

F041 e F042 - Tópicos de Física Matemática I e II (Turma A)**FI263 - Tópicos de Física Teórica I (Turma B)**

2º Semestre - 2014

Marcio José Menon

Capítulo 6 TÓPICOS DE ELETRODINÂMICA**• ÍNDICE**

1. Conceitos Básicos
2. Formulação Covariante

1. Conceitos Básicos

- 1.1 Equações de Maxwell e Equação da Continuidade
 - 1.1.1 Fundamentos
 - a) Bases Matemáticas
 - b) Bases Empíricas
 - 1.1.2 Forma Diferencial Geral das Equações de Maxwell
 - a) Eletrodinâmica
 - b) Eletrostática e Magnetostática
 - 1.1.3 Equação da Continuidade
 - a) Forma Diferencial
 - b) Forma Integral

1.2 Formulação Via Potenciais

- 1.2.1 Definições dos Potenciais Elétrico e Magnético
 - a) Eletrostática e Magnetostática
 - b) Eletrodinâmica
 - c) Resumo
- 1.2.2 Equações Diferenciais Gerais Obedecidas pelos Potenciais
 - a) Eletrostática e Magnetostática
 - b) Eletrodinâmica
 - c) O Divergente do Potencial Magnético
- 1.2.3 Invariância de Calibre
 - a) Conceito
 - b) Transformações de Calibre
 - c) Relação com a Escolha do Divergente do Potencial Magnético
- 1.2.4 Equações Diferenciais Calibradas Obedecidas pelos Potenciais
 - a) Caso Estático - Calibre de Coulomb
 - b) Eletrodinâmica - Calibre de Lorentz
 - c) Operadores Laplaciano e D'Alembertiano

2. Formulação Covariante

2.1 Quadrivetor Nabla

2.1.1 Formulação

2.1.2 Aplicação: D'Alembertiano

2.2 Quadrivetor Densidade de Corrente

2.2.1 Formulação

2.2.2 Equação da Continuidade - Forma Covariante

2.3 Quadrivetor Potencial

2.3.1 Formulação

2.3.2 Calibre de Lorentz - Forma Covariante

2.4 Tensor Campo Eletromagnético e Tensor Dual

2.4.1 Simetrias Associadas aos Campos e Potenciais Elétrico e Magnético

a) Coordenadas Cartesianas

b) Componentes Contravariantes

c) Termo Geral

2.4.2 Tensor Campo Eletromagnético

a) Representação Matricial

b) Caráter Tensorial

c) Comentários

2.4.3 Tensor Dual

2.5 Equações de Maxwell na Forma Tensorial

2.5.1 Introdução

2.5.2 Expressões Gerais em Termos dos Tensores Campo Eletromagnético e Dual

a) Equações Homogêneas

b) Equações Não Homogêneas

2.5.3 Tensor Campo Eletromagnético e Equações Homogêneas

2.5.4 Resumo

• Referências

- David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, *3rd edition* (Person Education, New Jersey, 1999), Cap. 10.

- J.D. Jackson, *Eletrodinâmica Clássica* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1983), Caps. 11 e 12 (Sistema Gaussiano).

- M.A. Heald, J.B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation* (Saunders College, Fort Worth, 1995), Cap. 14 (Sistema Gaussiano).

- W.K.H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd edition (Addison-Wesley, 1962), Caps. 15 a 18.

E. Hecht, *Optics*, 3rd edition (Addison-Wesley, 1998), Appendix 1 Electromagnetic Theory (pré-requisito útil).

• QUESTÕES PROPOSTAS

1. Conceitos Básicos

As equações de Maxwell da Eletrodinâmica (SI), na forma diferencial e em termos das densidades volumétricas totais de carga e corrente são dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Questão 0

Mostre que para um campo vetorial $\vec{F}(\vec{r}, t)$ e um campo escalar $f(\vec{r}, t)$, com derivadas de segunda ordem contínuas, tem-se:

$$a) \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0, \quad b) \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}, \quad c) \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0.$$

Questão 1

A partir das equações de Maxwell, deduza a Equação da Continuidade (forma diferencial):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Questão 2

Justificando a resposta, obtenha as expressões dos campos \vec{E} e \vec{B} em termos dos potenciais escalar elétrico Φ e vetorial magnético \vec{A} nos seguintes casos:

- a) eletrostática e magnetostática;
- b) eletrodinâmica.

Questão 3

Com base na resposta da questão anterior, obtenha as equações diferenciais **gerais** obedecidas pelos potenciais Φ e \vec{A} , nos casos:

- a) eletrostática e magnetostática;
- b) eletrodinâmica.

Resposta (b):

$$\vec{\nabla}^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}] = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}] = -\mu_0 \vec{J}.$$

Questão 4

a) Mostre que as seguintes *transformações de calibre* deixam invariantes os campos elétrico e magnético

$$\vec{A} \Rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\eta, \quad \Phi \Rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial\eta}{\partial t},$$

onde $\eta(\vec{r}, t)$ é o *campo de calibre*.

- b) Obtenha a equação diferencial que relaciona o campo de calibre com os divergentes de \vec{A} e \vec{A}' .
c) Qual a interpretação física formal dessa equação diferencial?

Questão 5

a) Explique o que são Calibre de Coulomb e Calibre de Lorentz.

b) Obtenha as equações diferenciais **calibradas** obedecidas pelos potenciais Φ e \vec{A} , nos casos:

- b1) eletrostática e magnetostática;
b2) eletrodinâmica.

Resposta (b2):

$$\vec{\nabla}^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}.$$

2. Formulação Covariante

Questão 6

Sendo os quadrvetores tempo-posição dados por (Capítulo 5)

$$\begin{aligned} \vec{X}^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r}), \\ \vec{X}_\mu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\vec{r}), \end{aligned}$$

mostre que os *quadrvetores nabla* são expressos por

$$\vec{\partial}^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \vec{\nabla} \right), \quad \vec{\partial}_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\vec{\nabla} \right).$$

Questão 7

a) A partir da Equação da Continuidade (questão 1), justifique a definição dos *quadrvetores densidade volumétrica de corrente* pelas formas:

$$\vec{J}^\mu = (c\rho, \vec{J}), \quad \vec{J}_\mu = (c\rho, -\vec{J}).$$

b) Mostre que na forma covariante (invariante), a equação da continuidade é expressa pelo divergente do quadrvetor densidade volumétrica de corrente:

$$\vec{\partial}^\mu \cdot \vec{J}^\mu = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0.$$

Questão 8

a) A partir do Calibre de Lorentz (questão 5), justifique a expressão dos *quadrivetores potenciais* pelas formas:

$$\vec{A}^\mu = \left(\frac{\Phi}{c}, \vec{A} \right), \quad \vec{A}_\mu = \left(\frac{\Phi}{c}, -\vec{A} \right).$$

b) Mostre que na forma covariante (invariante), a expressão do calibre de Lorentz é dada pelo divergente do quadrivetor potencial:

$$\vec{\partial}^\mu \cdot \vec{A}^\mu = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0.$$

Questão 9

No caso da Eletrodinâmica, a partir das expressões vetoriais dos campos \vec{E} e \vec{B} em termos dos potenciais Φ e \vec{A} (questão 2, ítem (b)), obtenha as seis equações escalares correspondentes:

- a) em coordenadas retangulares (cartesianas);
- b) em termos das componentes dos quadrivetores \vec{X}^μ e \vec{A}^μ .

Questão 10

Com base na resposta do ítem (b) da questão anterior e utilizando as componentes covariantes do quadrivetor tempo-posição, mostre que as seis equações possuem estrutura simétrica, com termo geral dado por

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad \mu \neq \nu.$$

Questão 11

Mostre que em termos das componentes retangulares dos campos \vec{E} e \vec{B} , o termo geral da questão anterior, denotado $F^{\mu\nu}$, possui representação matricial

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Questão 12

A partir da expressão do tensor campo eletromagnético $\overset{\leftrightarrow}{F}^{\mu\nu}$, o tensor dual $\overset{\leftrightarrow}{G}^{\mu\nu}$ é obtido pelas substituições

$$\vec{E}/c \rightarrow \vec{B} \quad \text{e} \quad \vec{B} \rightarrow -\vec{E}/c,$$

portanto, com representação matricial:

$$(G^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique que as equações de Maxwell na forma tensorial são dadas por:

$$\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (\text{homogêneas}),$$

$$\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 J^\mu \quad (\text{não homogêneas}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Questão 13

Verifique que as equações de Maxwell homogêneas podem também ser obtidas diretamente do tensor campo eletromagnético através da equação tensorial:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F^{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F^{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad \mu, \nu, \sigma = 0, 1, 2, 3, \quad \mu \neq \nu \neq \sigma.$$

.....
Boas provas e boas férias a todos!

Menon, dezembro, 2014

.....