F041 e F042 - Tópicos de Física Matemática I e II (Turma A)

FI263 - Tópicos de Física Teórica I (Turma B)

2º Semestre - 2014 Marcio José Menon

Capítulo 0 INTRODUÇÃO GERAL: CONCEITOS DE VETORES E OBJETIVOS DA ÁLGEBRA TENSORIAL

• ÍNDICE

0. Objetivos do Capítulo
1. Representação Geométrica Elementar
2. Álgebras Vetoriais: Gibbs-Heaviside e Quatérnions
3. Álgebra Linear: Espaço Vetorial sobre um Corpo
4. Transformação de Coordenadas e Álgebra Tensorial

0. Objetivos do Capítulo

1. Representação Geométrica Elementar
1.1 Conceito e Notação
1.2 Operações Elementares
1.2.1 Operações Diretas
a) Adição de Vetores
b) Multiplicação de Vetor por Escalar
1.2.2 Operações Inversas
a) Subtração de Vetores
b) Divisão de Vetor por Escalar

2. Álgebras Vetoriais: Gibbs-Heaviside e Quatérnions
2.0 Introdução
2.1 Álgebra Vetorial de Gibbs e Heaviside
2.1.1 Multiplicação de Dois Vetores
a) Produto Escalar
b) Produto Vetorial
2.1.2 Representação Algébrica de Vetores
a) Base Ortonormal Retangular (Cartesiana)
b) Componentes Retangulares de um Vetor na Base
c) Expressão dos Produtos em Coordenadas Retangulares
2.1.3 Falta Alguma Coisa?
2.2 Álgebra Vetorial de Quatérnions (Hamilton)
2.2.1 Motivação e Origem do Conceito de Quatérnion
a) Números Complexos
b) Tripletos
2.2.2 Definição e Notação de Hamilton
a) Notação
b) Regras Fundamentais
c) Denominações
2.2.3 Produto de Dois Quatérnions Puros

2.3 Correlações entre os Produtos e Comentários
2.3.1 “Adaptações” de Gibbs e Heaviside
2.3.2 Comentários
a) Implicação Imediata
b) O Debate
c) Desenvolvimento da Álgebra Vetorial

3. Álgebra Linear: Espaço Vetorial sobre um Corpo
3.1 Corpo (Comutativo)
3.1.1 Definição
3.1.2 Exemplos
3.2 Espaço Vetorial sobre um Corpo
3.2.1 Definição
3.2.2 Exemplos
3.3 Comentários e Aplicações Físicas
3.3.1 Álgebra Linear
3.3.2 Vetores, Operadores e Representações Matriciais
3.3.3 Leis Físicas

4. Transformação de Coordenadas e Álgebra Tensorial
4.1 Motivação e Idéia Geral
4.1.1 Motivações
a) Álgebra Linear e Invariância das Leis Físicas
b) Objetos “Complexos”
c) Questão
4.1.2 Idéia Geral
4.2 Plano Geral do Curso
4.2.1 Estratégias
4.2.2 Estrutura

• Leituras Sugeridas

- M.J. Menon, “Sobre as Origens das Definições dos Produtos Escalar e Vetorial”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Vo. 31, N. 2 (2009), 2305 (1 a 11).

- C.C. Silva, “Da força ao tensor:evolução do conceito físico e representação matemática do campo eletromagnético”, Tese de Doutorado, IFGW-UNICAMP, 2002.
(disponível em http://webbif.ifi.unicamp.br/teses)

- J. Vaz Jr. “A Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo e a Teoria da Relatividade”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Vol. 22, N. 1 (2000), pp. 5 - 31.

• QUESTÕES PROPOSTAS

Questão 1.

Considere a representação geométrica elementar de vetores como segmentos orientados.
a) Dê as definições das operações elementares diretas e inversas;
b) Quais são as propriedades associativas e distributivas envolvidas?

Questão 2.

Considere a operação de multiplicação de vetores na álgebra vetorial de Gibbs e Heaviside.
a) Dê as definições dos produtos escalar e vetorial;
b) Quais são as propriedades comutativas, associativas e distributivas decorrentes das definições?

Questão 3.

É possível definir a divisão de vetores e de escalares por vetores? Justifique a resposta em detalhe, explicando porque a divisão por vetores não é utilizada. Sigestão: com base na resposta da questão 2, considere operações inversas da multiplicação (como na questão 1) e utilize interpretações geométricas.

Questão 4.

Considere dois vetores expressos em termos de suas componentes retangulares (cartesianas), numa base ortonormal $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$, com a seguinte notação:

$$\vec{r}_1 = x_1\hat{x} + y_1\hat{y} + z_1\hat{z}, \qquad \vec{r}_2 = x_2\hat{x} + y_2\hat{y} + z_2\hat{z}.$$

A partir das definições dos produtos escalar e vetorial e utilizando as propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição, determine:
a) $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$;
b) $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$.

Questão 5.

Considere um cubo e um paralelepípedo retangular, constituidos de certo material e seja A = 3 cm^2 a área da base do paralelepípedo. Determine o valor da aresta do cubo, que seja igual à altura do paralelepípedo e tal que os volumes dos dois sólidos difiram de uma quantidade Q = 1 cm^2. Para tanto:
a) Monte a equação algébrica correspondente.
b) Considerando os valores numéricos e esboçando os gráficos das funções envolvidas na equação, mostre que há uma solução real e estime o valor numérico.
c) Determine as soluções da equação, utilizando números complexos (dados abaixo).

Dados: Equações algébricas incompletas de terceiro grau,

$$x^3 + a\,x + b = 0,$$

possuem soluções (Geronimo Cardano, 1545):

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\Delta}}, \qquad \Delta = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}.$$

Resposta: $x \approx$ 1,88 cm.

Questão 6.

Dê a definição geral de um quatérnion e identifique as partes escalar e vetorial. O que é um quatérnion puro?

Questão 7.

Considere dois quatérnions puros, com notação

$$q_1 = V(q_1) = ix_1 + jy_1 + kz_1, \qquad E(q_1) = 0,$$
$$q_2 = V(q_2) = ix_2 + jy_2 + kz_2, \qquad E(q_2) = 0.$$

Utilizando as regras que definem as unidades imaginárias (questão 6) e as propriedades associativa e distributiva, determine o produto $q_1 q_2$.

Questão 8.

Compare os resultados das questões 4 e 7 e discuta as similaridades e diferenças envolvidas.

Questão 9.

Considerando a Álgebra Linear:
a) Dê as definições de *Corpo* e *Espaço Vetorial sobre um Corpo*;
b) Essas definições tem algo a ver com multiplicação de vetores?

Questão 10.

Com base na definição formal de Espaço Vetorial sobre um Corpo, mostre que os seguintes conjuntos constituem espaços vetoriais:
a) Vetores no plano, R^2.
b) Números complexos.

Questão 11.

Discuta as características essenciais que distinguem vetores no plano e números complexos. Em particular, discuta a multiplicação e a divisão de dois números complexos e de dois vetores.