MÉTODOS EXPERIMENTAIS DA FÍSICA II - F640

CONDUTÂNCIA DE UM TUBO LONGO NO REGIME VISCOSO LAMINAR

Considere um gás escoando num tubo de seção reta circular e raio R, ao longo da coordenada y. A temperatura T é uniforme em todo o tubo e o regime é estacionário. Imagine um elemento cilíndrico deste gás, de raio s e comprimento dy, conforme mostra a Fig. 1. Chamando de F_1 e F_2 as forças devidas à pressão do gás que agem nas duas extremidades do cilindro e de F_v a força viscosa, teremos para os seus módulos:

$$F_1 - F_2 - F_v = 0$$

Mas como $F_1 = P\pi s^2$, $F_2 = (P + dP)\,\pi s^2$ e $F_v = \eta A(dv/ds)$, sendo P a pressão, η o coeficiente de viscosidade, A a área lateral do cilindro e v a velocidade de deslocamento do

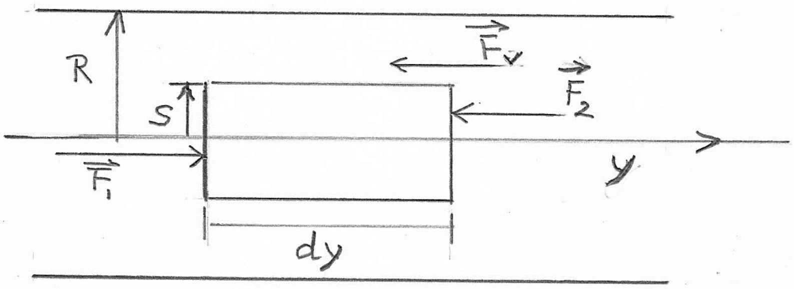

Figura 1

gás, a substituição destas tres equações na de cima e o rearranjamento de termos resulta em

$$dv/\underset{ds}{\cancel{dy}} = -\,(s/2\eta)(dP/dy).$$

Integrando:

$$v = -(1/2\eta)(dp/dy)\int_s^R s\,ds = -(1/4\eta)(dP/dy)[R^2 - s^2] \qquad (1)$$

pois dP/dy não depende de s. O campo de velocidades é portanto uma parábola, conforme indicado na Fig. 2.

Consideremos agora uma casca cilíndrica de volume dV, cujo eixo de simetria é o mesmo do tubo, mostrado na Fig. 3. Como o comprimento dy da casca pode ser escrito como $dy = v\,dt$, teremos $dV = 2\pi vs\,ds\,dt$.

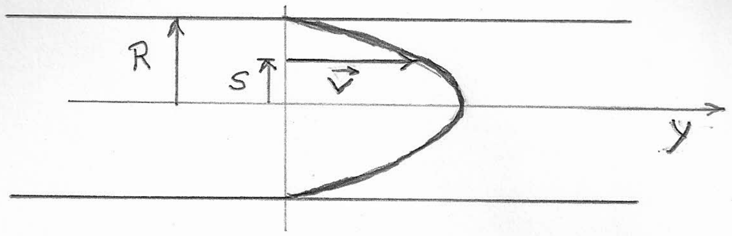

Figura 2

Substituindo nesta última expressão a equação (1) e integrando, o resultado é

$$\Delta V = - (\pi R^4/8\eta)(dP/dy)\ \Delta t \qquad (2)$$

pois a integração é feita facilmente em relação às variáveis t e s, nos intervalos 0 e Δt, e 0 e R, respectivamente. ~~E como $\Delta V = \Delta m/\rho$, sendo Δm a massa de gás que cruza a seção reta~~

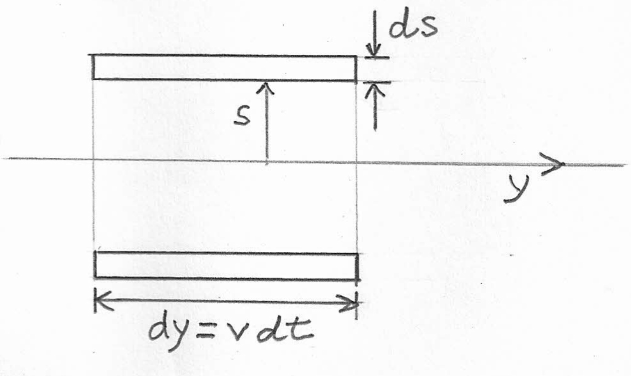

Figura 3

Como $Q = P(\Delta V/\Delta t)$, podemos escrever, tendo em vista a equação (2):

$$Q = -(\pi R^4/8\eta)(PdP/dy) \qquad (3)$$

A corrente molecular tem o mesmo valor em qualquer seção reta do tubo, ou seja, independe de y. .Então podemos integrar a equação (3) para um pedaço de tubo cujas extremidades sejam definidas entre y_1e y_2 e cujas pressãoe sejam P_1 e P_2, respectivamente. O resultado é

$$Q = (\pi R^4/16\eta)(P_1^2 - P_2^2)/(y_2 - y_1) \qquad (\cancel{6})\ 4$$

Chamando de $L = y_2 - y_1$ o comprimento do tubo e de $<P> = (P_1 + P_2)/2$ a pressão média, a equação ($\cancel{6}$ 4) pode ser reescrita como

$$Q = (\pi D^4/128\eta L)(P_1 - P_2)<P>$$

que resulta na bem conhecida equação de Poiseuille. Finalmente, lembrando a definição de condutância: $C = Q/(P_1 - P_2)$, teremos

$$C = (\pi D^4/128\eta L)<P> \qquad (\cancel{7})\ 5$$

Podemos colocar esta última expressão no sistema de unidades comumente empregado no nosso curso. Usando 1 litro = 1000 cm^3 e 1 Torr = 1330 $dinas/cm^2$, a equação ($\cancel{7}$ 5) fica na seguinte forma:

$$C = \overset{3{,}27}{\cancel{124}} \times 10^{-2}\,(D^4/\eta L)<P> \quad \text{(litros/segundo)}$$

sendo $<P>$ dado em Torr, D e L em cm, e η em Poise.