F041 e F042 - Tópicos de Física Matemática I e II (Turma A)

2o semestre / 2014 $\mathbf{P_2}$

Nome:..... .....

RA:.....

- **As resoluções devem ser claras, precisas e bem explicadas.**
- **De preferência, utilize a convenção da soma (Einstein).**
- **Início: 14:00 hs - Término: 17:00 hs.**

- **Questão 1** (25 pontos: 10, 15)

Considere uma transformação linear de coordenadas genéricas do vetor posição

$$x^i \to x'^i = x'^i(x^1, x^2, ..., x^n) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

(a) Dê as definições de tensores de ordem 0 e de ordem 1 (contravariante e covariante).

(b) De acordo com as definições, verifique se os seguintes conjuntos de funções das coordenadas constituem as componentes de um tensor e em caso afirmativo, especifique a ordem e o tipo.

(b1) $dx^1, dx^2, ..., dx^n$ (diferenciais); **(b2)** $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^2}, ...\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^n}$, φ : campo escalar;

(b3) $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dfrac{\partial}{\partial x^2}, ...\dfrac{\partial}{\partial x^n}$.

.

• **Questão 2** (40 pontos: 10, 10, 10, 10)

Os vetores de uma dada base genérica são expressos por $\vec{v}_i = h_i \hat{v}_i$, onde h_i são os fatores de escala. Considerando o sistema de coordenadas esféricas ortogonais, r, θ, ϕ, responda as questões que seguem.

(a) A partir das expressões dos <u>vetores</u> da base dada $\vec{v}_r, \vec{v}_\theta, \vec{v}_\phi$, determine os coeficientes métricos e sua representação matricial (métrica associada à base dada).

(b) A partir dos vetores da base dada (ítem anterior), determine os vetores da base recíproca $\vec{v}^r$, $\vec{v}^\theta$, $\vec{v}^\phi$.

(c) Determine os coeficientes métricos associados à base recíproca e sua representação matricial.

(d) Sabendo-se que na base dada $\vec{R} = R\hat{r}$, determine as componentes contravariantes e covariantes de $\vec{R}$ e expresse os resultados nas bases correspondentes.

.

• **Questão 3** (15 pontos: 10, 5)

(a) Explique como podem ser obtidas as leis de transformação que definem tensores de ordem $N = 2$ a partir das leis que definem tensores de ordem $N = 1$ (questão 1, ítem a). Obtenha as leis correspondentes aos 3 casos possíveis.

(b) Com base na resposta do ítem anterior, obtenha a lei de transformação que define um tensor de ordem N = 4 e tipo (p,q) = (3,1). Num espaço de dimensão 4 quantos elementos possui esse tensor?

.

• **Questão 4** (20 pontos: 10, 10)

(a) Mostre que todo tensor T_{ij} pode ser expresso como a soma de dois tensores, um simétrico e outro anti-simétrico.

(b) Seja A_{ij} um tensor covariante de segunda ordem <u>anti-simétrico</u>. Determine o resultado da seguinte operação distributiva (convenção da soma):

$$[\,\delta^i_j\,\delta^k_l\;+\;\delta^i_l\,\delta^k_j\,]A_{ik}$$

.

.

.