F041 e F042 - Tópicos de Física Matemática I e II (Turma A)
FI263 - Tópicos de Física Teórica I (Turma B)

2º Semestre - 2014 Marcio José Menon

Capítulo 2 ROTAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS RETANGULARES: DEFINIÇÕES DE ESCALARES, VETORES E OPERADORES

• ÍNDICE

0. Objetivos e Estratégias
1. Conceitos Básicos
2. Rotação do Sistema de Coordenadas
3. Vetores e Escalares
4. Operadores
5. Definições via Rotação do Sistema de Coordenadas Retangulares

0. Objetivos e Estratégias

1. Conceitos Básicos
- 1.1 Sistema de Coordenadas Retangulares ($\mathcal{R}^n$): Notação
- 1.2 Cossenos Diretores
  - 1.2.1 Conceito, Notação e Definição
  - 1.2.2 Propriedades
    - a) Simetria
    - b) Decomposição de um Vetor na Base Retangular
- 1.3 Matrizes: Notação e Propriedades Básicas
  - 1.3.1 Origens do Conceito
  - 1.3.2 Notação
  - 1.3.3 Multiplicação de Matrizes
    - a) Aspectos Gerais
    - b) Produtos em Termos dos Elementos de Matriz
  - 1.3.4 Matrizes Notáveis
    - a) Identidade
    - b) Transposta
    - c) Inversa
    - d) Ortogonal
    - e) Complexa Conjugada e Adjunta
  - 1.3.5 A Notação “bra-ket” (Dirac)
    - a) Corpo dos Complexos
    - b) Corpo dos Reais
- 1.4 Transformações, Operadores e Funcionais Lineares
  - 1.4.1 Definições
  - 1.4.2 Exemplos
- 1.5 Representações Matriciais de Vetores e Transformações Lineares
  - 1.5.1 Vetores
    - a) Definições
    - b) Exemplos
  - 1.5.2 Transformações Lineares
    - a) Procedimento Geral
    - b) Resumo
    - c) Exemplos

1.6 Funções de Ponto (Campos Clássicos)
1.6.1 Campos Escalares
1.6.2 Campos Vetoriais

2. Rotação do Sistema de Coordenadas
2.1 Rotações no Plano ($\mathcal{R}^2$)
2.1.1 Transformação Linear das Coordenadas
2.1.2 Coeficientes da Transformação - Interpretações e Notação
a) Interpretação Algébrica e Notação
b) Interpretação Geométrica
2.1.3 Resumo
2.2 Generalização para n Dimensões ($\mathcal{R}^n$)
2.2.1 Resultado geral
2.2.2 Comentários sobre as Interpretações Algébrica e Geométrica dos Coeficientes
2.3 Propriedades Gerais da Transformação Linear de Coordenadas
2.3.1 Matriz de Rotação e Ortogonalidade
a) Representação Matricial
b) Matriz de Transformação Linear ou de Rotação
c) Ortogonalidade
2.3.2 Transformações Direta e Inversa
a) Conceito e Importância
b) Expressões Algébricas (Analíticas)
• Transformação Direta (TD)
• Transformação Inversa (TI)
c) Comentários Fundamentais sobre a Notação
• Caso Geral
• Bases Ortogonais
• Resumo

3. Vetores e de Escalares
3.1 Vetores
3.1.1 Definição
3.1.2 Exemplos
3.2 Escalares
3.2.1 Definição
3.2.2 Exemplos

4. Operadores
4.1 Introdução
4.2 Rotação do Sistema de Coordenadas ($\mathcal{R}^n$)
4.2.1 Abordagem Matricial - Relação de Similaridade
a) Estabelecimento do Problema
b) Relação de Similaridade
4.2.2 Lei de Transformação dos Elementos de Matriz
4.3 Definição de Operador

5. Definições via Rotação do Sistema de Coordenadas Retangulares
5.1 Definições de Escalares, Vetores e Operadores ($\mathcal{R}^n$)
5.2 Propriedades Notáveis

Apêndice. Somatórias e Delta de Kronecker: Operações Básicas (sugestão: consultem também N.A. Lemos, *Mecânica Analítica*, Apêndice A Notação Indicial).

• QUESTÕES PROPOSTAS

1. Conceitos Básicos

Questão 1
a) Explique o conceito e dê a definição de *cossenos diretores*.
b) Seja $\cos(\vec{r}, \hat{x}_i)$ o cosseno diretor do vetor posição $\vec{r}$ em relação aos versores $\hat{x}_i$, $i = 1, 2, ..., n$ de um sistema ortonormal retangular. Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2(\vec{r}, \hat{x}_i) = 1.$$

Questão 2
Considere o produto de três matrizes quadradas $n \times n$, $M = ABC$. Mostre que, em termos dos elementos de matriz correspondentes, o produto é dado por:

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj}, \qquad i, j = 1, 2, 3, ..., n.$$

Questão 3
a) Qual a definição de *matriz ortogonal*?
b) Mostre que os elementos de matriz de uma mariz ortogonal $A = (a_{ij})$ obedecem às seguintes equações algébricas (relações de ortogonalidade):

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}, \qquad \text{ou} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3, ..., n.$$

Questão 4
Considere matrizes com elementos pertencentes ao *corpo dos reais* e a seguinte notação:

A: matriz quadrada $n \times n$,

$|b\rangle$: matriz coluna $n \times 1$,

$\langle b|$: matriz linha $1 \times n$.

Caso sejam definidas, indique o tipo de matriz resultante das seguintes operações (utilize a letra c ou C para os resultados definidos, de acordo com a notação acima):

a) $|b\rangle + |b\rangle$ b) $\langle b| + \langle b|$ c) $\langle b| + |b\rangle$ d) $A + |b\rangle$ e) $A + \langle b|$

f) $A|b\rangle$ g) $\langle b|A$ h) $|b\rangle\langle b|$ i) $\langle b|b\rangle$ j) $A\langle b|$

k) $|b\rangle A$ l) $\langle b|A|b\rangle$

Questão 5
No Capítulo 1, obtivemos a Forma Quadrática Fundamental, $ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} dv_i dv_j$. Associando matrizes aos coeficientes métricos e às componentes das diferenciais das coordenadas expresse ds^2 através da notação da questão anterior.

Questão 6
Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo C. Dê as definições de *transformação, operador e funcional lineares*.

Questão 7

Para $\vec{v} = v_1\hat{x}_1 + v_2\hat{x}_2 + v_3\hat{x}_3 \in \mathcal{R}^3$, mostre que as seguintes transformações são lineares:

a) $T\vec{v} = \lambda\vec{v},\ \lambda \in \mathcal{R}^1$.

b) $T\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v},\ \vec{u} \in \mathcal{R}^3$.

c) $T\vec{v} = (v_1 + v_2)\hat{x}_1 + (v_2 + v_3)\hat{x}_2$.

Questão 8

No caso da questão anterior, quais casos correspondem a funcional, operador e transformação lineares? Justifique a resposta.

Questão 9

Explique como são determinadas as representações matriciais de vetores e de transformações lineares.

Questão 10

Seja $T : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^3$ tal que, para $\vec{v} = v_1\hat{x}_1 + v_2\hat{x}_2 \in \mathcal{R}^2$, tem-se

$$T\vec{v} = 2v_1\hat{x}_1 + 2v_2\hat{x}_2 + 2(v_1 + v_2)\hat{x}_3.$$

Determine a representação matricial de T em relação às bases $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2\}$ e $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\}$.
Resposta:

$$T = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Questão 11

Dê as definições de *campos escalares* e *campos vetoriais*, citando alguns exemplos.

2. Rotação do Sistema de Coordenadas

Questão 12

Considere a rotação de um base retangular ortonormal do plano ($\mathcal{R}^2$), de um ângulo φ no sentido anti-horário,

$$\{\hat{x}_1, \hat{x}_2\} \to \{\hat{x}_1^{'}, \hat{x}_2^{'}\}.$$

Mostre que as componentes do vetor posição na base dada (x_1 e x_2) e na base rotada ($x_1^{'}$ e $x_2^{'}$), obedecem:

$$\begin{aligned} x_1^{'} &= \cos\varphi\, x_1 + \text{sen}\,\varphi\, x_2, \\ x_2^{'} &= -\text{sen}\,\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2. \end{aligned}$$

Questão 13

a) Para a transformação linear da questão anterior, discuta as interpretações algébricas e geométricas dos coeficientes, mostrando, <u>em</u> <u>detalhe</u>, que podem ser expressos por

$$\lambda_{i'j} \equiv \frac{\partial x_i^{'}}{\partial x_j} = \cos(\hat{x}_i^{'}, \hat{x}_j), \qquad i, j = 1, 2.$$

b) Justificando a resposta, obtenha a generalização do resultado do ítem anterior para um espaço euclidiano de dimensão n ($\mathcal{R}^n$).
c) As interpretações algébrica e geométrica do ítem (a) são sempre válidas? Isto é, aplicam-se a qualquer tipo de base? Explique.

Questão 14

Considere duas bases do $\mathcal{R}^n$, uma dada, $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n\}$ e outra rotada em relação à primeira, $\{\hat{x}_1^{'}, \hat{x}_2^{'}, ..., \hat{x}_n^{'}\}$. Mostre que os versores das duas bases obedecem

$$\hat{x}_i^{'} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i'j} \hat{x}_j, \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

onde os coeficientes $\lambda_{i'j} = \cos(\hat{x}_i^{'}, \hat{x}_j)$, definem a *matriz de rotação* $\Lambda = (\lambda_{i'j})$.

Questão 15

Mostre que a matriz de rotação de um ângulo θ, em torno do eixo x_2, no sentido anti-horário (olhando-se através de $-\hat{x}_2$ é dada por

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Questão 16

Mostre que a matriz de rotação da questão 13, $\Lambda = (\lambda_{i'j})$, é ortogonal, demonstrando que essa propriedade decorre da ortogonalidade das bases (dada e rotada).

Questão 17

a) Mostre que o produto resultante de duas rotações sucessivas Λ_1 e depois Λ_2 é dado pela matriz $\Lambda = \Lambda_2\,\Lambda_1$.

b) Sabendo que os determinantes obedecem $|AB| = |A||B|$ e $|A^t| = |A|$, mostre que o determinante de uma matriz ortogonal tem valor $+1$ ou -1.

Questão 18

Considere uma *transformação direta* de coordenadas,

$$x_i^{'} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i'j} x_j, \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Mostre que:

a) No caso geral, a *transformação inversa* pode ser expressa por

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij'} x_j^{'}, \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

b) No caso de bases ortogonais, a *transformação inversa* pode ser expressa por

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j'i} x_j^{'}, \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

3. Vetores e Escalares

Questão 19

Dê as definições de escalares e de vetores via rotação do sistema de coordenadas retangulares (espaço Euclidiano $\mathcal{R}^n$).

Questão 20

Verifique se as seguintes ternas ordenadas obedecem a definição de vetor via transformação de coordenadas:

a)

$$(dx_1, dx_2, dx_3) \ - \ \text{deslocamento infinitesimal.}$$

b)

$$(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}) \ - \ \text{velocidade.}$$

Questão 21

Verifique se os seguintes pares ordenados obedecem a definição de vetor via transformação de coordenadas (utilize a lei de transformação no plano, em termos do ângulo de rotação, questão 12):

a) $(A_1, A_2) = (-x_2, x_1)$,

b) $(A_1, A_2) = (x_1, -x_2)$.

Questão 22

Verifique se as seguintes ternas ordenadas obedecem a definição de vetor via transformação de coordenadas:

a)

$$(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3}), \ \text{onde } \phi \text{ é um campo escalar (função de ponto)} \ - \ \text{gradiente de } \phi.$$

b)

$$(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}) \quad - \quad \text{nabla (ou del).}$$

Questão 23

Tendo verificado que, numa transformação de coordenadas, as componentes do nabla

$$\vec{\nabla} = \hat{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{x}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{x}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

obedecem a definição das componentes de um vetor, discuta as possibilidades de multiplicação do vetor nabla por funções escalares de ponto (campos escalares) e por funções vetoriais de ponto (campos vetoriais).

Questão 24

Considere os dois fatos seguintes:

1) O deslocamento de uma partícula num plano pode ser *completamente especificado* por duas grandezas: as diferenças entre as abscissas e ordenadas dos pontos inicial e final, Δx e Δy, ou, na forma de uma par ordenado,

$$(\Delta x, \Delta y).$$

2) O estado de um gás ideal ($PV = nRT$) pode ser *completamente especificado*, por exemplo, pelos valores da pressão P e da temperatura T em cada ponto, ou, na forma de um par ordenado,

$$(P, T).$$

Questão: os dois pares ordenados acima referidos são vetores? Explique, justificando a resposta.

Questão 25

Uma partícula de massa m é acelerada em relação a um dado referencial inercial. Considerando a definição de vetor via transformação de coordenadas, a força resultante sobre a partícula é um vertor? Justifique a resposta.

4. Operadores

Questão 26

Considere uma lei física expressa na forma de uma operação linear vetorial

$$T\vec{u} = \vec{v}, \qquad \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{R}^n$$

e a representação matricial correspondente, numa dada base,

$$T|u\rangle = |v\rangle.$$

Suponha uma transformação da base através de uma matriz de rotação Λ, de modo que as representações matriciais dos vetores nas bases dada e transformada obedecem

$$|u^{'}\rangle = \Lambda|u\rangle \qquad \text{e} \qquad |v^{'}\rangle = \Lambda|v\rangle.$$

Determine a equação que relaciona a representação matricial do operador T na base dada, com sua representação $T^{'}$ na base transformada (*Relação de Similaridade*).

Questão 27

Mostre que em termos de elementos de matriz, o resultado da questão anterior é expresso por

$$t^{'}_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \lambda_{i^{'}k}\lambda_{j^{'}l}t_{kl}, \qquad i, j = 1, 2, ..., n,$$

onde

$$T^{'} = (t^{'}_{ij}), \;\; T = (t_{kl}) \;\; \text{e} \;\; \Lambda = (\lambda_{i^{'}j}).$$

Questão 28

No caso da questão 26, considere a lei física expressa, diretamente, através dos elementos de matriz correspondentes, na base dada

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}u_j$$

e na base transformada,

$$v^{'}_i = \sum_{j=1}^{n} t^{'}_{ij}u^{'}_j.$$

Sabendo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores, determine a equação que correlaciona os elementos de matriz do operador nas bases dada, t_{kl} e transformada, $t^{'}_{ij}$ (mesma resposta da questão 24).

Questão 29

Duas matrizes A e B são denominadas *similares* se existe uma matriz P, que possui inversa, tal que

$$B = PAP^{-1}.$$

a) Obtenha a expressão explícita de A em função de B.

b) Uma matriz A é denominada simétrica se $A^t = A$ e anti-simétrica se $A^t = -A$. Se P é ortogonal, mostre que se A é simétrica (anti-simétrica) então B também é simétrica (anti-simétrica). Proriedade: $[AB]^t = B^t A^t$.

Questão 30

Seja R o operador de rotação de um vetor no plano, de um ângulo φ no sentido horário

$$R\vec{u} = \vec{v}, \qquad |\vec{u}| = |\vec{v}|,$$

ou, em representação matricial, $|v\rangle = R|u\rangle$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Através de um esquema dos vetores e suas componentes no plano (primeiro quadrante), mostre que

$$R = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \mathrm{sen}\varphi \\ -\mathrm{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Questão 31

Mostre que a rotação de um sistema de coordenadas de um dado ângulo, num dado sentido, é equivalente à rotação de um vetor numa base fixa, de um mesmo ângulo, em sentido contrário (isotropia do espaço). Consulte os resultados das questões 12 e 30.

Questão 32

A Associação Atlética Ponte Preta (a Macaca) e o Guarani Futebol Clube (o Bugre) são duas equipes tradicionais de futebol de Campinas, que disputam os campeonatos estadual e nacional há vários anos. Suponha que essas equipes tenham realizado 9 jogos, sendo 3 dérbis (Macaca $\times$ Bugre) e 6 jogos de cada uma delas com outras equipes (3 da Macaca e 3 do Bugre). Suponha também que os 3 dérbis resultaram em empates: 2 a 2, 1 a 1 e 3 a 3. Nos jogos com outras equipes, o Bugre *perdeu* as 3 partidas, de 1 a 2, 1 a 3 e de 2 a 3, enquanto que a Macaca *venceu* as 3 partidas, de 2 a 1, 3 a 2 e de 3 a 1.
a) Mostre que é possível estabelecer uma representação matricial para esses jogos e resultados.
b) De acordo com o que foi estudado neste capítulo, essa matriz representa um operador? Explique.
c) O que se pode aprender com essa questão "esportiva"?

5. Definições via Rotação do Sistema de Coordenadas Retangulares

Questão 33

a) Com base numa rotação do sistema de coordenadas no espaço Euclidiano, $\mathcal{R}^n$, dê as definições de escalares, vetores e operadores.
b) Com base na resposta do ítem anterior, quais características notáveis podem ser identificadas nessas definições?