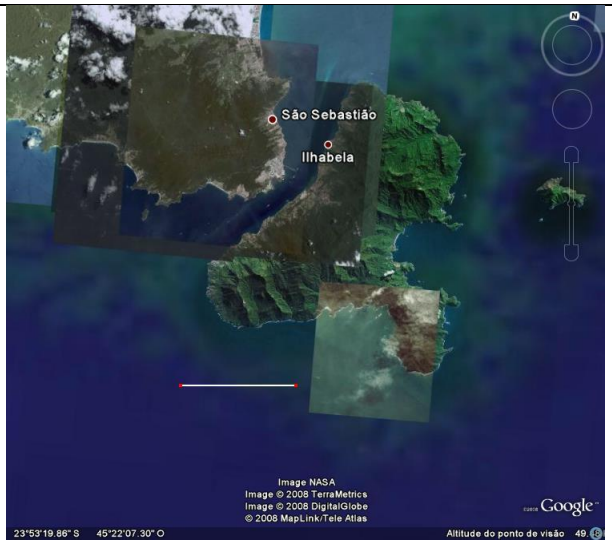


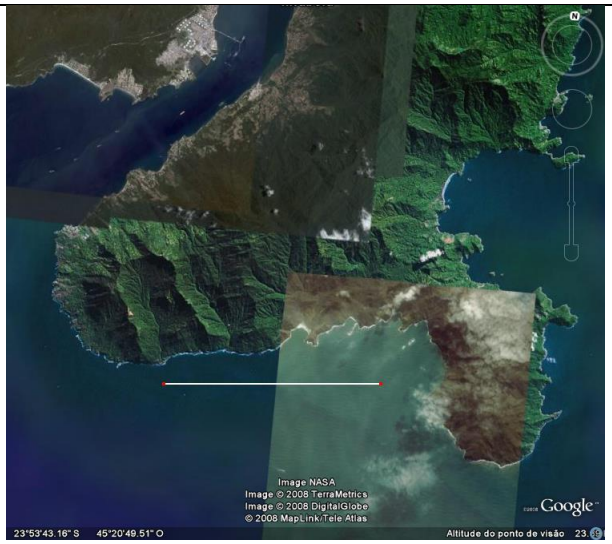
Mas o que as praias tem a ver com os fractais? Um dos primeiros trabalhos sobre fractais foi realizado por Richardson em um trabalho em 1961, onde ele estava interessado na relação entre os conflitos militares e as disputas econômicas entre países e o comprimento de suas fronteiras (Richardson). Muito rapidamente ele fez uma descoberta muito interessante, que o comprimento da fronteira (o perímetro do país) dependia muito da escala do mapa utilizada, associada ao cuidado em realizar as medidas.

Ele mediu diferentes fronteiras, de países e de ilhas com essa análise, variando o tamanho da régua, como se fossem compassos com diferentes aberturas para medir a costa das ilhas, ou mais precisamente, o perímetro das ilhas (ou países)

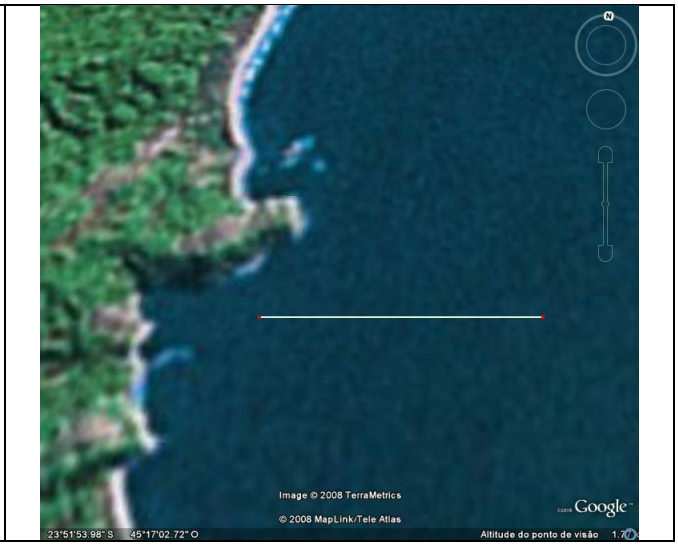
As imagens abaixo foram obtidas na rede (Google), e mostram a costa atlântica de São Paulo, mais precisamente a região próxima a Ilhabela. Nas primeiras duas imagens, a escala marcada é de 100 km, enquanto nas outras duas imagens é de 10 km.



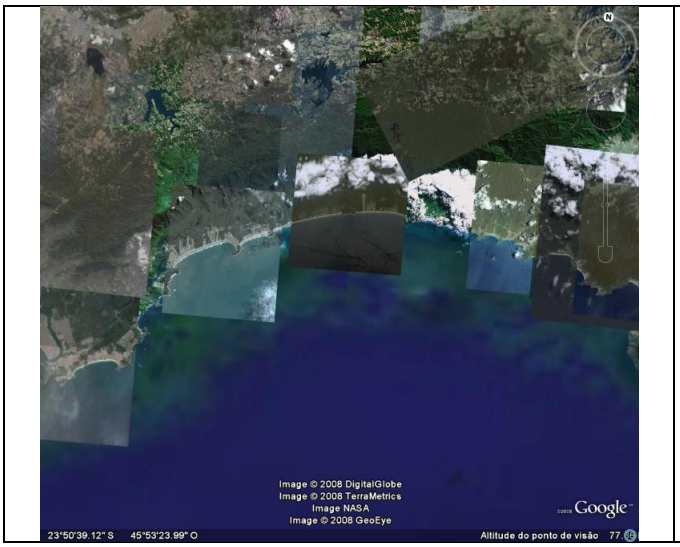


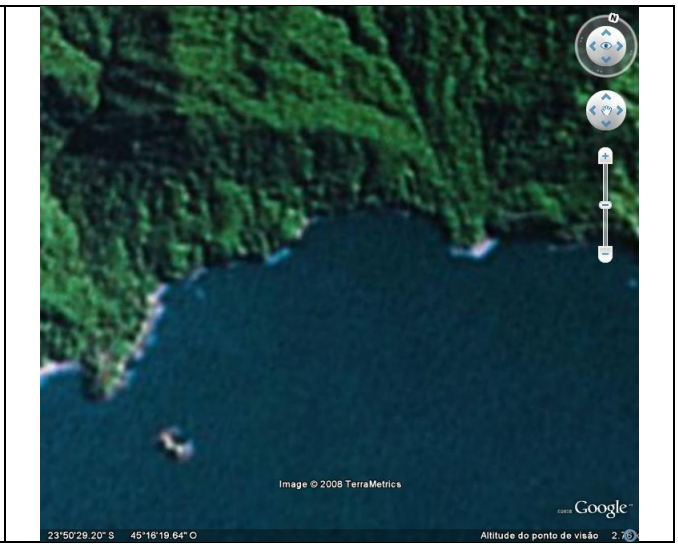


Se continuarmos descendo no tamanho da imagens, temos a baia com uma escala de 1 km, e já podemos ver as ondas, ou pelo menos, a região de arrebentação. Quanto mais próxima a imagem, maior a precisão, mais detalhes vemos e mais longo será o perímetro da costa, pois observaremos mais detalhes.



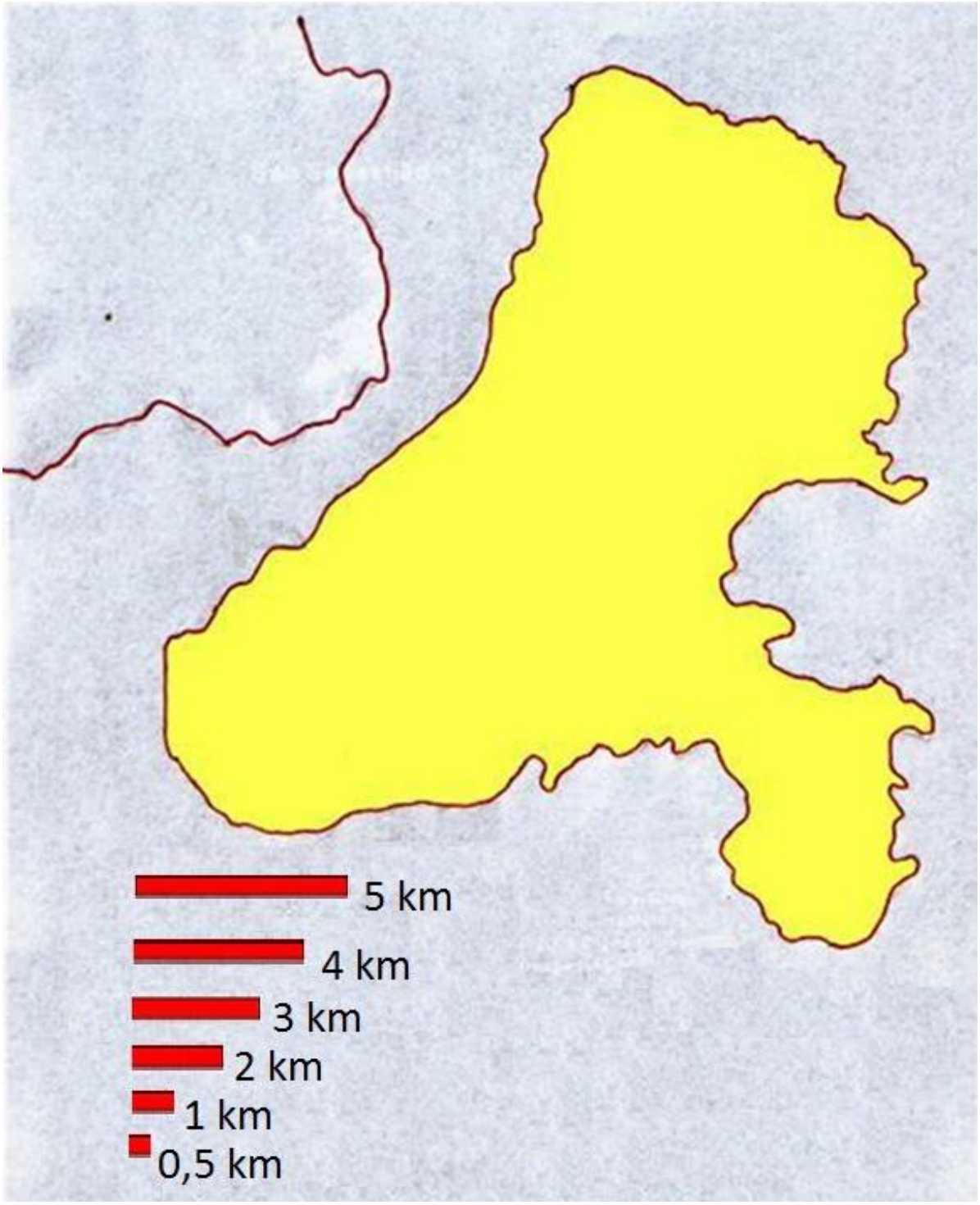
É interessante notar que as costas apresentam baías com estruturas com características fractais, pois as imagens das costas são semelhantes em escalas distintas, como podemos observar de duas observações, uma a 77 km e outra a 3 km de altitude em relação ao nível do mar. Óbvio que elas não são tão iguais quanto os fractais matemáticos, mas assim como as nuvens e as árvores, elas apresentam similaridade em escalas distintas, uma imagem lembra a outra. Se vocês traçarem somente o perfil da praia, vão observar que elas ficam ainda mais parecidas!!



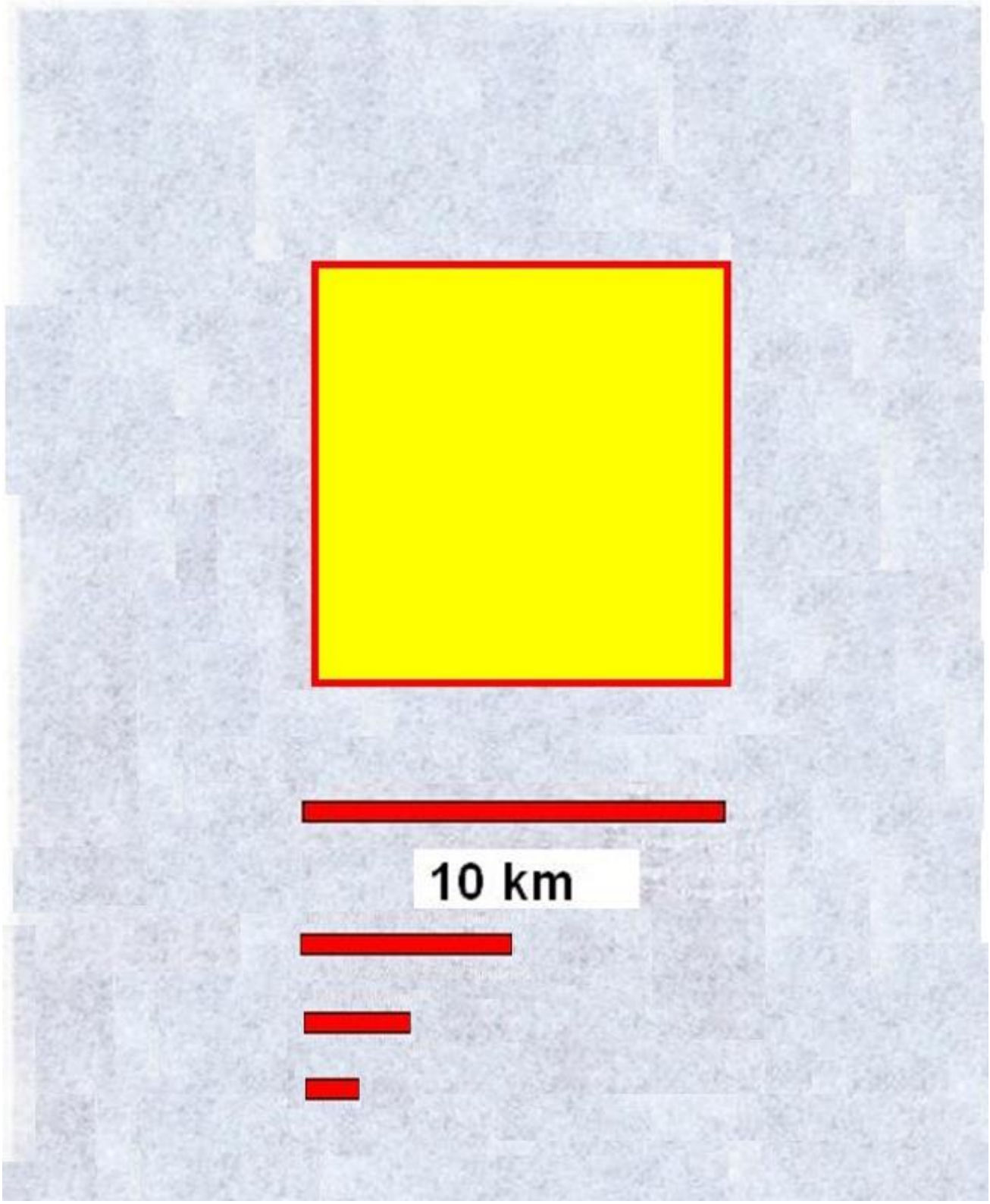


Medindo o comprimento da costa de Ilhabela

Não sei se vocês já foram para Ilhabela, em São Sebastião, ela apareceu em algumas das imagens anteriores. Um detalhe somente do perfil está preparado para facilitar o trabalho de medida do comprimento da costa. A escala em cima da ilha indica um comprimento de 10 km. Vocês vão medir o perímetro da ilha com essa unidade de 10 km, e depois, vão dividir na metade a “régua”, passando para 5 km, repetir a medida da ilha, depois dividir de novo, até chegar a 1,25 km. Vamos ver como o perímetro varia em função do tamanho da régua.



Você pode repetir agora o mesmo raciocínio para uma figura Euclidiana, um quadrado, que vai ter perímetro muito simples de ser medido...

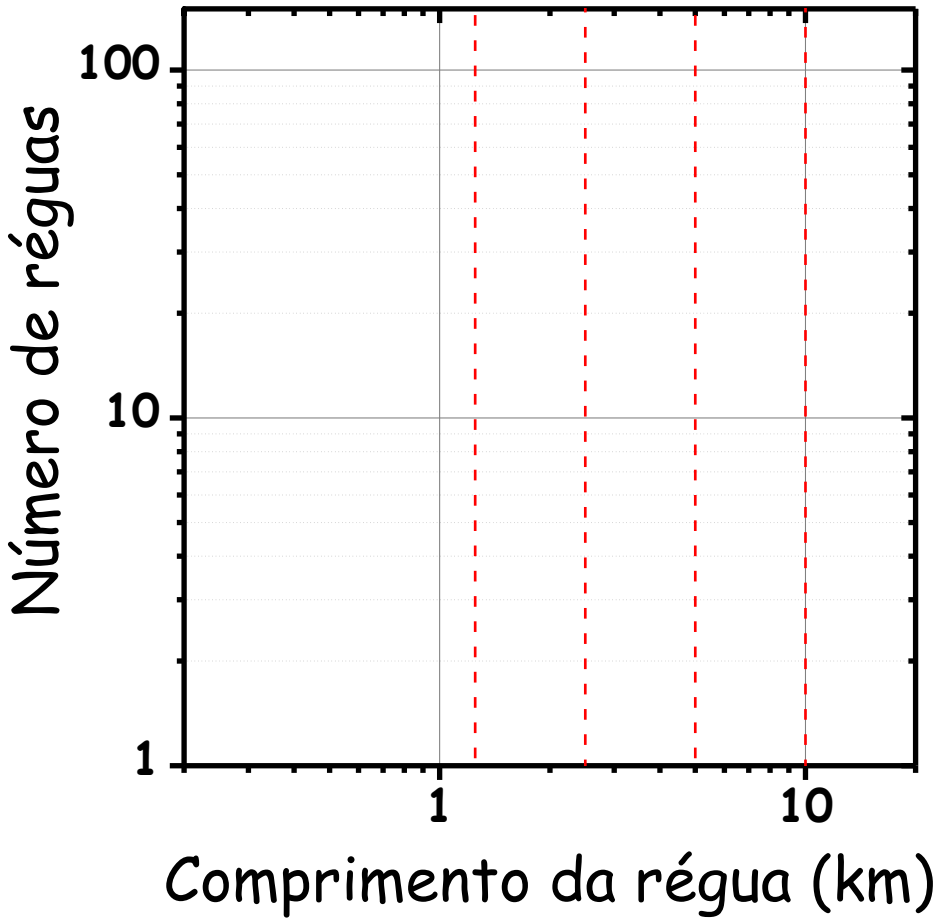


E agora vamos utilizar os dados dessas medidas para montar um gráfico em escalas logarítmicas do perímetro (P, medido em número de réguas) em função do comprimento das réguas (L), para calcular a dimensão fractal (DF) do perímetro da ilha, que pode ser obtida da expressão:

$$P = L^{-DF}$$

Tamanho da régua (L) (km)	Perímetro da ilha (P) (réguas)	Perímetro do quadrado (P) (réguas)
10		
5,0		
2,5		
1,25		

As linhas auxiliares indicam os valores das medidas de comprimento utilizadas.

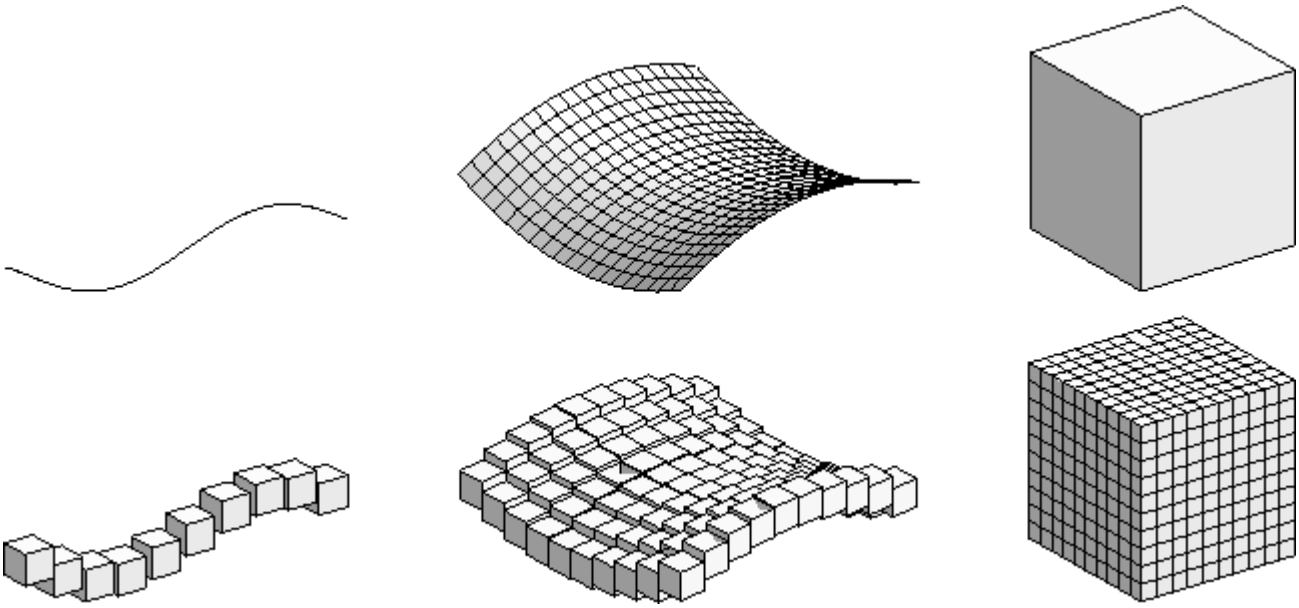


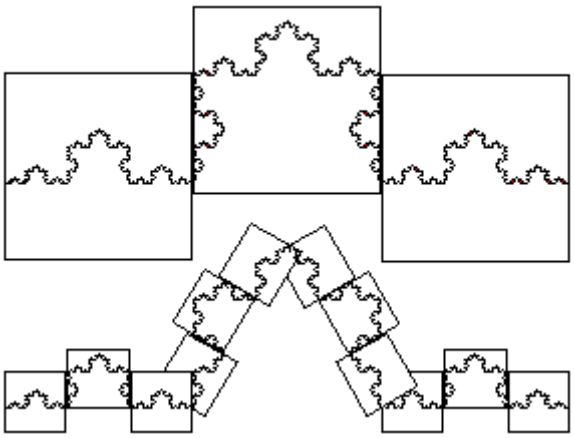
É interessante observar que na medida anterior estávamos preocupados com a medida da massa de cada pedaço em função do tamanho dos pedaços do fractal, agora, estamos contanto o número de pedaços de um contorno, e é fácil imaginar que, quanto maior o tamanho da régua, menor o número de pedaços medidos. Por isso é que a expressão agora é com expoente negativo no comprimento

A dimensão fractal será dada pela inclinação do gráfico, que você pode medir com sua régua.

Medindo a área de Ilhabela

Uma outra forma de calcular a dimensão fractal é a contagem de caixas. Essa idéia consiste em fazer uma grade sobre o fractal, onde o espaço de cada quadrado entre as linhas pode ser visto como uma "caixa". Após desenharmos a caixa, é contado o número de caixas "cheias" pelo fractal. O esquema abaixo sugere como funciona a transformação do fractal em "caixas".



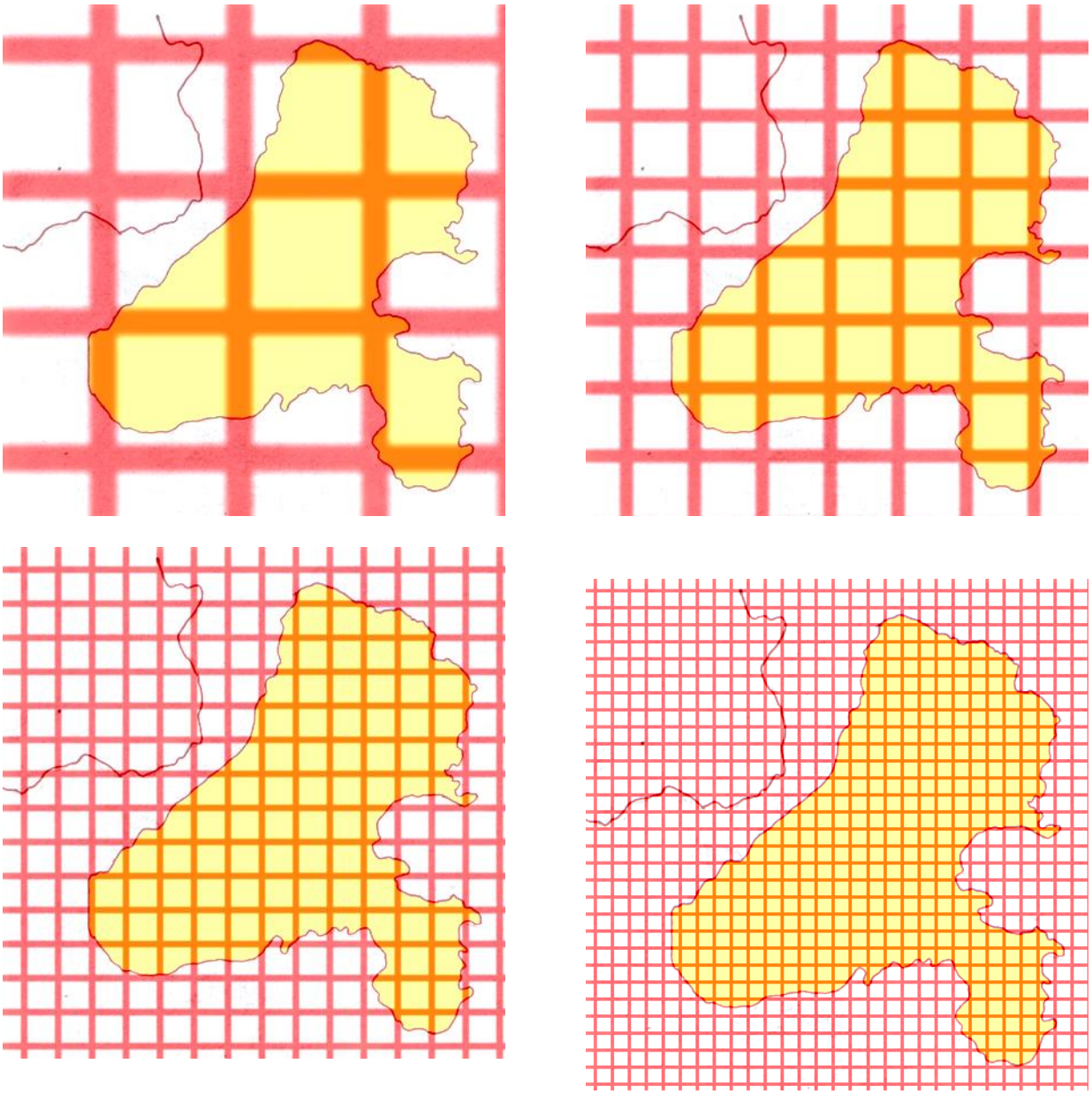


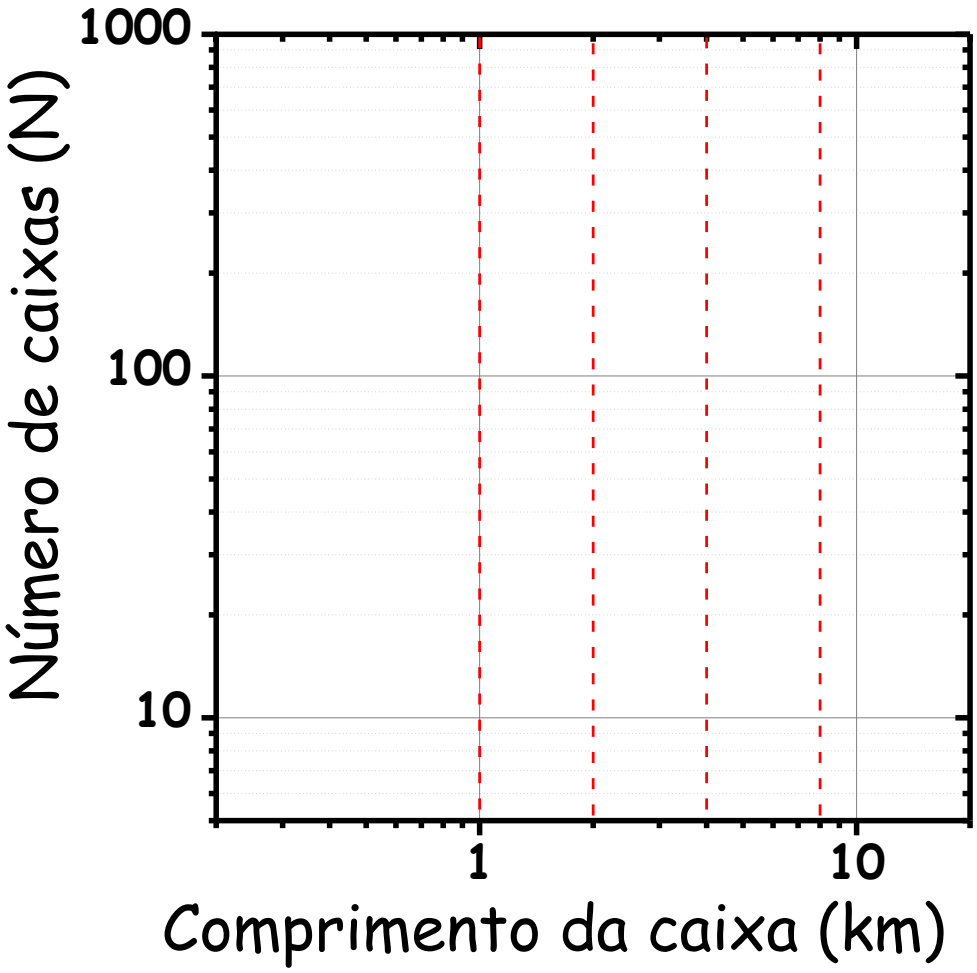
A idéia é contar o número de caixas (N) de certo tamanho (L) que você necessita para "guardar" todo o fractal nas caixas

$$N = L^{-D}$$

A imagens a seguir são alguns contornos de Ilhabela, agora com uma grade sobreposta à ilha, e vocês vão medir quantas das grades tem pedaços "em terra", preenchidos, para cada tamanho de grade. A maior das grades tem aproximadamente 8 km, e as demais vão caindo sempre à metade, o que vocês devem fazer é contar quantos são os quadrados preenchidos para cada uma das imagens e completar a tabela e o gráfico apresentado a seguir.

Comprimento da caixa (L) (km)	Número de caixas (N)
8	
4	
2	
1	





Esferas fractais

Já vimos que existem objetos fractais matemáticos formados por linhas e por áreas; vimos que contornos de ilhas podem também ser descritos como fractais, mas existem objetos fractais tridimensionais, no nosso universo? Dentro de uma faixa de valores de medidas e de tamanhos, sim. É possível achar objetos com comportamento fractal em uma certa escala. Óbvio que sempre que se for para uma escala muito grande ou muito pequena, provavelmente o objeto não apresentará características fractais.

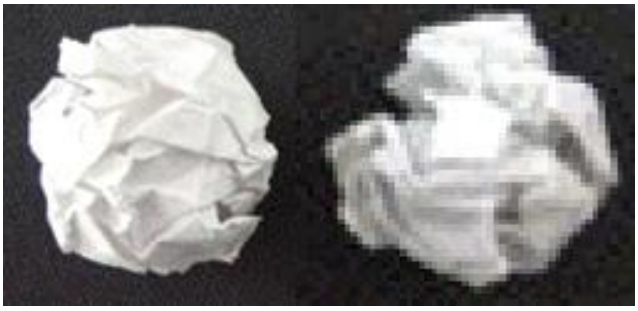
Para compreender melhor como temos dimensão maior que dois em fractais, vamos criar uma esfera fractal de papel amassado, e medir a dimensão fractal dessa esfera fractal.

Esse experimento pode ser realizado com qualquer papel, já fiz em casa, com jornal rasgado na mão e funcionou bem, deu resultado. Olhem o material que utilizei, acredito que todos tenham em casa!

Como vocês podem perceber na figura, as esferas de papel amassado não preenchem todo o espaço, elas apresentam espaços ocos, sem preencher. Porém, elas não "cabem" na mesa, não param na superfície da mesa, isto é, elas apresentam uma dimensão maior que dois. Mas também elas tem regiões não completamente ocupadas, elas tem buracos no espaço tridimensional, como os tapetes de Sierpinski tem buracos no espaço bidimensional e o atrator de Cantor tem buraco no espaço unidimensional.

Vamos começar olhando para as esferas de papel amassado e ver se elas apresentam outras características fractais.

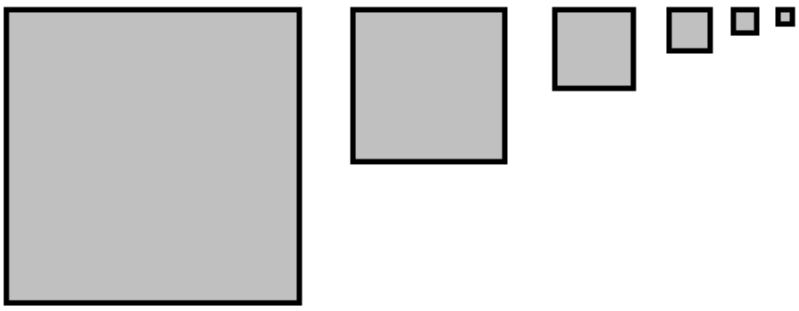
Observem essa seqüência de esferas. Temos uma variação de escala entre elas, os tamanhos diminuem. Prestem atenção em um detalhe: elas são similares, se você olhar uma delas separadamente não é imediato o reconhecimento da ordem. Isto sinaliza características fractais nas esferas de papel. Agora podemos ampliar a última para comparar com a primeira



Apesar de estar um pouco desfocada, percebemos que as duas esferas são muito parecidas, o que é uma característica fractal.

O que isto significa que essas esferas são fractais? Significa que o espaço não é totalmente ocupado, que o papel apresenta uma distribuição espacial própria, associada à suas características físico-químicas, limitada pela capacidade de torção, compressão das fibras, elasticidade, etc.

Vamos aproveitar para rememorar a discussão sobre dimensão Euclidiana, medindo a dimensão dos quadrados de papel. Inicie a parte experimental dobrando e cortando uma das folhas que vocês receberam em quatro partes. Reserve um pedaço e corte novamente, até obter 6 quadrados de tamanho decrescente. Antes de amassar o papel para fazer as esferas fractais, meça o comprimento de cada aresta.

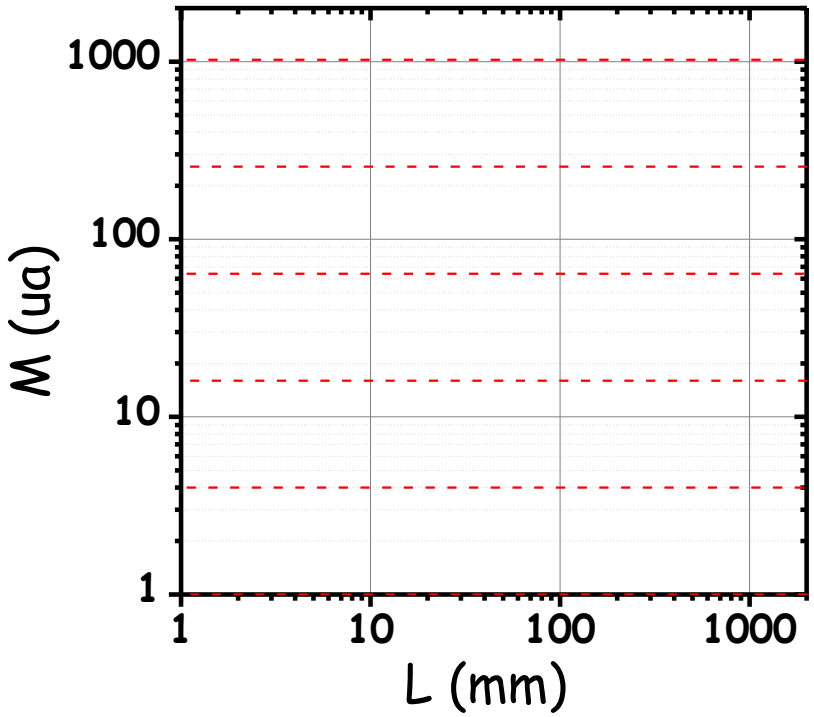


Como vamos calcular a massa dessas esferas? Poderíamos medir em uma balança, mas outro método é utilizar a medida da área, sabemos que o papel tem uma densidade uniforme dentro de uma mesma folha, logo, a massa pode ser calculada simplesmente pelo produto entre a área e a densidade.

E quanto vale a massa de cada uma? Sabemos que em cada corte, a massa dos quadrados menores é um quarto da massa do quadrado maior. Portanto, podemos escolher o valor da massa em uma unidade arbitrária, que eu defino como sendo um a massa do menor quadrado. A massa dos próximos quadrados é simplesmente multiplicar a massa inicial por quatro em cada iteração.

Massa da Esfera (ua)	Aresta do papel (mm)	Diâmetro da Esfera (mm)
1		
4		
16		
64		
256		
1024		

E agora temos que fazer as esferas fractais e medir os raios de cada uma. Como tem pedaços sobrando de papel, podemos fazer mais do que uma esfera das menores e medir mais do que um raio, calculando o raio médio. As massas já estão indicadas no gráfico pelas linhas auxiliares



Conclusão

Espero que vocês tenham aproveitado as discussões, realizado com algum prazer as medidas experimentais e tenham compreendido os princípios básicos dos fractais e como os fractais podem auxiliar a compreender melhor o mundo que nos cerca.

Bom encontro do XX SNEF a todos!!

Para saber mais

Leituras complementares (em português) podem ser encontradas em "A Outra Dimensão da Dimensão Fractal", Luciano F. Costa e Andréia G. C. Bianchi, *Ciência Hoje*, vol. 31, 183, pág. 40-47, 2002; ou ainda em "Fractais no Laboratório Didático", M. Amaku *et all*, Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 23, 4, 2001.

Existem muitas e muitas páginas na internet sobre fractais. O Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) tem uma página com alguns detalhes http://www.cbpf.br/~maysagm/. A página eletrônica da wikipédia apresenta algumas informações interessantes http://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal. Para começar a desvendar outros sites (em inglês) temos http://spanky.triumf.ca/ e http://sprott.physics.wisc.edu/fractals.htm.

Algumas visões curiosas sobre aplicação de fractais em outras áreas do conhecimento podem ser vistas nos trabalhos sobre pintura moderna "A ordem no caos de Jackson Pollock", Richard P. Taylor*, Scientific American Brasil,* janeiro de 2003. Outro trabalho interessante é a aplicação da distribuição fractal na caracterização de aldeias africanas e em artefatos artesanais africanos http://www.rpi.edu/~eglash/eglash.dir/afractal/afractal.htm .

Bibliografia

Google. (s.d.). *Google Earth*. Acesso em 23 de junho de 2008, disponível em Google Earth.

Grubits, S. (2003). A CASA: CULTURA E SOCIEDADE NA EXPRESSÃO. *Psicologia em Estudo* , 97-105.

Havlin, A. B. (1995). A Brief Introduction to Fractal Geometry. In: A. B. Havlin, *Fractals in Science.* Springer-Verlag.

Paul G. Hewitt, S. K. *Conceptual Integrated Science.* Pearson Addison Wesley.

Richardson, L. (s.d.). The problem of contiguity:An appendix of statistics id deadly quarrels. *General systems Yearbook* , pp. 139-187.

Taylor, R. P. (janeiro de 2003.). "A ordem no caos de Jackson Pollock". *Scientific American Brasil* .

thinkquest.org. (s.d.). Acesso em 02 de Maio de 2008, disponível em http://library.thinkquest.org/26242/full/ap/ap15.html