F041 e F042 - Tópicos de Física Matemática I e II (Turma A)
FI263 - Tópicos de Física Teórica I (Turma B)

2º Semestre - 2014 Marcio José Menon

Capítulo 5 TÓPICOS DE RELATIVIDADE ESPECIAL

"*Os conceitos de espaço e tempo que desejo exibir diante de vós brotaram do solo da física experimental e nisto reside sua força. Eles são radicais. De agora em diante, o espaço isolado e o tempo isolado estão destinados a esvairem-se em meras sombras e somente uma espécie de união dos dois preservará uma realidade independente*".

(Hermann Minkowski, *Espaço e Tempo*, conferência apresentada no 80º. Congresso dos Cientistas e Médicos Alemães, na cidade de Colônia, Alemanha, em 21 de setembro de 1908.)

• ÍNDICE

1. Conceitos Básicos
2. Espaço de Minkowski

1. Conceitos Básicos

1.1 Transformação de Galileu e Covariância das Leis da Mecânica Clássica
- 1.1.1 Referenciais Inerciais e Tempo Absoluto
- 1.1.2 Transformação de Galileu
- 1.1.3 Covariância das Leis da Mecânica Clássica

1.2 Princípios da Relatividade Especial
- 1.2.1 Covariância das Leis da Física
- 1.2.2 Velocidade da Luz

1.3 Transformação de Lorentz
- 1.3.1 Conceito e Motivação
- 1.3.2 Expressão Algébrica
- 1.3.3 Covariância das Leis da Física

1.4 Contração do Comprimento e Dilatação Temporal
- 1.4.1 Valor Próprio
- 1.4.2 Contração do Comprimento
- 1.4.3 Dilatação Temporal

2. Espaço de Minkowski

2.1 Conceito de Espaço-Tempo
2.1.1 Fundamento: Transformação de Lorentz
2.1.2 Coordenadas Espaciais e Temporal
2.1.3 Representação Matricial da Transformação de Lorentz
2.1.4 Sistema Retilíneo Ortogonal

2.2 Quadrivetor Tempo-Posição e Métrica
2.2.1 Quadrivetor Tempo-Posição Contravariante
a) Coordenadas - Notação Contravariante
b) Transformação de Lorentz - Elementos de Matriz
c) Base Ortonormal e Quadrivetor
2.2.2 Evento e Quadrivetor Deslocamento
a) Definição de Evento no Espaço-Tempo
b) Quadrivetor Deslocamento
2.2.3 Métrica do Espaço de Minkowski
a) Métrica e Objetivos
b) Forma Quadrática Fundamental
c) Coeficientes Métricos e Representação Matricial
d) Espaço Pseudo-Euclidiano e Assinatura
2.2.4 Quadrivetor Tempo-Posição Covariante
2.2.5 Produto Escalar - Invariante Fundamental
2.2.6 Intervalo entre Dois Eventos
a) Tipo Tempo
b) Tipo Espaço
c) Tipo Luz
d) Resumo

2.3 Quadrivetores e Invariante Fundamental

2.4 Quadrivetores Velocidade e Energia-Momento
2.4.1 Quadrivetor Velocidade
a) Quadrivelocidade de uma Partícula num Referencial Inercial
b) Velocidade em Termos do Intervalo de Tempo Próprio
c) Quadrivetor Velocidade: Contravariante e Covariante
d) Produto Escalar - Invariante Fundamental
2.4.2 Quadrivetor Energia-Momento
a) Quadrivetor Momento Linear Contravariante
b) Energia Relativística e Energia de Repouso
c) Quadrivetor Energia-Momento: Contravariante e Covariante
d) Produto Escalar - Invariante Fundamental

2.5 Relações Relativísticas: Energia, Trimomento e Energia Cinética

2.6 Resumo

• **Referências**

- H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, Vol 4, Óptica, Relatividade, Física Quântica (Edgard Blücher, São Paulo, 1981), Cap. 6.

- C. Kittel e outros *Mecânica*, Curso de Física de Berkeley, Vol. 1 (Edgard Blücher, São Paulo, 1970), Caps. 10 a 13.

- R. Resnick, *Introdução à Relatividade Especial* (Poligono, São Paulo, 1971).

- J. Foster, J.D. Nightingale, *A Short Course in General Relativity*, 2nd edition (Springer, 1998), Appendix A Special Relativity Review.

- D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles* (John Wiley, 1987), Cap. 3.

- H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, *O Príncipio da Relatividade*, Textos Fundamentais da Física Moderna, Vol I (Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1971).

2.6 Resumo

• Forma Quadrática Fundamental

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

• Métrica (Espaço de Minkowski)

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

• Quadrivetores

Contravariante: $\vec{A}^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \vec{a})$

Covariante: $\vec{A}_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) = (a^0, -\vec{a})$

Invariante Fundamental: $\vec{A}_\mu \cdot \vec{A}^\mu = a_0^2 - \vec{a}^{\,2}$

• Partícula livre de massa m (invariante) e velocidade $\vec{v}$ num RI:

- Quadrivetor Tempo-Posição

$$\vec{X}^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$$
$$\vec{X}_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\vec{r})$$
$$\text{Invariante} : \vec{X}_\mu \cdot \vec{X}^\mu = (ct)^2 - \vec{r}^{\,2}$$

- Quadrivetor Velocidade

$$\vec{U}^{\mu} = (u^0, u^1, u^2, u^3) = (\gamma c, \gamma \vec{v})$$
$$\vec{U}_{\mu} = (u_0, u_1, u_2, u_3) = (\gamma c, -\gamma \vec{v})$$
$$\text{Invariante} : \vec{U}_{\mu} \cdot \vec{U}^{\mu} = (\gamma c)^2 - (\gamma \vec{v})^2 = c^2$$

- Quadrivetor Energia-Momento

$$\vec{P}^{\mu} = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (\frac{E}{c}, \vec{p}) = (\frac{E}{c}, \gamma m \vec{v})$$
$$\vec{P}_{\mu} = (p_0, p_1, p_2, p_3) = (\frac{E}{c}, -\vec{p}) = (\frac{E}{c}, -\gamma m \vec{v})$$
$$\text{Invariante} : \vec{P}_{\mu} \cdot \vec{P}^{\mu} = (\frac{E}{c})^2 - (\vec{p})^2 = m^2 c^2$$

- Trimomento Relativístico

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

- Energia Relativística

$$E = \gamma m c^2$$

- Energia de Repouso

$$E_{rep} = mc^2$$

- Relação Relativística

$$E = \sqrt{(\vec{p}c)^2 + (mc^2)^2}.$$

- Energia Cinética

$$E_c = E - E_{rep} = (\gamma - 1)mc^2$$

• QUESTÕES PROPOSTAS

1. Conceitos Básicos

Questão 1

Considere dois referenciais inerciais S e S' com eixos coordenados paralelos (x' // x, y' // y, z' // z) e S' com velocidade v em relação a S na direção do eixo $+x$. Suponha que as origens dos referenciais coincidem em $t = 0$ e $t' = 0$.

a) Com base na hipótese de tempo absoluto, deduza a *Transformação de Galileu*:

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

b) Com base nos princípios da relatividade especial, deduza a *Transformação de Lorentz* (considere a emissão de um pulso luminoso quando as origens dos dois referenciais coincidem):

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \frac{\beta}{c}x), \\ x' &= \gamma(x - \beta ct), \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

onde

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \text{e} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Questão 2

Explique o que significa *valor próprio de uma grandeza*. Dê exemplos.

Questão 3

Utilizando a transformação de Lorentz, explique de modo <u>quantitativo</u> e <u>em</u> <u>detalhe</u> o que são os fenômenos de

a) contração de comprimento;

b) dilatação temporal.

2. Espaço de Minkowski

Questão 4
A partir da transformação de Lorentz, explique o conceito de *Espaço-Tempo* e de *Quadrivetor Tempo-Posição* (contravariante). Para tanto:

a) Discuta as justificativas para o estabelecimento de um sistema de coordenadas retilíneas ortogonais em 4 dimensões (independência das coordenadas).

b) Explique os argumentos que estabelecem a expressão do quadrivetor tempo-posição contravariante na forma:

$$\vec{X}^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r}).$$

c) Utilizando a notação contravariante, estabeleça a representação matricial da transformação de Lorentz e mostre que, em termos dos elementos de matriz, a transformação pode ser expressa por

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \lambda_{\nu}^{\mu'} x^{\nu}, \qquad \lambda_{\nu}^{\mu'} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Questão 5
a) Dê a definição de *evento* no espaço-tempo.

b) Mostre que a diferença entre dois eventos A e B é dada pelo *quadrivetor deslocamento*:

$$\Delta\vec{X}^{\mu} = (ct_B - ct_A, \vec{r}_B - \vec{r}_A) = (c\Delta t, \Delta\vec{r}).$$

Questão 6
Explique, <u>em</u> <u>detalhe</u>, o estabelecimento da expressão da *forma quadrática fundamental* no espaço-tempo (espaço de Minkowski), demonstrando que é dada por

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu},$$

sendo que a métrica possui representação matricial

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Essa expressão da métrica é única? Explique.

Questão 7

No espaço de Minkowski o elemento de arco é uma forma definida positiva? Explique, justificando a denominação de Espaço Pseudo-Euclidiano.

Questão 8

a) Mostre que o quadrimomento tempo-posição *covariante* é expresso por:

$$\vec{X}_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\vec{r}).$$

e que o produto escalar misto é dado por

$$\vec{X}_\mu \cdot \vec{X}^\mu = (ct)^2 - \vec{r}^{\,2}.$$

b) Mostre que o produto misto acima é invariante por transformação de Lorentz.

Questão 9

a) O que é *intervalo antre dois eventos* e qual sua expressão algébrica?

b) Mostre que esse intervalo pode ser tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-luz e explique o significado físico de cada caso.

Questão 10

Considere uma partícula com velocidade $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ num referencial inercial S. Pode-se definir um quadrivetor velocidade (contravariante) na forma $\vec{V}^\mu = (c, \vec{v})$? Justifique a resposta.

Questão 11

a) Explique os argumentos que levam à definição da velocidade em termos do intervalo de tempo próprio de uma partícula e discuta o caráter híbrido dessa grandeza.

b) Mostre que se $\vec{u}$ é a velocidade de uma partícula em termos do intervalo de tempo próprio e $\vec{v}$ sua velocidade num referencial inercial S então

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\gamma}, \qquad \text{onde} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

c) Mostre que o quadrivetor velocidade (contravariante) é expresso por

$$\vec{U}^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v}).$$

d) Mostre que

$$\vec{U}_\mu \cdot \vec{U}^\mu = c^2$$

Questão 12
Considere uma partícula de massa m (invariante) e velocidade $\vec{v}$ num referencial inercial S.
a) Explique os argumentos que levam à definição do quadrivetor momento linear contravariante na forma

$$\vec{P}^{\mu} = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (p^0, \vec{p}) = (\gamma mc, \gamma m\vec{v}).$$

b) Explique a origem e justifique a definição da *energia relativística* $E = \gamma mc^2$ e da *energia de repouso* $E_{rep} = mc^2$.
c) Mostre que o *quadrivetor energia-momento* contravariante é dado por

$$\vec{P}^{\mu} = (\frac{E}{c}, \vec{p}) = (\frac{E}{c}, \gamma m\vec{v})$$

Questão 13
Com base nas respostas das questões anteriores, demonstre os seguintes resultados:
a)

$$\vec{P}_{\mu} \cdot \vec{P}^{\mu} = (\frac{E}{c})^2 - (\vec{p})^2$$

b)

$$\vec{P}_{\mu} \cdot \vec{P}^{\mu} = m^2c^2$$

c)

$$E = \sqrt{(\vec{p}c)^2 + (mc^2)^2}.$$

d)

$$E_c = E - E_{rep} = (\gamma - 1)mc^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + ...$$