F041 e F042 - Tópicos de Física Matemática I e II (Turma A)
FI263 - Tópicos de Física Teórica I (Turma B)

2º Semestre - 2014 Marcio José Menon

Capítulo 6 TÓPICOS DE ELETRODINÂMICA

• ÍNDICE

2. Formulação Covariante

• Referências

- David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd edition (Person Education, New Jersey, 1999), Cap. 10.

- J.D. Jackson, *Eletrodinâmica Clássica* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1983), Caps. 11 e 12 (Sistema Gaussiano).

- M.A. Heald, J.B. Marion, *Classical Eletromagnetic Radiation* (Saunders College, Fort Worth, 1995), Cap. 14 (Sistema Gaussiano).

- W.K.H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd edition (Addison-Wesley, 1962), Caps. 15 a 18.

E. Hecht, *Optics*, 3rd edition (Addison-Wesley, 1998), Appendix 1 Electromagnetic Theory (pré-requisito útil).

• QUESTÕES PROPOSTAS

1. Conceitos Básicos

As equações de Maxwell da Eletrodinâmica (SI), na forma diferencial e em termos das densidades volumétricas totais de carga e corrente são dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Questão 0

Mostre que para um campo vetorial $\vec{F}(\vec{r}, t)$ e um campo escalar $f(\vec{r}, t)$, com derivadas de segunda ordem contínuas, tem-se:

a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0,$ b) $\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{F},$ c) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0.$

Questão 1

A partir das equações de Maxwell, deduza a Equação da Continuidade (forma diferencial):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Questão 2

Justificando a resposta, obtenha as expressões dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ em termos dos potenciais escalar elétrico Φ e vetorial magnético $\vec{A}$ nos seguintes casos:
a) eletrostática e magnetostática;
b) eletrodinâmica.

Questão 3

Com base na resposta da questão anterior, obtenha as equações diferenciais **gerais** obedecidas pelos potenciais Φ e $\vec{A}$, nos casos:
a) eletrostática e magnetostática;
b) eletrodinâmica.

Resposta (b):

$$\vec{\nabla}^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}] = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}] = -\mu_0 \vec{J}.$$

Questão 4
a) Mostre que as seguintes *transformações de calibre* deixam invariantes os campos elétrico e magnético

$$\vec{A} \Rightarrow \vec{A}\,' = \vec{A} + \vec{\nabla}\eta, \qquad \Phi \Rightarrow \Phi\,' = \Phi - \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

onde $\eta(\vec{r}, t)$ é o *campo de calibre*.
b) Obtenha a equação diferencial que relaciona o campo de calibre com os divergentes de $\vec{A}$ e $\vec{A}\,'$.
c) Qual a interpretação física formal dessa equação diferencial?

Questão 5
a) Explique o que são Calibre de Coulomb e Calibre de Lorentz.
b) Obtenha as equações diferenciais **calibradas** obedecidas pelos potenciais Φ e $\vec{A}$, nos casos:
b1) eletrostática e magnetostática;
b2) eletrodinâmica.
Resposta (b2):

$$\vec{\nabla}^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}.$$

2. Formulaçao Covariante

Questão 6
Sendo os quadrivetores tempo-posição dados por (Capítulo 5)

$$\begin{aligned} \vec{X}^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r}), \\ \vec{X}_\mu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\vec{r}), \end{aligned}$$

mostre que os *quadrivetores nabla* são expressos por

$$\vec{\partial}^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \vec{\nabla}\right), \qquad \vec{\partial}_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\vec{\nabla}\right).$$

Questão 7
a) A partir da Equação da Continuidade (questão 1), justifique a definição dos *quadrivetores densidade volumétrica de corrente* pelas formas:

$$\vec{J}^\mu = (c\rho, \vec{J}), \qquad \vec{J}_\mu = (c\rho, -\vec{J}).$$

b) Mostre que na forma covariante (invariante), a equação da continuidade é expressa pelo divergente do quadrivetor densidade volumétrica de corrente:

$$\vec{\partial}^\mu \cdot \vec{J}^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0.$$

Questão 8

a) A partir do Calibre de Lorentz (questão 5), justifique a expressão dos *quadrivetores potenciais* pelas formas:

$$\vec{A}^{\mu} = \left(\frac{\Phi}{c}, \vec{A}\right), \qquad \vec{A}_{\mu} = \left(\frac{\Phi}{c}, -\vec{A}\right).$$

b) Mostre que na forma covariante (invariante), a expressão do calibre de Lorentz é dada pelo divergente do quadrivetor potencial:

$$\vec{\partial}^{\mu} \cdot \vec{A}^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0.$$

Questão 9

No caso da Eletrodinâmica, a partir das expressões vetoriais dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ em termos dos potenciais Φ e $\vec{A}$ (questão 2, ítem (b)), obtenha as seis equações escalares correspondentes:

a) em coordenadas retangulares (cartesianas);

b) em termos das componentes dos quadrivetores $\vec{X}^{\mu}$ e $\vec{A}^{\mu}$.

Questão 10

Com base na resposta do ítem (b) da questão anterior e utilizando as componentes covariantes do quadrivetor tempo-posição, mostre que as seis equações possuem estrutura simétrica, com termo geral dado por

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \qquad \mu \neq \nu.$$

Questão 11

Mostre que em termos das componentes retangulares dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, o termo geral da questão anterior, denotado $F^{\mu\nu}$, possui representação matricial

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Questão 12

A partir da expressão do tensor campo eletromagnético $\overleftrightarrow{F}^{\mu\nu}$, o tensor dual $\overleftrightarrow{G}^{\mu\nu}$ é obtido pelas substituições

$$\vec{E}/c \to \vec{B} \quad \text{e} \quad \vec{B} \to -\vec{E}/c,$$

portanto, com representação matricial:

$$(G^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique que as equações de Maxwell na forma tensorial são dadas por:

$$\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \qquad \text{(homogêneas)},$$

$$\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 J^\mu \qquad \text{(não homogêneas)}, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Questão 13

Verifique que as equações de Maxwell homogêneas podem também ser obtidas diretamente do tensor campo eletromagnético através da equação tensorial:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F^{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F^{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 0, \qquad \mu, \nu, \sigma = 0, 1, 2, 3, \qquad \mu \neq \nu \neq \sigma.$$

.....

Boas provas e boas férias a todos!

Menon, dezembro, 2014

.....