F502 Eletromagnetismo I

Turma A 1º Semestre - 2010 Márcio José Menon

Capítulo 1 ANÁLISE VETORIAL (Revisão)

• ÍNDICE

1.1 Álgebra Vetorial
1.2 Cálculo Diferencial
1.3 Cálculo Integral
1.4 Coordenadas Curvilíneas
1.5 Distribuição Delta de Dirac
1.6 Teoria dos Campos Vetoriais e Escalares

1.1. Álgebra Vetorial

a. Conceito Elementar de Vetor
- a.1 Notação: Vetor e Versor
- a.2 Adição
- a.3 Produto de um Vetor por um Escalar
- a.4 Subtração
- a.5 Exemplo: Vetor Separação

b. Produto de Dois Vetores
- b.1 Produto Escalar
  - Definição
  - Propriedades Básicas
  - Componente de um Vetor na Direção de um Versor: Projeção Ortogonal
  - Cossenos Diretores
- b.2 Produto Vetorial
  - Definição
  - Propriedades Básicas

c. Produtos Triplos de Vetores
- c.1 Produto Triplo Escalar
- c.2 Produto Triplo Vetorial

d. Componentes num Sistema de Coordenadas Retangulares (Cartesianas)
- d.1 Definições
- d.2 Propriedades
  - Produtos de Dois Vetores
  - Vetor Posição
  - Produtos Triplos de Vetores

e. Conceito de Campo (Clássico)
- e.1 Campos Escalares
- e.2 Campos Vetoriais
- e.3 Campos Estacionários
- e.4 Campos Uniformes

f. Definições Geométricas de Vetores, Escalares e Operadores (Tensores)

f.1 Vetores
f.1.1 Transformação das Componentes do Vetor Posição
• Duas Dimensões
- Resultados Básicos
- Notação Compacta
- Interpretações dos Coeficientes: Derivadas Parciais e Cossenos Diretores
• Generalização para n Dimensões
f.1.2 Definição Geométrica de Vetor
f.2 Escalares
f.3 Operadores
f.4 Tensores de Ordem N

1.2 Cálculo Diferencial

a. Diferencial de uma Função
a.1 Uma Variável
a.2 Várias Variáveis (Diferencial Total)
a.3 Diferencial do Vetor Posição (Deslocamento Infinitesimal) e Vetor Velocidade
b. Transformação (Operador) Vetorial Nabla
b.1 Origens
b.2 Definição Formal
c. Gradiente
d. Divergente
e. Rotacional
f. Propriedades Notáveis do Gradiente, Divergente e Rotacional
f.1 Produtos de Campos
f.2 Derivadas Segundas
g. Operador Laplaciano
g.1 Definição
g.2 Laplaciano de um Campo Escalar
• Expressão Geral
• Importância em Teoria de Campos
g.3 Laplaciano de um Campo Vetorial
h. Derivada Normal de um Campo Escalar

1.3 Cálculo Integral

a. Integrais
a.1 Integral de Linha (de Caminho ou de Trajetória)
a.2 Integral de Superfície - Fluxo
a.3 Integral de Volume
b. Teoremas
b.1 Teorema de Gauss (Teorema do Divergente)
b.2 Teorema de Stokes (Teorema do Rotacional)

1.4 Coordenadas Curvilíneas
a. Coordenadas Esféricas
a.1 Base Ortonormal $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$
a.2 Elementos Infinitesimais
• Deslocamento
• Superfície
• Volume
a.3 Gradiente, Divergente, Rotacional, Laplaciano
b. Coordenadas Cilíndricas
b.1 Base Ortonormal $\{\hat{s}, \hat{\phi}, \hat{z}\}$
b.2 Elementos Infinitesimais
• Deslocamento
• Superfície
• Volume
b.3 Gradiente, Divergente, Rotacional, Laplaciano
c. Sistema de Coordenadas Curvilíneas Ortogonais Genérico

1.5 Distribuição Delta de Dirac
a. Problemas Típicos
b. Distribuição Delta em Uma Dimensão
b.1 Definição Prática
b.2 Propriedade de Filtragem
b.3 Exemplo
b.4 Definição Formal
b.5 Exemplos de Sequências Delta
b.6 Propriedades Notáveis
c. Distribuição Delta em Três Dimensões
c.1 Resultados
c.2 Exemplos
d. Resumo

1.6 Teoria dos Campos Vetoriais e Escalares
a. Teorema de Helmholtz
a.1 Idéia Geral
a.2 Enunciado
b. Campos Irrotacionais e Potencial Escalar
b.1 Diferencial Total e Diferencial Exata
b.2 Diferencial Exata, Gradiante e Integral de Linha
b.3 Integral de Linha e Rotacional
b.4 Teorema para Campos Irrotacionais
b.5 Energia Potencial e Conservação da Energia
b.5.1 Teorema do Trabalho-Energia Cinética
b.5.2 Energia Potencial
b.5.3 Conservação da Energia
c. Campos Solenoidais e Potencial Vetor
c.1 Resultados Básicos
c.2 Teorema para Campos Solenoidais

• **QUESTÕES PROPOSTAS**

Os exemplos e problemas indicados, referem-se ao livro texto principal (Griffiths, 3a. edição).

1.1 Álgebra Vetorial

Questão 1. Exemplo 1.2.

Questão 2. Problema 1.4.

Questão 3. Problema 1.5.

Questão 4. Problema 1.7.

Questão 5. Explique o que significam: Campos Escalares, Campos Vetoriais, Campos Estacionários (Estáticos) e Campos Uniformes.

Questão 6. Considere uma rotação de uma base ortonormal retangular, no plano, de um ângulo φ no sentido anti-horário:

$$\{\hat{x}_1, \hat{x}_2\}\ (\text{dada}) \qquad \Rightarrow \qquad \{\hat{x}_1^{'}, \hat{x}_2^{'}\}\ (\text{rotada})$$

a) Mostre que as componentes do vetor posição na base rotada, $x_1^{'}, x_2^{'}$ são expressos em termos das componentes na bases dada, x_1, x_2, por

$$x_1^{'} = \cos\varphi\, x_1 + \text{sen}\varphi\, x_2, \qquad x_2^{'} = -\text{sen}\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2.$$

b) Mostre que a transformação inversa é dada por:

$$x_1 = \cos\varphi\, x_1^{'} - \text{sen}\varphi\, x_2^{'}, \qquad x_2 = \text{sen}\varphi\, x_1^{'} + \cos\varphi\, x_2^{'}.$$

Questão 7. Justificando a resposta, expresse o resultado do ítem (a) da questão anterior em termos de derivadas parciais e de cossenos diretores. Generalize esses resultados para um espaço de dimensão n.

Questão 8. Considerando uma base ortonormal $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\}$, determine as matrizes associadas às seguintes rotações:
a) Eixos $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$ de um ângulo φ em torno do eixo $\hat{x}_3$ no sentido anti-horário (olhando-se através de $-\hat{x}_3$):

b) Eixos $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_3$ de um ângulo θ em torno do eixo $\hat{x}_2$ no sentido anti-horário (olhando-se através de $-\hat{x}_2$):

Respostas:
(a)

$$\Lambda = (\lambda_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \text{sen}\,\phi & 0 \\ -\text{sen}\,\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\Lambda = (\lambda_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Questão 9. Considerando uma rotação do sistema de coordenadas num espaço de dimensão n, dê as definições (geométricas) de escalares e de vetores.

1.2 Cálculo Diferencial

Questão 10. Considerando as definições (geométricas) de escalares e vetores (questão anterior), verifique se as seguintes ternas ordenadas constituem as componentes de um vetor:
a) (dx_1, dx_2, dx_3) - deslocamento infinitesimal.
b) $(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt})$ - velocidade.
c) $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3})$, onde f é um campo escalar.
d) $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ - Nabla (ou Del).

Questão 11. Sendo Nabla uma transformação (operador) <u>vetorial</u>, $\vec{\nabla}$, discuta os produtos possíveis desse vetor com campos escalares e vetoriais, introduzindo as expressões do gradiente, divergente, rotacional e laplaciano.

Questão 12. Exemplo 1.3.

Questão 13. Problema 1.13 (condição do ítem b: $\neq 0$).

Questão 14. Problema 1.16 (condição $r \neq 0$).

Questão 15. Problema 1.20.

Questão 16. Problema 1.21.

Questão 17. Problema 1.22.

Questão 18. Problema 1.26 (assume-se derivadas de segunda ordem contínuas).

Questão 19. Problema 1.27 (assume-se derivadas de segunda ordem contínuas).

Questão 20. Para resolver esta importante questão, será útil consultar: F.W. Byron and R.W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Theory* (Dover Publication, New York, 1992), Sec. 1.7, pag. 28, The Laplacian.

Considere as coordenadas retangulares x, y e z, representadas por x_1, x_2 e x_3, respectivamente e seja $\psi(\vec{r})$ um campo escalar. A expansão de Taylor de $\psi(\vec{r})$ em torno de um ponto P do espaço, considerado na origem do sistema de coordenadas é dada por:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \psi_P + \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right]_0 x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}\right]_0 x_i x_j + ...,$$

onde $\psi_P = \psi(0, 0, 0)$ e o subscrito 0 nas derivadas indica que são calculadas na origem do sistema de coordenadas. O valor médio de $\psi(\vec{r})$ num volume V é dado por

$$\bar{\psi} = \frac{1}{V} \int \psi(\vec{r}) d\tau,$$

onde $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3$.

a) Determine o valor médio de $\psi(\vec{r})$, na vizinhança do ponto P. Para tanto, considere a expansão de Taylor até segunda ordem nas derivadas e a vizinhança contida no volume de um cubo de aresta L e centro geométrico na origem do sistema de coordenadas (figura). Note que em coordenadas retangulares,

$$\sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}\right]_0$$

é o laplaciano do campo escalar calculado na origem, ou seja, no ponto P: $[\vec{\nabla}^2 \psi]_P$.

Resposta: $\bar{\psi} = \psi_P + \frac{L^2}{24} [\vec{\nabla}^2 \psi]_P$.

b) Interprete fisicamente o resultado obtido, discutindo os conceitos de ação do campo (vizinhança) e ação à distância (Newton). Interprete fisicamente duas equações que envolvam o laplaciano, por exemplo, equação de Laplace, de Poisson, de Onda, etc.

1.3 Cálculo Integral

Questão 21. Exemplo 1.6.

Questão 22. Problema 1.28.

Questão 23. Exemplo 1.7.

Questão 24. Problema 1.29.

Questão 25. Exemplo 1.8.

Questão 26. Problema 1.30.

Questão 27. Exemplo 1.10.

Questão 28. Exemplo 1.11.

Questão 29. Problema 1.35.

Questão 30. Problema 1.60.

1.4 Coordenadas Curvilíneas

Questão 31. Problema 1.37. Note que o resultado mostra que $\hat{r} = \hat{r}(\theta, \phi)$, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\theta, \phi)$ e $\hat{\phi} = \hat{\phi}(\phi)$.

Questão 32. Considerando o sistema de coordenadas esféricas r, θ e ϕ, mostre, através de esquemas, desenhos, os seguintes resultados (consulte Griffiths, Sec. 1.41):
a) Os elementos infinitesimais de comprimento são dados por

$$dl_r = dr, \qquad dl_\theta = r\, d\theta, \qquad dl_\phi = r\, \mathrm{sen}\theta\, d\phi.$$

b) Os elementos de área normais às superfícies $r =$ constante (esfera) e $\theta =$ constante (cone) são dados, respectivamente, por

$$d\vec{a}_r = r^2 \mathrm{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{r}, \qquad d\vec{a}_\theta = r\, \mathrm{sen}\theta\, dr\, d\phi\, \hat{\theta}.$$

c) O elemento de volume é dado por

$$d\tau = r^2 \mathrm{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi.$$

Questão 33. Exemplo 1.13.

Questão 34. Problema 1.41. Note que o resultado mostra que $\hat{s} = \hat{s}(\phi)$ e $\hat{\phi} = \hat{\phi}(\phi)$.

Questão 35. Considerando o sistema de coordenadas cilíndricas s, ϕ e z, resolva os ítens (a) e (c) da questão 32. Resposta: (a) $dl_s = ds$, $dl_\phi = s\, d\phi$, $dl_z = dz$; (c) $d\tau = s\, ds\, d\phi\, dz$.

Questão 36. Obtenha as expressões do gradiente, divergente, rotacional e laplaciano em coordenadas esféricas (equações 1.70 a 1.73 do Griffiths) e em coordenadas cilíndricas (equações 1.79 a 1.82 do Griffiths).

Note que pode-se obter esses resultados por dois caminhos: (1) partir das equações em coordenadas cartesianas e efetuar as mudanças de variáveis para coordenadas esféricas e cilíndricas, o que é um tanto cansativo! (2) partir das expressões gerais em coordenadas curvilíneas ortogonais (Griffiths, Apêndice A) e substituir os fatores de escala e coordenadas correspondentes.

Questão 37. Para responder esta questão, consulte, por exemplo, Griffiths, Apêndice A, Seções A.4 e A.5.

Utilizando coordenadas curvilíneas ortogonais genéricas deduza os seguintes resultados:
a) Teorema de Gauss (Divergente)

$$\int_\nu [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}]\, d\tau = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{a}$$

b) Teorema de Stokes (Rotacional)

$$\int_S [\vec{\nabla} \times \vec{A}] \cdot d\vec{a} = \oint_{\mathcal{P}} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

1.5 Distribuição Delta de Dirac

Questão 38. Mostre que as definições práticas da Delta de Dirac,

$$\delta(x-a) = 0 \quad \text{para} \quad x \neq a \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)dx = 1,$$

implicam na *Propriedade de Filtragem*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a).$$

Questão 39. Exemplo 1.14.

Questão 40. Exemplo 1.15.

Questão 41. a) Dê a definição formal da Distribuição Delta de Dirac em uma dimensão (integral de Stieltzes).
b) Dê dois exemplos de *sequências delta*.

Questão 42. Problema 1.43.

Questão 43. Problema 1.45.

Questão 44. Demonstre os seguintes resultados:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\hat{r}}{r^2}\right] = 4\pi\delta^3(\vec{r}) \qquad \text{e} \qquad \vec{\nabla}^2 \left[\frac{1}{r}\right] = -4\pi\delta^3(\vec{r}).$$

Questão 45. Exemplo 1.16.

Questão 46. Problema 1.46.

Questão 47. Problema 1.48.

Questão 48. Problema 1.62.

Questão 49. F 502, P_1, 1º Semestre - 2006.

Sejam $\vec{r}$ e $\vec{R}$ os vetores posição de dois pontos no espaço tridimensional (que podem coincidir ou não) e considere as seguintes propriedades da distribuição Delta:

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{R}) = 0 \quad \text{se} \quad \vec{r} \neq \vec{R},$$

$$\int_\nu \delta^3(\vec{r} - \vec{R}) d\tau = 1 \quad \text{se o volume } \nu \text{ contém o ponto } \vec{R}.$$

(a) Para uma função contínua $f(\vec{r})$, determine o resultado da seguinte integral:

$$\int_\nu f(\vec{r})\delta^3(\vec{r} - \vec{R}) d\tau$$

Como é chamada essa propriedade? Qual a dimensão da Delta?

(b) Para qualquer valor do vetor posição $\vec{r} = r\hat{r}$, incluindo a origem, determine $\vec{\nabla} \cdot (\frac{\hat{r}}{r^2})$.

1.6 Teoria dos Campos Vetoriais e Escalares

Questão 50. Demonstre o Teorema de Helmholtz (consulte, por exemplo, Griffiths, Apêndice B):

Se um campo vetorial $\vec{F}(\vec{r})$ obedece

$$(1) \quad \lim_{r\to\infty} \vec{F}(\vec{r}) = 0,$$

$$(2) \quad \lim_{r\to\infty} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \to 0 \text{ mais rápido que } \frac{1}{r^2},$$

$$(3) \quad \lim_{r\to\infty} \vec{\nabla} \times \vec{F} \to 0 \text{ mais rápido que } \frac{1}{r^2},$$

então, conhecidos $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ e $\vec{\nabla} \times \vec{F}$, o campo vetorial $\vec{F}(\vec{r})$ é univocamente determinado e tem-se

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r}) - \vec{\nabla} U(\vec{r}),$$

onde

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_\nu \frac{\vec{\nabla} \times \vec{F}}{|\vec{r} - \vec{r'}|} d\tau' \qquad \text{e} \qquad U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_\nu \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{F}}{|\vec{r} - \vec{r'}|} d\tau'.$$

Questão 51. Considerando funções do espaço euclidiano tridimensional, dê as seguintes definições:
a) Diferencial total.
b) Diferencial exata.
Obs: consulte livros de Cálculo (por exemplo, G.B. Thomas Jr., *Cálculo*, Seções 12.13 e 12.14).

Questão 52. Mostre que se $\varphi = \varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$ é um campo escalar, a diferencial total de φ pode ser expressa na forma

$$d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r},$$

onde

$$d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z} \qquad \text{e} \qquad \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\hat{z}.$$

Questão 53. Com base na definição de Diferencial Exata e no Teorema de Stokes (Rotacional), mostre que se um campo vetorial $\vec{F}(\vec{r})$ obedece a uma qualquer das propriedades abaixo, então ele também obedece todas as demais:

(1) $\vec{F} \cdot d\vec{r} = d\varphi(\vec{r})$ (diferencial exata);
(2) $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$;
(3) $\displaystyle\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ independe do caminho de integração;
(4) $\displaystyle\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$;
(5) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.

Questão 54. F 502, P_1, 1º Semestre - 2006.

(a) Dê as seguintes definições:

(a1) Diferencial Total de uma função $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$;

(a2) Diferencial Exata.

(b) Seja $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$ um campo vetorial irrotacional. Mostre que $\vec{F}$ obedece às seguintes propriedades:

(b1) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$;

(b2) $\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ independe do caminho de integração;

(b3) $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ é uma diferencial exata;

(b4) Existe um campo escalar $f(\vec{r})$ tal que $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} f(\vec{r})$.

Questão 55. Campos Potenciais e Campos Conservativos
a) A partir da definição de *trabalho* realizado por uma força $\vec{F}$ sobre uma partícula de massa m e da Segunda Lei de Newton, deduza o Teorema do Trabalho - Energia Cinética:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\, mv_2^2 - \frac{1}{2}\, mv_1^2.$$

b) Mostre que se $\vec{F}$ obedece a uma das propriedades da questão 53, o Teorema do ítem anterior pode ser escrito na forma

$$\frac{1}{2}\, mv_1^2 + U(\vec{r}_1) = \frac{1}{2}\, mv_2^2 + U(\vec{r}_2),$$

onde

$$U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Qual o significado físico do sinal menos?

Obs: em geral, a condição utilizada é a independência de caminho da integral de $\vec{F} \cdot d\vec{r}$, ou que essa expressão é uma diferencial exata, o que, como visto na questão 53 é equivalente.
c) Mostre que se $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, então existe $U(\vec{r})$ tal que $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ e que a recíproca é verdadeira.
d) Se $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, o campo $\vec{F}(\vec{r})$ é *conservativo*? Explique.